

Zadania z Analizy Funkcjonalnej I - 1

1. Które z poniższych przestrzeni metrycznych są przestrzeniami unormowanymi?

- i) $X = \mathbb{R}$, $d(x, y) = \arctg|x - y|$;
- ii) $X = \mathbb{R}^n$, $d(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \max_{3 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$;
- iii) $X = C[0, 1]$, $d(f, g) = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x) - g(x)|$;
- iv) $X = C[0, 1]$, $d(f, g) = |f(0) - g(0)|$;
- v) $X = C[0, 1]$, $d(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx$;
- vi) $X = C^1[0, 1]$, $d(f, g) = |f(0) - g(0)| + \sup_x |f'(x) - g'(x)|$.

2. Które z przestrzeni unormowanych z poprzedniego zadania są zupełne?

3. Która z następujących przestrzeni jest przestrzenią Banacha w normie supremum: $C(\mathbb{R})$; $C_{\text{ogr}}(\mathbb{R})$ – przestrzeń funkcji ciągłych ograniczonych; $C_{\text{zw}}(\mathbb{R})$ – przestrzeń funkcji ciągłych o nośniku zwartym; $C_0(\mathbb{R})$ – przestrzeń funkcji ciągłych takich, że $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0$?

4. Wykaż, że $\text{Lip}[0, 1]$ – przestrzeń funkcji lipschitzowskich na $[0, 1]$ z normą

$$\|f\| = |f(0)| + \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|}$$

jest przestrzenią Banacha.

5. Na przestrzeni $X = C^1[0, 1]$ rozpatrzmy następujące normy:

- i) $\|f\|_{\infty}$
- ii) $\|f\|_{\infty} + \|f'\|_{\infty}$
- iii) $|f(0)| + \|f'\|_{\infty}$
- iv) $\|f\|_{\infty} + \sup_{x \in (0, 1)} |xf'(x)|$

Które z tych norm wprowadzają na X strukturę przestrzeni Banacha?

6. Powiemy, że dwie metryki ρ_1 i ρ_2 są równoważne, jeśli definiują takie same topologie (czyli ciągi mają w obu metrykach te same granice). Wykaż, że jeśli istnieją stałe $0 < c < C < \infty$ takie, że

$$\forall_{x, y} \quad c\rho_1(x, y) \leq \rho_2(x, y) \leq C\rho_1(x, y), \tag{1}$$

to metryki są równoważne.

7. Wskaż dwie równoważne metryki, które nie spełniają (1).

8. Mówimy, że dwie normy są równoważne, jeśli metryki przez nie wyznaczone są równoważne. Wykaż, że normy $\|\cdot\|_1$ i $\|\cdot\|_2$ są równoważne wtedy i tylko wtedy gdy istnieją stałe $0 < c < C < \infty$ takie, że $c\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C\|x\|_1$ dla wszystkich x .

9. Wskaż dwie nierównoważne normy na przestrzeni ciągów ograniczonych.

10. Wykaż, że wszystkie normy na $\mathbb{R}^n$ są równoważne.

Zadania z Analizy Funkcjonalnej I - 2

1. Naskicuj kulę jednostkową w następujących przestrzeniach: $\ell_1^2, \ell_2^2, \ell_\infty^2, \ell_p^2, \ell_1^3, \ell_2^3, \ell_\infty^3$.
2. Niech $x = (x_k)_{k=1}^n$. Wykaż, że
 - a) $\|x\|_q \leq \|x\|_p \leq n^{1/p-1/q} \|x\|_q$ dla $1 \leq p < q$.
 - b) $\lim_{p \rightarrow \infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$.
 - c) Czy stałe w a) są optymalne? Jakie zawierania dla kul jednostkowych w ℓ_p^n wynikają z a)?
3. Niech $x = (x_k)_{k=1}^\infty$ oraz $1 \leq p < q$.
 - a) Wykaż, że $\|x\|_q \leq \|x\|_p$
 - b) Znajdź wektor x taki, że $\|x\|_p = \infty$ oraz $\|x\|_q < \infty$.
 - c) Czy zawsze $\lim_{p \rightarrow \infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$? Jeśli nie, to kiedy tak jest?
4. Wykaż, że $\{x = (x_k)_{k=1}^\infty : \sum_{k=1}^\infty |x_k| \leq 1\}$ jest domkniętym wypukłym podzbiorem ℓ_2 o pustym wnętrzu. Czy jest to zbiór zwarty?
5. Niech $(X, \mathcal{F}, \mu)$ będzie przestrzenią z miarą skończoną μ oraz f będzie funkcją mierzalną na X . Udowodnij, że dla $1 \leq p < q$,
 - a) $\|f\|_p \leq \mu(X)^{1/p-1/q} \|f\|_q$, w szczególności $\|f\|_p \leq \|f\|_q$ gdy $\mu(X) = 1$. Kiedy zachodzi równość?
 - b) Wykaż, że $\lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$.
 - c) Znajdź funkcję $f \in L_p[0, 1]$ taką, że $\|f\|_q = \infty$.
 - d) Znajdź funkcję $f \in L_q[0, \infty)$ taką, że $\|f\|_p = \infty$.
6. Niech $(X, \|\cdot\|)$ będzie przestrzenią unormowaną, wykaż, że $f(x) = \|x\|$ jest funkcją ciągłą na X .

