

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa III - 1

1. Wykaż, że dla dowolnego $t > 0$,

$$(t^{-1} - t^{-3})e^{-t^2/2} \leq \int_t^\infty e^{-s^2/2} ds \leq t^{-1}e^{-t^2/2}.$$

Wynioskuj stąd, że jeśli X ma rozkład $\mathcal{N}(0, 1)$, to

$$\mathbf{P}(X \geq t) = 1 - \Phi(t) = \frac{1 + o(1)}{\sqrt{2\pi}t} e^{-t^2/2} \quad \text{przy } t \rightarrow \infty.$$

2. Wykaż, że funkcja $\Lambda_X = \log M_X$ jest wypukła.
3. Oblicz funkcję tworzącą momenty M_X dla zmiennych X o następujących rozkładach:
- symetryczny dwupunktowy;
 - dwumianowy z parametrami n, p ;
 - Poissona z parametrem λ ;
 - Gaussowski $\mathcal{N}(a, \sigma^2)$;
 - wykładniczy z parametrem λ ;
 - jednostajny na $[a, b]$.
4. Oblicz Λ_X^* dla rozkładów z zadania 1.
5. Wykaż, że jeśli $\mathbf{E}|X| < \infty$, to $\Lambda_X^*(\mathbf{E}X) = 0$ oraz, że dla dowolnej zmiennej losowej X , $\inf_t \Lambda_X^*(t) = 0$,
6. Udowodnij, że jeśli $\mathbf{P}(X > a) = 0$, to $\Lambda_X^*(t) = 0$ dla $t > a$ oraz oraz jeśli $\mathbf{P}(X < a) = 0$, to $\Lambda_X^*(t) = 0$ dla $t < a$. Ile wynosi w tych przypadkach $\Lambda_X^*(a)$?
7. Rozpatrując rozkłady wykładnicze, gaussowskie i Poissona pokaż, że nie można poprawić rzędu oszacowań w nierównościach Bernsteina i Bennetta.
8. (Nierówność Azumy) Załóżmy, że $(M_k, \mathcal{F}_k)_{k=0}^\infty$ jest martyngałem takim, że $\|M_k - M_{k-1}\|_\infty \leq a_k$ dla $k = 1, 2, \dots$. Wykaż, że

$$\Lambda_{M_n - M_0}(s) \leq \frac{s^2}{2} \sum_{k=1}^n a_k^2, \quad s \in \mathbb{R}$$

oraz

$$\mathbf{P}(|M_n - M_0| \geq t) \leq 2 \exp\left(-\frac{t^2}{2 \sum_{k=1}^n a_k^2}\right), \quad t \geq 0.$$

9. Przy oznaczeniach poprzedniego zadania, wykaż, że istnieje stała $C < \infty$ taka, że dla $p \geq 2$,

$$\|M_n - M_0\|_p := (\mathbf{E}|M_n - M_0|^p)^{1/p} \leq C \sqrt{p} \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right)^{1/2}.$$

10. (Nierówności Chińczyna) Niech $S = \sum_{k=1}^n a_k \varepsilon_k$, gdzie ε_k niezależne zmienne losowe takie, że $\mathbf{P}(\varepsilon_k = \pm 1) = 1/2$.
- i) Wykaż, że dla $p, q > 0$ istnieje stała $C_{p,q}$ zależna tylko od p i q dla której $\|S\|_p \leq C_{p,q} \|S\|_q$.
 - ii) Wykaż, że $C_{p,2} \leq C\sqrt{p}$ dla $p \geq 2$.
 - iii) Udowodnij, że dla $p > q$, $C_{p,q} \geq \gamma_p/\gamma_q$, gdzie $\gamma_p = (\mathbf{E}|\mathcal{N}(0,1)|^p)^{1/p} \sim \sqrt{p}$ przy $p \rightarrow \infty$. W szczególności $C_{p,2} \geq c\sqrt{p}$ dla $p \geq 2$ i stałej uniwersalnej c .
11. Załóżmy, że $(M_k, \mathcal{F}_k)_{k=0}^\infty$ jest martyngałem takim, że