Zadania z Analizy Funkcjonalnej I - 3

1. Wykaż, że każda kula w przestrzeni unormowanej jest wypukła.
2. Wykaż, że jeśli zbiór A jest wypukłym podzbiorem przestrzeni unormowanej, to zbiory $\text{cl}(A) = \bar{A}$ i $\text{int}(A)$ też są wypukłe.
3. Dla zbioru A w przestrzeni liniowej X określamy

$$\text{conv}(A) := \bigcap \{B : B \text{ wypukłe}, A \subset B\}.$$

Wykaż, że

a) $\text{conv}(A)$ jest najmniejszym zbiorem wypukłym zawierającym A .

b) $\text{conv}(A) = \{x = \sum_{j=1}^n \lambda_j a_j : a_j \in A, \lambda_j \geq 0, \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, n = 1, 2, \dots\}$.

4. Oblicz normę $\text{id} : \ell_p^n \rightarrow \ell_q^n$ dla $1 \leq p, q \leq \infty$.
5. Określamy $T : \ell_1 \rightarrow c_0$ wzorem $T(x)_n = \sum_{i=n}^{\infty} x_i$. Wykaż, że T jest ciągłe i oblicz jego normę.
6. Znajdź normę przekształcenia $f(x) \rightarrow xf(x)$ z $L_p[-1, 1]$ w $L_1[-1, 1]$, $1 \leq p \leq \infty$.
7. Niech $g \in L_{\infty}(X, \mu)$ wykaż, że przekształcenie T dane wzorem $Tf(x) := g(x)f(x)$ jest ciągłym operatorem na $L_p(X, \mu)$. Ile wynosi jego norma?
8. Wykaż, że $\varphi(f) := \int_0^{1/2} f(x)dx - \int_{1/2}^1 f(x)dx$ jest ciągłym funkcjonałem na $C[0, 1]$ i policz jego normę.
9. Niech $X := \{f \in C[0, 1] : f(t) = 2f(1-t), t \in [0, 1/2]\}$. Czy X z normą supremum jest przestrzenią Banacha? Udowodnij, że następujące funkcjonały są ciągłe na X i policz ich normy:
 - a) $\varphi(f) := f(\frac{1}{4})$,
 - b) $\varphi(f) := f(\frac{3}{4})$,
 - c) $\varphi(f) := \int_0^{1/2} f(x)dx$.
10. Zbadaj ciągłość i oblicz normę przekształcenia $T : L_p[0, 1] \rightarrow L_p[0, 1]$ danego wzorem $Tf(x) = f(\sqrt{x})$.

Zadania z Analizy Funkcjonalnej I - 4

1. Niech $M := \{f \in C[0, 1] : \int_0^{1/2} f(t)dt = \int_{1/2}^1 f(t)dt\}$. Wykaż, że M jest domkniętą podprzestrzenią $C[0, 1]$. Niech $g(t) = t$, oblicz $\text{dist}(g, M)$. Czy istnieje funkcja $f \in M$ taka, że $\text{dist}(g, M) = \|f - g\|$?
2. Niech $M := \{f \in L_1[0, 1] : \int_0^1 f(t)dt = 0\}$. Wykaż, że M jest domkniętą podprzestrzenią $L_1[0, 1]$. Niech $g \equiv 1$, oblicz $\text{dist}(g, M)$. Czy istnieje funkcja $f \in M$ taka, że $\text{dist}(g, M) = \|f - g\|$? Ile jest takich funkcji?
Uwaga. Powyższe dwa zadania pokazują, że w ogólnej przestrzeni Banacha nie musi istnieć funkcja wybijająca odległość wektora od podprzestrzeni, a jak istnieje, to nie musi być jednoznaczna.
3. Niech $M := \{f \in L_2[-1, 1] : f(x) = f(-x)\} \subset L_2[-1, 1]$. Znajdź $M^\perp$ i rzut ortogonalny na M .
4. Niech V_n będzie podprzestrzenią $L_2[0, 1]$ składającą się z funkcji stałych na $[k/n, (k+1)/n]$, $k = 0, \dots, n-1$.
 - a) Znajdź $V_n^\perp$
 - b) Znajdź rzut ortogonalny f na V_n .
 - c) Znajdź odległość $f(t) = t$ w $L_2[0, 1]$ od V_n .
5. Załóżmy że $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ są dwoma σ -ciałami podzbiorów X , a μ miarą na $(X, \mathcal{F})$. Wykaż, że
 - i) $M = L_2(X, \mathcal{G}, \mu)$ jest domkniętą podprzestrzenią $L_2(X, \mathcal{F}, \mu)$.
 - ii) $\int_A P_M f d\mu = \int_A f d\mu$ dla dowolnego $A \in \mathcal{G}$ takiego, że $\mu(A) < \infty$ oraz $f \in L_2(X, \mathcal{F}, \mu)$.
 - iii) P_M jest nieujemny tzn. $P_M f \geq 0$ μ -p.n., jeśli $f \geq 0$ μ -p.n.*Uwaga.* Powyższy rzut w przypadku, gdy μ jest miarą probabilistyczną, to nic innego jak warunkowa wartość oczekiwana - tyle, że zdefiniowana na L_2 , czyli dla zmiennych całkowalnych z kwadratem (nie jest trudno wykazać, że da się ją przedłużyć na całe L_1 - w ten sposób unika się stosowania twierdzenia Radona-Nikodyma dla uzasadnienia istnienia wwo).
6. Wykaż, że dla dowolnego zbioru A w przestrzeni unitarnej H , $(A^\perp)^\perp = \overline{\text{Lin}(A)}$.

Zadania z Analizy Funkcjonalnej I - 5

1. i) Wykaż, że $(e^{2\pi i n t})_{n \in \mathbb{Z}}$ jest układem ortonormalnym w $L_2[0, 1]$.
 ii) Podaj analogiczny układ ortonormalny w $L_2[a, b]$.
2. Załóżmy, że $(u_n)_{n \geq 1}$ jest układem ortonormalnym w przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$. Określmy wektory $(w_n)_{n \geq 1}$ wzorami:

$$w_{2n-1} := \frac{1}{\sqrt{2}}(u_{2n-1} + u_{2n}), \quad w_{2n} := \frac{1}{\sqrt{2}}(u_{2n-1} - u_{2n}), \quad n = 1, 2, \dots$$

Wykaż, że $(w_n)_{n \geq 1}$ jest układem ortonormalnym. Czy jeśli $(u_n)_{n \geq 1}$ jest bazą ortonormalną $\mathcal{H}$, to $(w_n)_{n \geq 1}$ też musi być bazą ortonormalną $\mathcal{H}$?

3. Wykaż, że układ Rademachera $f_n := \text{sgn}(\sin(2^n \pi x))$, $n = 1, 2, \dots$ jest układem ortonormalnym w $L_2[0, 1]$. Czy jest to układ zupełny?
4. Załóżmy, że $X_1, X_2, \dots$ są niezależnymi zmiennymi losowymi, całkowalnymi z kwadratem, o średniej zero. Niech $\mathcal{I}$ oznacza rodzinę skończonych podzbiorów $\{1, 2, \dots\}$. Dla $I \in \mathcal{I}$ określamy

$$Y_I = \prod_{i \in I} X_i, \text{ jeśli } I \neq \emptyset, \quad Y_\emptyset \equiv 1.$$

Wykaż, że $(Y_I)_{I \in \mathcal{I}}$ jest układem ortogonalnym w $L_2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Kiedy ten układ jest ortonormalny?

Wskazówka. Podobny przykład był na wykładzie.

5. Niech M będzie domkniętą podprzestrzenią przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$. Wykaż, że jeśli $(u_\alpha)_{\alpha \in I}$ jest bazą o.n. M , to rzut ortogonalny na M ma postać

$$P_M x = \sum_{\alpha \in I} \langle x, u_\alpha \rangle u_\alpha.$$

6. Niech γ_1 będzie standardową miarą gaussowską na $\mathbb{R}$, tzn. miarą probabilistyczną z gęstością $\varphi(x) = (2\pi)^{-1/2} e^{-|x|^2/2}$. Znajdź ortogonalizację Grama-Schmidta ciągu wektorów $1, x, x^2$ w $L_2(\mathbb{R}, \gamma_1)$.
7. Znajdź odległość funkcji $f(x) = |x|$ od podprzestrzeni złożonej z wielomianów stopnia co najwyżej dwa w $L_2(\mathbb{R}, \gamma_1)$.
8. Znajdź wielomian kwadratowy w minimalizujący $\int_{-1}^1 |x^{10} - w(x)|^2 dx$.
Wskazówka. Przydatne może być zortogonalizowanie ciągu $1, x, x^2$ w $L_2[-1, 1]$.
9. Niech $(f_j(x))_{j \geq 1}$ i $(g_k(y))_{k \geq 1}$ będą układami ortonormalnymi w $L_2(X, \mu_1)$ i $L_2(Y, \mu_2)$ odpowiednio (zakładamy, że μ_i są miarami σ -skończonymi). Udowodnij, że
 - i) układ $(f_j(x)g_k(y))_{j,k \geq 1}$ jest układem ortonormalnym w $L_2(X \times Y, \mu_1 \otimes \mu_2)$;
 - ii) jeśli układy $(f_j)_{j \geq 1}, (g_k)_{k \geq 1}$ są zupełne w $L_2(X)$ i $L_2(Y)$ odpowiednio, to układ $(f_j(x)g_k(y))_{j,k \geq 1}$ jest zupełny w $L_2(X \times Y)$.