$$\max_k \|M_k - M_{k-1}\|_\infty \leq a, \quad \|\mathbf{E}((M_k - M_{k-1})^2 | \mathcal{F}_{k-1})\|_\infty \leq \sigma_k^2$$

oraz $\sigma^2 = \sum_{k=1}^n \sigma_k^2$. Wykaż, że

$$\Lambda_{M_n - M_0}(s) \leq \frac{\sigma^2}{a^2} (e^{sa} - sa - 1), \quad s \geq 0,$$

oraz

$$\mathbf{P}(|M_n - M_0| \geq t) \leq 2 \exp\left(-\frac{t}{2a} \ln\left(1 + \frac{ta}{\sigma^2}\right)\right), \quad t \geq 0.$$

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa III - 2

1. i) Załóżmy, że F jest ośrodkową przestrzenią metryczną. Wykaż, że $\mathcal{B}(F \times F) = \mathcal{B}(F) \otimes \mathcal{B}(F)$, gdzie $\mathcal{B}(X)$ oznacza rodzinę zbiorów borelowskich podzbiorów X .
 ii) Wywnioskuj stąd, że suma funkcji mierzalnych o wartościach w ośrodkowej przestrzeni unormowanej jest funkcją mierzalną.

2. Wykaż, że dla niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie

$$\mathbf{E} \max_{k \leq n} \|S_k\|^p \leq C^p \mathbf{E} \|S_n\|^p$$

dla $p \geq 1$ i stałej uniwersalnej C .

3. Wykaż, że dla niezależnych zmiennych losowych

$$\mathbf{E} \max_{k \leq n} \|S_k\|^p \leq C^p \max_{1 \leq k \leq n} \mathbf{E} \|S_k\|^p$$

dla $p \geq 1$ i stałej uniwersalnej C .

4. Wykaż, że nie istnieje stała uniwersalna C taka, że

$$\mathbf{E} \max_{k \leq n} |M_k| \leq C \mathbf{E} |M_n|$$

dla dowolnego martyngału $(M_k)_{1 \leq k \leq n}$.

5. Udowodnij, że dla niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie oraz $a_i \in [0, 1]$,

$$\mathbf{P} \left(\left\| \sum_{i=1}^n a_i X_i \right\| \geq 6t \right) \leq 4 \mathbf{P}(\|S_n\| \geq t), \quad \text{dla } t > 0.$$

6. Udowodnij, że jeśli wektory losowe X_i mają średnią zero oraz $a_i \in [0, 1]$ to dla dowolnej funkcji wypukłej, niemalejącej $\varphi: \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+$ zachodzi

$$\mathbf{E} \varphi \left(\left\| \sum_{i=1}^n a_i X_i \right\| \right) \leq \mathbf{E} \varphi \left(\left\| \sum_{i=1}^n X_i \right\| \right).$$

7. Załóżmy, że $X_1, Y_1, \dots, X_n, Y_n$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie. Udowodnij, że istnieją uniwersalne stałe C_1 i C_2 dla których

$$\mathbf{P} \left(\max_{k, l \leq n} \left| \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l h(X_i, Y_j) \right| \geq t \right) \leq C_1 \mathbf{P} \left(\left| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n h(X_i, Y_j) \right| \geq \frac{t}{C_2} \right)$$

dla dowolnej funkcji mierzalnej h .

8. Niech X_i będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych w ośrodkowej przestrzeni Banacha F . Wykaż, że następujące warunki są równoważne.