Zadania z Analizy Funkcjonalnej I - 6

1. Niech P_n będzie układem wielomianów Legendre'a

$$P_n(t) := \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n, \quad t \in [-1, 1], \quad n \geq 0.$$

- i) Wykaż, że P_n jest układem ortogonalnym w $L_2[-1, 1]$. Jak go trzeba znormalizować by był ortonormalny?
ii) Czy jest to układ zupełny?

2. Niech L_n będzie układem wielomianów Laguerre'a

$$L_n(t) = \frac{1}{n!} e^t \frac{d^n}{dt^n} (t^n e^{-t}), \quad t \geq 0, \quad n \geq 0.$$

Wykaż, że L_n jest układem ortogonalnym w $L_2(\mathbb{R}_+, e^{-t} dt)$. Czy jest on ortonormalny?
Uwaga. Można wykazać, że wielomiany Laguerre'a są układem zupełnym.

3. Niech H_n będzie układem wielomianów Hermite'a

$$H_n(t) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n!}} e^{t^2/2} \frac{d^n}{dt^n} (e^{-t^2/2}).$$

Wykaż, że $(H_n)_{n \geq 0}$ jest układem ortonormalnym w $L_2(\mathbb{R}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt)$.

Uwaga: Można wykazać, że wielomiany Hermite'a są układem zupełnym, czyli bazą o.n. odpowiedniej przestrzeni.

4. Wykaż, że każdą funkcję parzystą f w $L^2[-\pi, \pi]$ da się przedstawić w postaci $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(nt)$, przy czym ciąg jest zbieżny w L_2 . Ile wynosi $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2$?
5. Wykaż, że każdą funkcję nieparzystą f w $L^2[-\pi, \pi]$ da się przedstawić w postaci $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin(nt)$, przy czym ciąg jest zbieżny w L_2 . Ile wynosi $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2$?
6. Niech $r_n := \text{sgn}(\sin(2^n \pi x))$, $n = 1, 2, \dots$ będzie układem Rademachera. oraz $\mathcal{S}$ oznacza rodzinę wszystkich skończonych podzbiorów $\{1, 2, \dots\}$. Zdefiniujmy *układ Walsha* wzorem $w_\emptyset \equiv 1$ oraz $W_A = \prod_{n \in A} r_n$ dla $A \neq \emptyset$. Udowodnij, że $(w_A)_{A \in \mathcal{S}}$ jest bazą o.n. $L_2[0, 1]$.

Zadania z Analizy Funkcjonalnej I - 7

1. Niech μ_1, μ_2, ν będą miarami nieujemnymi na $(X, \mathcal{F})$. Udowodnij, że
 - i) jeśli $\mu_k \ll \nu$ dla $k = 1, 2$, to $a\mu_1 + b\mu_2 \ll \nu$ dla $a, b \geq 0$,
 - ii) jeśli $\mu_k \perp \nu$ dla $k = 1, 2$, to $a\mu_1 + b\mu_2 \perp \nu$ dla $a, b \geq 0$.
2. Niech μ_1, μ_2, μ_3 będą miarami nieujemnymi na $(X, \mathcal{F})$.
 - i) Wykaż, że jeśli $\mu_2 \ll \mu_1$ oraz $\mu_3 \ll \mu_2$, to $\mu_3 \ll \mu_1$.
 - ii) Wykaż, że jeśli istnieją gęstości $\frac{d\mu_2}{d\mu_1}$ i $\frac{d\mu_3}{d\mu_2}$, to istnieje gęstość $\frac{d\mu_3}{d\mu_1}$ i zachodzi $\frac{d\mu_3}{d\mu_1} = \frac{d\mu_3}{d\mu_2} \frac{d\mu_2}{d\mu_1}$ μ_1 -p.w..
3. Wykaż, że dla dowolnej miary ze znakiem (miary zespolonej) μ na $(X, \mathcal{F})$, $|\mu|$ jest miarą nieujemną taką, że $|\mu|(A) \geq |\mu(A)|$. Ponadto $|\mu|$ jest najmniejszą taką miarą.
4. Pokaż, że μ jest miarą skończoną, tzn. $|\mu|(X) < \infty$.
5. Niech μ będzie miarą ze znakiem na $(X, \mathcal{F})$. Wykaż, że istnieje f takie, że $\mu(A) = \int_A f d|\mu|$ dla $A \in \mathcal{F}$. Ponadto $|f| = 1$ μ -p.w. Wywnioskuj stąd, że istnieją zbiory rozłączne $X_+, X_- \in \mathcal{F}$ takie, że $X = X_+ \cup X_-$ oraz $\mu_+(A) = \mu(A \cap X_+)$, $\mu_-(A) = -\mu(A \cap X_-)$ dla $A \in \mathcal{F}$.
Uwaga. Pierwsze dwa stwierdzenia są prawdziwe też dla miar zespolonych.
6. Udowodnij, że przestrzeń $L_2(\mathbb{R}^d)$ jest óśrodkowa i wywnioskuj stąd óśrodkowość przestrzeni $L_2(A)$ dla dowolnego zbioru borelowskiego $A \subset \mathbb{R}^d$. Czy przestrzenie $L_2(A)$ i $L_2(B)$ są izometryczne?
7. Wyznacz $p \in [1, \infty]$ dla których przestrzenie $L_p[0, 1]$ i $L_p(\mathbb{R})$ są óśrodkowe.
8. Dla jakich $p \in [1, \infty]$ przestrzeń ℓ_p jest óśrodkowa?
9. Wykaż, że przestrzeń X jest óśrodkowa wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje przeliczalny podzbiór liniowo gęsty w X .

Zadania z Analizy Funkcjonalnej I - 8

1. Niech γ_1 będzie kanoniczną miarą gaussowską na $\mathbb{R}$, tzn. miarą probabilistyczną z gęstością $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-|x|^2/2}$. Wyznacz wszystkie $a \in \mathbb{R}$ oraz $p \in [1, \infty]$ dla których wzór

$$\varphi(f) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ax^2} f(x) d\gamma_1(x)$$

definiuje ciągły funkcjonal liniowy na $L_p(\gamma_1)$.

2. Załóżmy, że C jest wypukłym, pochłaniającym (tzn. dla każdego x istnieje $\lambda_0 > 0$ takie, że $\lambda x \in C$ dla $0 \leq \lambda \leq \lambda_0$) podzbiorem podprzestrzeni liniowej X . Wykaż, że wówczas funkcjonal Minkowskiego p_C jest funkcjonałem Banacha.
3. Załóżmy, że $p_1, p_2, \dots, p_n$ są funkcjonałami Banacha na X . Wykaż, że funkcjonałami Banacha są też
- i) $\sum_{i=1}^n \lambda_i p_i$ dla $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$,
 - ii) $\max_{1 \leq i \leq n} p_i$.

Wskaż przykład funkcjonału Banacha p takiego, że $-p$ nie jest funkcjonałem Banacha.

4. Wykaż, że jeśli X_0 jest domkniętą podprzestrzenią przestrzeni unormowanej X oraz $x \in X \setminus X_0$ to istnieje funkcjonal $\varphi \in X^*$ zerujący się na X_0 taki, że $\varphi(x) = 1$.
5. Niech F będzie podprzestrzenią przestrzeni Banacha X . Wykaż, że dla $x \in X$,

$$\text{dist}(x, F) = \sup\{|\varphi(x)| : \varphi \in X^*, \|\varphi\| \leq 1, \varphi|_F = 0\}$$

6. a) Niech X będzie przestrzenią Banacha oraz $x \in X$ będzie wektorem o normie 1. Udowodnij, że $\Delta(x) := \{\varphi \in X^* : \varphi(x) = 1 = \|\varphi\|\}$ jest niepustym, domkniętym zbiorem wypukłym w X^* .
- b) Podaj przykłady $x \in \ell_1$ takie, że $\Delta(x)$ jest jednopunktowe, n -wymiarowe, nieskończenie wymiarowe.
- c) Opisz wszystkie $x \in c_0$ takie, że $\Delta(x)$ jest jednopunktowe.

Wskazówka. Z wykładu 7 wiemy, że ℓ_1^* można utożsamiać z ℓ_∞ , a c_0^* z ℓ_1 .

7. Przestrzeń $C[0, 1]$ można traktować jako domkniętą podprzestrzeń $L_\infty[0, 1]$. Funkcjonał $\delta_x(f) := f(x)$ jest ciągłym funkcjonałem o normie 1 na $C[0, 1]$, zatem z twierdzenia Hahna-Banacha można go rozszerzyć do funkcjonału φ_x na $L_\infty[0, 1]$ o normie 1. Wykaż, że nie istnieje funkcja $g \in L_1[0, 1]$ taka, że $\varphi_x(f) = \int_0^1 f(y)g(y)dy$. Udowodnij, że jeśli $f \in L_\infty[0, 1]$ jest taka, że $f = 0$ na zbiorze $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$, to $\varphi_x(f) = 0$.
8. Mówimy, że przestrzeń X się izometrycznie wkłada w przestrzeń Y , jeśli istnieje liniowe przekształcenie $T: X \mapsto Y$ takie, że $\|Tx\| = \|x\|$. Wykaż, że każda ośrodkowa przestrzeń Banacha się wkłada izometrycznie w ℓ_∞ .
9. Wykaż, że ośrodkowość przestrzeni X^* implikuje ośrodkowość przestrzeni X . Czy odwrotna implikacja jest prawdziwa?