- i) $\sum_{i=1}^{\infty} X_i$ zbiega według prawdopodobieństwa.
- ii) $\sum_{i=1}^{\infty} X_i$ zbiega p.n..
- iii) $\sum_{i=1}^{\infty} X_i$ zbiega według rozkładu.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa III - 3

1. Niech X będzie zmienną losową o wartościach w ośrodkowej przestrzeni Banacha F . Wykaż, że
 - a) dla $\varepsilon > 0$ istnieje funkcja $\varphi: F \rightarrow F$ przyjmująca tylko przeliczalnie wiele wartości taka, że $\|X - \varphi(X)\| \leq \varepsilon$ p.n.,
 - b) jeśli $\mathbf{E}\|X\| < \infty$, to dla $\varepsilon > 0$ istnieje funkcja $\varphi: F \rightarrow F$ przyjmująca tylko skończenie wiele wartości taka, że $\mathbf{E}\|X - \varphi(X)\| \leq \varepsilon$.
2. Załóżmy, że X_i są niezależne o wartościach w ośrodkowej przestrzeni unormowanej $(F, \|\cdot\|)$. Wykaż, że
 - a) Dla dowolnych $s, t > 0$,

$$\mathbf{P}\left(\max_{k \leq n} \|S_k\| > 3t + s\right) \leq \mathbf{P}\left(\max_{k \leq n} \|S_k\| > t\right)^2 + \mathbf{P}\left(\max_{k \leq n} \|X_k\| > s\right).$$

- b) Jeśli zmienne X_i są symetryczne, to dla $s, t > 0$,

$$\mathbf{P}\left(\max_{k \leq n} \|S_k\| > 2t + s\right) \leq 4\mathbf{P}(\|S_n\| > t)^2 + \mathbf{P}\left(\max_{k \leq n} \|X_k\| > s\right).$$

3. Niech $S := \sum_{i=1}^n x_i \varepsilon_i$ dla pewnych $x_i \in F$. Wykaż, że dla $p, q > 0$ istnieją stałe $C_{p,q} < \infty$ zależne tylko od p i q takie, że

$$(\mathbf{E}\|S\|^p)^{1/p} \leq C_{p,q}(\mathbf{E}\|S\|^q)^{1/q}.$$

4. Załóżmy, że $0 < p < \infty$, zmienne X_i są niezależne i symetryczne o wartościach w F . Wykaż, że

$$\mathbf{E}\|S_n\|^p \leq 2 \cdot 3^p \mathbf{E} \max_{i \leq n} \|X_i\|^p + 2(3t_0)^p,$$

gdzie

$$t_0 := \inf\{t > 0: \mathbf{P}(\|S_n\| > t) \leq (8 \cdot 3^p)^{-1}\}.$$

5. Przestrzeń Banacha F nazywamy typu $p \geq 1$ jeśli istnieje stała T_p taka, że dla dowolnych wektorów $x_i \in F$,

$$\left(\mathbf{E} \left\| \sum_{i=1}^n x_i \varepsilon_i \right\|^p\right)^{1/p} \leq T_p \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^p\right)^{1/p}.$$

Wykaż, że

- a) Jeśli przestrzeń jest typu p , to jest typu q dla $q \leq p$.
 - b) Przestrzenie Hilberta są typu 2.
 - c) Każda przestrzeń Banacha jest typu 1 i nie istnieją przestrzenie typu $p > 2$.
 - d) Przestrzeń L^p jest typu $\min\{p, 2\}$ dla $p < \infty$.
 - e) Przestrzeń c_0 nie ma nietrywialnego typu.
6. Wykaż, że ośrodkowa przestrzeń Banacha F ma typ p wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje stała $C < \infty$ taka, że dla dowolnych niezależnych zmiennych losowych Z_i o wartościach w F i średniej zero,

$$\mathbf{E} \left\| \sum_{i=1}^n Z_i \right\|^p \leq C \sum_{i=1}^n \mathbf{E}\|Z_i\|^p.$$

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa III - 4

1. Wykaż, że Mocne Prawa Wielkich Liczb Marcinkiewicza-Zygmunda oraz Brunka zachodzą w przestrzeniach typu 2.
2. Wykaż odwrotną nierówność wykładniczą Kołmogorowa: Dla $\varepsilon > 0$ istnieją stałe $K(\varepsilon)$ i $\delta(\varepsilon)$ takie, że dla ograniczonych, niezależnych zmiennych losowych X_i o średniej zero, $s > 0$ oraz $\sigma^2 := \text{Var}(\sum_{i=1}^n X_i)$ zachodzi oszacowanie

$$\mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^n X_i \geq t\right) \geq \exp\left(-(1+\varepsilon)\frac{t^2}{2\sigma^2}\right),$$

o ile

$$t \max_i \|X_i\|_\infty \leq \delta(\varepsilon)\sigma^2 \quad \text{oraz} \quad t \geq K(\varepsilon)\sigma.$$