Zadania z Analizy Funkcjonalnej I - 9

1. Załóżmy, że $p \in [1, \infty)$ oraz $x = (x_n)_{n \geq 1}$ jest takim ciągiem, że dla każdego $y \in \ell_p$ szereg $\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ jest zbieżny. Wykaż, że $x \in \ell_q$ dla $1/p + 1/q = 1$.
2. Wykaż, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ jest zbieżny dla każdego ciągu y_n zbieżnego do zera wtedy i tylko wtedy gdy $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty$.
Wskazówka. $\ell_1 = c_0^*$.
3. Załóżmy, że $f_n \in L_2[0, 1]$ są takie, że $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(t)g(t)dt = 0$ dla wszystkich funkcji $g \in L_2[0, 1]$. Wykaż, że $\sup_n \|f_n\|_2 < \infty$. Czy musi zachodzić $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_2 = 0$?
4. Wykaż, że w przestrzeni skończonego wymiaru zbieżność w normie i słaba są równoważne.
5. Wykaż, że ciąg wektorów $x_n = (x_{n,k})_{k=1}^{\infty}$ zbiega słabo do zera w ℓ_p , $1 < p < \infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\sup_n \|x_n\|_p < \infty$ oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n,k} = 0$ dla wszystkich k . Czy charakterystyka ta jest prawdziwa dla ℓ_1 ? A dla c_0 (normę $\|x_n\|_p$ należy wtedy zastąpić $\|x_n\|_{c_0} = \|x_n\|_{\infty}$)?
6. Wykaż, że jeśli $1 < p < \infty$ oraz $f_n \in L_p[0, 1]$ są takie, że $\|f_n\|_p \leq 1$ i $\lambda_1(\{x : f_n(x) \neq 0\}) \rightarrow 0$ (gdzie λ_1 oznacza miarę Lebesgue'a), to f_n zbiegają słabo do zera. Czy jest to prawdą dla $p = 1$?
7. Wykaż, że ciąg funkcji Rademachera $r_k := \text{sgn}(\sin 2^k \pi x)$ jest słabo zbieżny do zera w $L_p[0, 1]$ dla $1 \leq p < \infty$.
8. Niech $(x_k)_{k \geq 1}$ będzie układem o.n. w przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$, a $(a_k)_{k \geq 1}$ ciągiem skalarów. Wykaż, że $a_k x_k$ zbiega słabo do zera wtedy i tylko wtedy, gdy a_k jest ciągiem ograniczonym.

Zadania z Analizy Funkcjonalnej I - 10

1. Niech X będzie przestrzenią Banacha. Wykaż, że przekształcenie liniowe $T: X \rightarrow C[0, 1]$ jest ciągłe wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $t \in [0, 1]$, $x \rightarrow Tx(t)$ jest ciągłym funkcjonałem na X .
2. Załóżmy, że T jest operatorem liniowym między przestrzeniami Banacha X i Y . Wykaż, że T jest ciągły wtedy i tylko wtedy gdy dla dowolnego $y^* \in Y^*$, $y^*(T)$ jest ciągłym funkcjonałem na X .
3. Niech Y i Z będą dwoma domkniętymi podprzestrzeniami przestrzeni Banacha X takimi, że dla dowolnego $x \in X$ istnieje dokładnie jedna para wektorów $(y, z) = (P_1x, P_2x) \in Y \times Z$ taka, że $x = y + z$. Wykaż, że P_1 jest ciągłym rzutem X na Y .
4. Załóżmy, że X , Y i Z są przestrzeniami Banacha, zaś $B: X \rightarrow Z$ oraz $C: Y \rightarrow Z$ są ciągłymi operatorami liniowymi. Wykaż, że jeśli dla każdego $x \in X$ istnieje dokładnie jeden element $y = Ax$ taki, że $Bx = Cy$, to A jest ciągłym operatorem z X w Y .
5. Niech $(e_n)_{n \geq 0}$ będzie kanoniczną bazą ℓ_p , $1 \leq p < \infty$. Wykaż, że operator liniowy $T: \ell_p \rightarrow \ell_p$ taki, że $Te_n = a_n e_n$ jest zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.
6. Czy operator „przesunięcia w lewo” $(x_1, x_2, \dots) \rightarrow (x_2, x_3, \dots)$ jest zwartym przekształceniem z ℓ_p w ℓ_p ?
7. Niech $T: L_2[0, 1] \rightarrow L_2[0, 1]$ będzie dany wzorem $Tf(x) = \int_0^x f(y)dy$. Czy jest to operator zwarty?
8. Określmy $T: L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R})$ jako $Tf(x) = \int_x^{x+1} f(y)dy$. Wykaż, że T jest ciągły. Czy T jest zwarty?