Wsk: Ustalmy $\varepsilon > 0$ i niech $u = u(\varepsilon)$ spełnia $1 - \Phi(u) \geq 2\exp(-\sqrt{1+\varepsilon}u^2/2)$. Wykazać, że jeśli

$$\max_{i \leq k} \|X_i\|_\infty \leq \gamma(\varepsilon) \left(\sum_{i=1}^k \mathbf{E}X_i^2\right)^{1/2},$$

to

$$\mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^k X_i \geq u \left(\sum_{i=1}^k \mathbf{E}X_i^2\right)^{1/2}\right) \geq \frac{1}{2}(1 - \Phi(u)) \geq \exp\left(-\sqrt{1+\varepsilon}\frac{u^2}{2}\right).$$

3. Udowodnij, że odwrotną nierówność wykładniczą Kołmogorowa można równoważnie sformułować jako istnienie stałych $\delta'(\varepsilon) > 0$ i $K'(\varepsilon) < \infty$ takich, że

$$\mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^n X_i \geq t\right) \geq \frac{1}{K'(\varepsilon)} \exp\left(-(1+\varepsilon)\frac{t^2}{2\sigma^2}\right),$$

o ile

$$\max(t, \sigma) \max_i \|X\|_\infty \leq \delta'(\varepsilon)\sigma^2.$$

4. Wykaż, że jeśli X_i są niezależnymi wektorami losowymi o jednakowym rozkładzie takimi, że $\mathbf{P}(X_i \neq 0) > 0$, to $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\|S_n\|}{\sqrt{n}} = \infty$ p.n..
5. Podaj alternatywny dowód Prawa Iterowanego Logarytmu wykorzystując PIL dla procesu Wienera oraz twierdzenie Skorochoda o włożeniu:
Jeśli X jest zmienną losową o skończonej wariancji i średniej zero, to istnieje moment zatrzymania τ taki, że $\mathbf{E}\tau = \mathbf{E}X^2$ oraz W_τ ma taki sam rozkład jak X .
6. Załóżmy, że X_i są niezależnymi ograniczonymi zmiennymi losowymi o średniej zero spełniającymi warunki:
i) $a_n^2 := \text{Var}(S_n) = \sum_{i=1}^n \mathbf{E}X_i^2 \rightarrow \infty$

ii) $\|X_n\|_\infty \frac{\sqrt{\ln \ln a_n^2}}{a_n} \rightarrow 0$.

Wykaż, że

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{\sqrt{2a_n^2 \ln \ln a_n^2}} = 1 \quad \text{p.n.}$$

7. Załóżmy, że X_i są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie ze średnią zero i wariancją σ^2 . Wykaż, że dla dowolnej funkcji ciągłej $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{S_n}{\sqrt{2n \ln \ln n}}\right) = \sup_{t \in [-\sigma, \sigma]} f(t) \quad \text{p.n.,}$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{S_n}{\sqrt{2n \ln \ln n}}\right) = \inf_{t \in [-\sigma, \sigma]} f(t) \quad \text{p.n..}$$

8. Załóżmy, że X_i są niezależnymi wektorami losowymi w ośrodkowej przestrzeni Banacha o tym samym rozkładzie co X . Wykaż, że warunek

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\|S_n\|}{\sqrt{2n \ln \ln n}} < \infty \quad \text{p.n.}$$

implikuje:

i) $\mathbf{E} \frac{\|X\|^2}{LL\|X\|} < \infty$, gdzie $LLx := \ln \ln(x \vee 10)$.

ii) $\mathbf{E}X = 0$ oraz $\sup_{\|x^*\| \leq 1} \mathbf{E}|x^*(X)|^2 < \infty$.

9. Załóżmy, że X_i są niezależnymi wektorami losowymi w ośrodkowej przestrzeni Banacha typu 2 o tym samym rozkładzie co X , $\mathbf{E}X = 0$ oraz $\mathbf{E} \frac{\|X\|^2}{LL\|X\|} < \infty$. Wykaż, że $\frac{S_n}{\sqrt{2n \ln \ln n}}$ zbiega do 0 według prawdopodobieństwa.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa III - 5

1. Udowodnij, że dla $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ oraz dowolnego $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \mathbf{P}(\bar{S}_n \in A) = -\text{essinf} \left\{ \frac{x^2}{2} : x \in A \right\}.$$

2. Podaj przykład zmiennej X dla której nie istnieje granica $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \log \mathbf{P}(\bar{S}_n = 0)$.

3. Wykaż, że dla dowolnej zmiennej X ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \mathbf{P}(\bar{S}_n \geq t) = -\inf_{s \geq t} \Lambda_X^*(s).$$

4. Wykaż, że

- a) Funkcja Λ_X^* jest półciągła z dołu dla dowolnej zmiennej X ;
- b) Jeśli $\Lambda_X(t) < \infty$ dla t z pewnego otoczenia zera, to $\lim_{|t| \rightarrow \infty} \Lambda_X^*(t) = \infty$, w szczególności zbiory $\{t: \Lambda_X^*(t) \leq a\}$ są zwarte dla $a \in \mathbb{R}$;
- c) Jeśli $\Lambda_X(t) < \infty$ dla wszystkich $t \in \mathbb{R}$, to $\lim_{|t| \rightarrow \infty} \Lambda_X^*(t)/|t| = \infty$.

5. Wykaż, że X ma skończoną funkcję tworzącą momenty na przedziale $(-t_0, t_0)$ wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego $0 < \lambda < t_0$ istnieje stała $C(\lambda)$ taka, że $\mathbf{P}(|X| > t) \leq C(\lambda)e^{-\lambda t}$ dla wszystkich $t > 0$.

6. Załóżmy, że X ma skończoną funkcję tworzącą momenty na przedziale $(-t_0, t_0)$ dla pewnego $t_0 > 0$. Udowodnij, że

- a) X ma wszystkie momenty skończone, tzn. $\mathbf{E}|X|^p < \infty$ dla $p > 0$;
- b) $M_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \mathbf{E}X^k$;
- c) $\mathbf{E}X^k = \frac{d^k}{dx^k} M_X(t)|_{t=0}$;
- d) Jeśli Y zmienna losowa taka, że $M_Y(t) = M_X(t)$ dla t z pewnego otoczenia 0, to $\mu_Y = \mu_X$;
- e) Rozkład X jest wyznaczony przez swoje momenty tzn. jeśli $\mathbf{E}Y^k = \mathbf{E}X^k$ dla wszystkich $k \in \mathbb{Z}_+$, to $\mu_Y = \mu_X$;
- f) Jeśli X_n ciąg zmiennych losowych taki, że $M_{X_n}(t) \rightarrow M_X(t)$ dla $t \in (-t_0, t_0)$ przy $n \rightarrow \infty$, to X_n zbiega do X według rozkładu.

7. Podaj przykład dwu zmiennych losowych takich, że $\mathbf{E}X^k = \mathbf{E}Y^k$ dla wszystkich $k \in \mathbb{Z}_+$ (zakładamy, że $\mathbf{E}|X|^k, \mathbf{E}|Y|^k < \infty$) oraz $\mu_X \neq \mu_Y$.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa III - 6