Zadania z Analizy Funkcjonalnej I - 11

1. Niech $T: \ell_p \rightarrow \ell_p$, $1 \leq p < \infty$ będzie dany wzorem $T(x_1, x_2, \dots) = (\frac{1}{2}x_2, \frac{1}{3}x_3, \frac{1}{4}x_4, \dots)$. Jak wygląda T^* ?
2. Niech $T: L_1[0, 1] \rightarrow L_p[0, 1]$, $1 \leq p < \infty$ będzie określony jako $Tf(x) := \int_0^x f(y)dy$. Znajdź T^* .
3. Niech $T: L_p[0, 1] \rightarrow L_p[0, 1]$, $1 \leq p < \infty$ będzie określony wzorem

$$Tf(x) := \int_0^1 k(x, y)f(y)dy$$

dla pewnej funkcji ograniczonej mierzalnej k . Znajdź T^* .

4. Określmy $T: \ell_1 \rightarrow c_0$ jako

$$T((x_n)_{n \geq 1}) := \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \right)_{n \geq 1}.$$

Znajdź T^* .

5. Operator $T: L_2[0, 1] \rightarrow \ell_1$ jest dany wzorem

$$Tf = \left(\int_{2^{-n}}^{2^{-n+1}} f(x)dx \right)_{n \geq 1}.$$

Znajdź T^* .

6. Wykaż, że przestrzeń Banacha X jest refleksywna wtedy i tylko wtedy, gdy przestrzeń X^* jest refleksywna.
7. Które z następujących przestrzeni są refleksywne: ℓ_p , $L_p[0, 1]$, c_0 , $C[0, 1]$?
8. Wykaż, że c_0 wkłada się izometrycznie w $C[0, 1]$, a ℓ_∞ w $C_{\text{ogr}}(0, 1)$.
9. Wykaż, że operator $T: X \rightarrow Y$ jest izomorficznym włożeniem wtedy i tylko wtedy, gdy $T^*: Y^* \rightarrow X^*$ jest „na”.
10. Wykaż, że operator $T: X \rightarrow Y$ jest „na” wtedy i tylko wtedy, gdy $T^*: Y^* \rightarrow X^*$ jest izomorficznym włożeniem.

Zadania z Analizy Funkcjonalnej I - 12

1. Niech $Tx = (0, x_1, x_2/2, x_3/3, \dots)$. Wykaż, że T jest zwartym operatorem na ℓ_2 nie posiadającym wartości własnych. Wyznacz operator T^* i znajdź jego wartości własne.
2. Niech T na ℓ_2 będzie zadany wzorem $Tx = (a_n x_n)_{n \geq 1}$ dla pewnego ciągu ograniczonego $(a_n)_{n \geq 1}$. Znajdź wszystkie wartości własne i spektrum operatora T . Wyznacz rezolwentę T .
3. Załóżmy, że μ jest miarą σ -skończoną, a $T: L_2(X, \mu) \rightarrow L_2(X, \mu)$ jest postaci $Tf = gf$ dla pewnego $g \in L_\infty(X, \mu)$. Wyznacz wartości własne, widmo i rezolwentę T .
4. Rozważmy operator $T: C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$ określony wzorem $Tf = gf$, gdzie g jest ustaloną funkcją z $C[0, 1]$. Wykaż, że T jest dobrze określony, ciągły oraz wyznacz wartości własne i widmo T .
5. Wykaż, że dla dowolnego niepustego, zwartego podzbioru K płaszczyzny zespolonej istnieje operator T na ℓ_2 , którego spektrum jest równe K .
6. Wykaż, że jeśli $\lambda \in \sigma(T)$, to $\lambda^n \in \sigma(T^n)$ dla $n = 1, 2, \dots$
7. Wyznacz spektrum i rezolwentę operatora przesunięcia w lewo i w prawo na ℓ_2 .

Zadania z Analizy Funkcjonalnej I - 13

1. Niech P_M będzie rzutem ortogonalnym na domkniętą podprzestrzeń M przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$. Wyznacz widmo P_M .
2. Podaj przykład operatora liniowego ciągłego T na przestrzeni Hilberta który nie jest unitarny, ale zachodzi warunek
 - i) $TT^* = \text{Id}$,
 - ii) $T^*T = \text{Id}$,
 - iii) $\|Tx\| = \|x\|$ dla wszystkich x .Czy takie operatory istnieją w przestrzeni skończonego wymiaru?
3. Niech $T: L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R})$ będzie postaci $Tf = gf$ dla pewnej funkcji $g \in L_\infty(\mathbb{R})$ o wartościach zespolonych. Znajdź sprzężenie Hilbertowskie T^* . Dla jakich g
 - i) T jest samosprzężony,
 - ii) T jest unitarny,
 - iii) T jest normalny?
4. Niech $T: \ell_2 \rightarrow \ell_2$ będzie dany wzorem $T(x_n)_{n \geq 1} = (y_n x_n)_{n \geq 1}$ dla pewnego ograniczonego ciągu $y = (y_n)_{n \geq 1}$ o wartościach zespolonych. Znajdź sprzężenie Hilbertowskie T^* . Dla jakich y
 - a) T jest samosprzężony,
 - b) T jest unitarny,
 - c) T jest normalny?
5. Operator $T: L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R})$ jest dany wzorem $Tf(x) = \text{sgn}(x)f(x+1)$. Znajdź sprzężenie Hilbertowskie T^* . Czy T jest samosprzężony, unitarny, normalny?
6. Załóżmy, że operatory T_n na przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$ są samosprzężone oraz zbiegają w normie operatorowej do T . Wykaż, że T jest samosprzężony. Czy granica operatorów unitarnych musi być unitarna? A operatorów normalnych?