Niech $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. *Transformatę Fenchela-Legendre'a* funkcji f nazywamy funkcję $\mathcal{L}f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ określoną wzorem

$$\mathcal{L}f(x) := \sup\{xy - f(y) : y \in \mathbb{R}\}.$$

Ogólniej, gdy $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, to definiujemy

$$\mathcal{L}f(x) := \sup\{\langle x, y \rangle - f(y) : y \in \mathbb{R}^d\}.$$

1. Wykaż, że:
 - a) $\mathcal{L}(af)(x) = a\mathcal{L}f(x/a)$ dla $a > 0$;
 - b) $f(x) + \mathcal{L}f(y) \geq xy$ dla $x, y \in \mathbb{R}$;
 - c) $\mathcal{L}f$ jest funkcją wypukłą;
 - d) $\mathcal{L}\mathcal{L}f \leq f$;
 - e) $\mathcal{L}\mathcal{L}f = f$ jeśli $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ wypukła, a jeśli f przyjmuje wartość ∞ , to równość zachodzi poza co najwyżej dwoma punktami;
 - f) $\mathcal{L}\mathcal{L}f$ to maksymalna funkcja wypukła dominowana przez f .
2. Oblicz $\mathcal{L}f$ dla $f = |x|^p$, $1 \leq p \leq \infty$.
3. Wykaż, że jeśli X jest wektorem losowym oraz $M_X(t)$ jest skończone w pewnym otoczeniu punktu t_0 , to M_X jest klasy C^∞ na tym otoczeniu. Oblicz pochodne $\frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial t_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_d}}{\partial t_d^{\alpha_d}} M_X(t_0)$.
4. Załóżmy, że współrzędne wektora $X^{(1)}, \dots, X^{(d)}$ wektora X są niezależne. Wyraż Λ_X (odp. Λ_X^*) za pomocą $\Lambda_{X^{(j)}}$, $1 \leq j \leq d$ (odp. $\Lambda_{X^{(j)}}^*$).
5. Oblicz Λ_X i Λ_X^* , jeśli X jest wektorem gaussowskim ze średnią a i macierzą kowariancji C .

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa III - 7

1. Wykaż, że dla dowolnych miar probabilistycznych ν_1, ν_2, μ na przestrzeni $(E, \mathcal{E})$,
 - i) $H(\theta\mu_1 + (1-\theta)\mu_2|\nu) \leq \theta H(\mu_1|\nu) + (1-\theta)H(\mu_2|\nu)$ dla $\theta \in [0, 1]$,
 - ii) jeśli $\theta \in (0, 1)$ oraz $H(\theta\mu_1 + (1-\theta)\mu_2|\nu) = \theta H(\mu_1|\nu) + (1-\theta)H(\mu_2|\nu)$, to $\mu_1 = \mu_2$.
2. Oblicz
 - i) $H(\text{Bin}(n, p_1)|\text{Bin}(n, p_2))$ dla $p_1, p_2 \in [0, 1]$,
 - ii) $H(\text{Exp}(\lambda_1)|\text{Exp}(\lambda_2))$ dla $\lambda_1, \lambda_2 \in (0, \infty)$.
3. Ustalmy $\lambda, a > 0$. Wykaż, że $\text{Exp}(1/a)$ jest jedynym minimizerem $H(\nu|\text{Exp}(\lambda))$ wśród wszystkich miar probabilistycznych ν na $[0, \infty)$ o średniej a .
4. Udowodnij, że dla dowolnej miary probabilistycznej μ oraz ograniczonej z góry funkcji mierzalnej f na $(E, \mathcal{E})$,

$$\log \mathbf{E}_\mu e^f = \sup_\nu \{ \mathbf{E}_\nu f - H(\nu|\mu) \}$$

5. Niech $\mathcal{A}$ będzie klasą funkcji na przestrzeni metrycznej (E, ρ) , która zawiera wszystkie ograniczone funkcje Lipschitzowskie i jest zamknięta na jednostajnie ograniczoną zbieżność punktową (tzn. jeśli $f_n \in \mathcal{A}$ jest zbieżny punktowo do f i $\sup_n \sup_x |f_n(x)| < \infty$, to $f \in \mathcal{A}$). Wykaż, że $\mathcal{A}$ zawiera wszystkie ograniczone funkcje borelowskie na E .
6. Niech (E, ρ) jest przestrzenią polską.
 - i) Wykaż, że istnieje ciąg $f_k \in C_{\text{ogr}}, k = 1, 2, \dots$ taki, że miary probabilistyczne μ_n zbiegają do miary probabilistycznej μ wtedy i tylko wtedy, gdy $\int_E f_k d\mu_n \rightarrow \int_E f_k d\mu$ dla wszystkich k .
 - ii) Jeśli $(f_k)_{k \geq 1}$ jest jak w i), to metryka

$$d(\mu, \nu) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \min \left\{ 1, \left| \int_E f_k d(\mu - \nu) \right| \right\}$$

metrykuje słabą zbieżność na $\mathcal{M}_1(E)$.

7. Załóżmy, że (E, ρ) jest przestrzenią polską. Wykaż, że wzór

$$d(\mu, \nu) := \inf \{ \varepsilon > 0: \mu(F) \leq \nu(F_\varepsilon) + \varepsilon \text{ dla wszystkich zbiorów domkniętych } F \}$$

określa metrykę na $\mathcal{M}_1(E)$ (metrykę tę nazywa się metryką Prochorowa) oraz zbieżność miar probabilistycznych w tej metryce jest równoważna zbieżności wg rozkładu.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa III - 8

W zadaniach poniżej zmienne $X, X_1, \dots$ mają taki sam rozkład o wartościach w $\mathbb{R}^d$ oraz $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.

1. Załóżmy, że $\mathcal{F}_n$ jest rosnącym ciągiem sigma ciał, $\mathcal{F} = \sigma(\bigcup_{n \geq 1} \mathcal{F}_n)$ oraz μ jest miarą probabilistyczną na $\mathcal{F}$. Udowodnij, że dla dowolnego $A \in \mathcal{F}$ i $\varepsilon > 0$ istnieje n i $A_n \in \mathcal{F}_n$ takie, że $\mu(A \Delta A_n) \leq \varepsilon$.
2. Wykaż mocną własność Markowa dla (S_n) , tzn., że dla każdego τ momentu zatrzymania względem filtracji generowanej przez (X_n) , dowolnego $A \in \mathcal{F}_\tau$ oraz $B \in (\mathcal{B}(\mathbb{R}^d))^\infty$,

$$\mathbf{P}(\{(S_{n+\tau} - S_\tau)_{n \geq 0} \in B\} \cap A \cap \{\tau < \infty\}) = \mathbf{P}(\{(S_n)_{n \geq 0} \in B\})\mathbf{P}(A \cap \{\tau < \infty\}).$$

3. Wykaż, że jeśli błądzenie (S_n) jest powracające, to dla dowolnego $k = 1, 2, \dots$ błądzenie (S_{nk}) jest powracające.
4. Wykaż, że jeśli $\mathbf{P}(X_1 = 0) < 1$, to $|S_n| \rightarrow \infty$ według prawdopodobieństwa.
5. Załóżmy, że $d = 1$, X jest symetryczny, niezdegenerowany oraz ograniczony. Wykaż, że $\limsup \pm S_n = \infty$ p.n. i wywnioskuj stąd, że S_n jest powracalny.
6. Wykaż, że zbiór A punktów osiągalnych przez błądzenie losowe jest równy najmniejszej domkniętej półgrupie zawierającej nośnik X . Podaj przykład pokazujący, że A nie musi być grupą.
7. Niech X będzie jednowymiarowym rozkładem p -stabilnym o funkcji charakterystycznej $e^{-|t|^p}$. Wykaż, że S_n jest powracający dla $p \geq 1$ i chwilowy dla $p < 1$.
8. Załóżmy, że $d = 2$ oraz współrzędne X są niezależnymi zmiennymi losowymi o funkcji charakterystycznej $e^{-|t|^p}$. Wykaż, że S_n jest powracalny dla $p = 2$ i chwilowy dla $p < 2$.
9. Niech (S'_n) oznacza niezależną kopię (S_n) . Wykaż, że jeśli S_n jest powracające, to $S_n - S'_n$ jest powracające.