Zadania z Analizy Funkcjonalnej I - 14 (transformata Fouriera)

Dla $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ określamy *transformatę Fouriera* f , $\mathcal{F}f = \widehat{f}$ wzorem

$$\mathcal{F}f(x) = \widehat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-i\langle x, y \rangle} dy.$$

Będziemy też używać, znanej z analizy, definicji *splotu* funkcji f i g z $L_1(\mathbb{R}^n)$,

$$f * g(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y) g(y) dy.$$

Uwaga. W literaturze można spotkać też inaczej przeskalowaną transformatę Fouriera w powyższej notacji równą $\mathcal{F}f(2\pi x)$ lub $(2\pi)^{-n/2} \mathcal{F}f(x)$.

1. Oblicz transformatę Fouriera funkcji $\mathbb{1}_{[a,b]}$, $a < b$, e^{-cx^2} , $e^{-c|x|}$, $c > 0$.
2. Wykaż, że jeśli $f_1, \dots, f_n \in L_1(\mathbb{R})$, to $f(x_1, \dots, x_n) := f_1(x_1) f_2(x_2) \cdots f_n(x_n) \in L_1(\mathbb{R}^n)$ oraz $\widehat{f}(x_1, \dots, x_n) = \widehat{f_1}(x_1) \widehat{f_2}(x_2) \cdots \widehat{f_n}(x_n)$.
3. Udowodnij, że jeśli $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$, to $\widehat{f}$ jest funkcją jednostajnie ciągłą, $\|\widehat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$ oraz $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \widehat{f}(x) = 0$.
4. Wykaż, że jeśli $f, g \in L_1(\mathbb{R}^n)$, to splot $f * g$ jest dobrze określony dla p.w. $x \in \mathbb{R}^n$, należy do $L_1(\mathbb{R}^n)$, $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$ i $\widehat{f * g} = \widehat{f} \widehat{g}$.
5. Wykaż tożsamość Parsewala dla transformaty Fouriera – dla $f_1, f_2 \in L_1(\mathbb{R}^n)$ zachodzi

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f_1}(x) f_2(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f_1(x) \widehat{f_2}(x) dx.$$

Równoważnie

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f_1}(x) \overline{\widehat{f_2}(x)} dx = \int_{\mathbb{R}^n} f_1(x) \overline{\widehat{f_2}(-x)} dx.$$

6. Załóżmy, że $f \in L_1(\mathbb{R}^n) \cap L_2(\mathbb{R}^n)$, Pokaż, że wówczas

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{f}(y)|^2 dy = (2\pi)^n \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 dx.$$

Wywnioskuj stąd, że $\mathcal{F}f(x)$ można przedłużyć do operatora ciągłego na $L_2(\mathbb{R}^n)$ takiego, że $(2\pi)^{-n/2} \mathcal{F}$ jest izometrią.

7. Wykaż, że $\widetilde{\mathcal{F}} = (2\pi)^{-n/2} \mathcal{F}$ jest operatorem unitarnym na $L_2(\mathbb{R}^n)$. Wywnioskuj stąd, że dla $f \in L_2(\mathbb{R}^n)$ mamy $\mathcal{F}\mathcal{F}f(x) = (2\pi)^n f(-x)$ (równoważnie $f(x) = (2\pi)^{-n} \mathcal{F}\mathcal{F}f(-x)$).
8. Udowodnij, że dla dowolnego multiindeksu α ,
 - i) jeśli $x^\beta f(x) \in L_1(\mathbb{R}^n)$ dla $0 \leq \beta \leq \alpha$, to $D^\alpha \widehat{f}$ istnieje oraz $D^\alpha \widehat{f} = ((-ix)^\alpha f)^\wedge$,
 - ii) jeśli dla $0 \leq \beta \leq \alpha$, $D^\beta f \in L_1(\mathbb{R}^n)$, to $\widehat{D^\alpha f} = (ix)^\alpha \widehat{f}$.

Uwaga. Stosujemy notację $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$, $x \in \mathbb{C}^n$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$.