

12 Wykład 12 online - Operator sprzężony

Jedną z kluczowych metod w teorii przestrzeni Banacha jest dualność. Jak już wiemy z każdą przestrzenią Banacha X możemy powiązać przestrzeń do niej sprzężoną (dualną) X^* , tzn. przestrzeń ciągłych funkcjonałów liniowych na X . Okazuje się, że pojęcie dualności można przenieść na operatory liniowe – każdemu operatorowi liniowemu T między przestrzeniami X i Y możemy przyporządkować operator sprzężony (dualny) T^* działający między Y^* a X^* . Celem dzisiejszego wykładu jest przedstawienie definicji T^* oraz omówienie podstawowych związków między T a T^* .

12.1 Definicja i przykłady

Definicja 12.1. Niech X i Y będą przestrzeniami Banacha, a $T: X \rightarrow Y$ ciągłym operatorem liniowym. Definiujemy *operator sprzężony* $T^*: Y^* \rightarrow X^*$ wzorem $T^*\varphi := \varphi \circ T$ dla $\varphi \in Y^*$.

Definicja jest nieco abstrakcyjna. W przypadku przestrzeni skończenie wymiarowych, jak wiadomo z algebry liniowej, każdy operator liniowy to mnożenie przez pewną macierz. Okazuje się, że wtedy (przy naturalnej reprezentacji przestrzeni sprzężonej) operator sprzężony, to mnożenie przez macierz transponowaną, co pokazuje kolejny przykład.

Przykład 1. Załóżmy, że $X = (\mathbb{F}^n, \|\cdot\|_X)$, $Y = (\mathbb{F}^m, \|\cdot\|_Y)$ oraz $T: X \rightarrow Y$ jest liniowy, wtedy $Tx = Ax$ dla $x \in \mathbb{F}^n$, gdzie A jest macierzą $m \times n$. Wszystkie funkcjonały liniowe na X i Y są ciągłe (bo topologie są równoważne euklidesowym), zatem X^* można utożsamić z $\mathbb{F}^n$ a Y^* z $\mathbb{F}^m$ w naturalny sposób, tzn. np. dla $\varphi, y \in \mathbb{F}^m$, $\varphi(y) = \sum_{k=1}^m \varphi_k y_k$. Wtedy dla $\varphi \in Y^* = \mathbb{F}^m$,

$$T^*\varphi(x) = \varphi(Tx) = \sum_{k=1}^m \varphi_k (Tx)_k = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n \varphi_k a_{kl} x_l = \sum_{l=1}^n x_l \sum_{k=1}^m \varphi_k a_{kl} = \sum_{l=1}^n x_l (A^T \varphi)_l,$$

czyli $T^*\varphi = A^T \varphi$ (zauważmy, że w przypadku $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ macierz T^* to A^T nie A^* !).

Podamy teraz dwa proste przykłady nieskończenie wymiarowe znajdowania operatora sprzężonego. Więcej przykładów omówimy na ćwiczeniach.

Przykład 2. Rozpatrzmy operator „przesunięcia w lewo” na ℓ_p , $1 \leq p < \infty$ zadany wzorem $L(x_1, x_2, \dots) = (x_2, x_3, \dots)$. Wówczas L^* jest operatorem na ℓ_q , $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$, i zauważmy, że dla $y \in \ell_q$ i $x \in \ell_p$ mamy

$$L^*y(x) = y(Lx) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n x_{n+1} = 0x_1 + \sum_{n=2}^{\infty} y_{n-1} x_n = Ry(x),$$

gdzie $R(y_1, y_2, \dots) = (0, y_1, y_2, \dots)$. Zatem $L^* = R$, gdzie R jest operatorem „przesunięcia w prawo” na ℓ_q . Podobnie możemy udowodnić, że operatorem sprzężonym do R na ℓ_p jest L na ℓ_q .

Przykład 3. Rozpatrzmy $T: \ell_1 \rightarrow c_0$ dany wzorem $Tx = (\sum_{k=n}^{\infty} x_k)_{n \geq 1}$. Wówczas przy utożsamieniu ℓ_1^* z ℓ_∞ i c_0^* z ℓ_1 mamy $T^*: \ell_1 \rightarrow \ell_\infty$ oraz dla $y \in \ell_1$ i $x \in c_0$,

$$T^*y(x) = y(Tx) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n(Tx)_n = \sum_{n=1}^{\infty} y_n \sum_{k=n}^{\infty} x_k = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \sum_{n=1}^k y_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \sum_{k=1}^n y_k,$$

zatem $T^*y = (\sum_{k=1}^n y_k)_{n \geq 1}$.

12.2 Podstawowe własności

Zacznijmy od twierdzenia pokazującego, że operator T^* jest ciągły i ma tę samą normę operatorową co T .

Twierdzenie 12.2. *Jeśli $T \in B(X, Y)$, to $T^* \in B(Y^*, X^*)$ oraz $\|T^*\| = \|T\|$.*

Dowód. Złożenie przekształceń liniowych i ciągłych jest ciągłe, zatem $T^*\varphi \in X^*$ dla $\varphi \in Y^*$. Liniowość T^* jest oczywista, ponadto

$$\|T^*\| = \sup_{\|\varphi\| \leq 1} \|T^*\varphi\| = \sup_{\|\varphi\| \leq 1} \sup_{\|x\| \leq 1} |\varphi(Tx)| = \sup_{\|x\| \leq 1} \sup_{\|\varphi\| \leq 1} |\varphi(Tx)| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| = \|T\|,$$

gdzie przedostatnia równość wynika z Wniosku 8.8 z twierdzenia Hahna-Banacha. Powyższy rachunek pokazuje w szczególności, że T^* jest ograniczony, a zatem ciągły. $\square$

Oczywiście $(\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2)^* = \lambda_1 T_1^* + \lambda_2 T_2^*$ dla $T_1, T_2 \in B(X, Y)$ i $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{F}$. Łatwo też sprawdzić, że $(\text{Id}_X)^* = \text{Id}_{X^*}$. Kolejny fakt pokazuje jak wygląda sprzężenie złożenia operatorów liniowych.

Fakt 12.3. *Jeśli $T \in B(X, Y)$ i $S \in B(Y, Z)$, to $ST \in B(X, Z)$ i $(ST)^* = T^*S^* \in B(Z^*, X^*)$. W szczególności, jeśli T jest izomorfizmem, to T^* jest izomorfizmem i $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.*

Dowód. Mamy dla dowolnego $\varphi \in Z^*$,

$$(ST)^*\varphi = \varphi \circ S \circ T = T^*\varphi \circ S = T^*S^*\varphi,$$

czyli istotnie $(ST)^* = T^*S^*$. Jeśli T jest odwracalny to $T^{-1} \in B(Y, X)$ zatem $\text{Id}_{X^*} = (\text{Id}_X)^* = (T^{-1}T)^* = T^*(T^{-1})^*$ oraz $\text{Id}_{Y^*} = (\text{Id}_Y)^* = (TT^{-1})^* = (T^{-1})^*T^*$. Te dwie równości pokazują, że T^* jest odwracalny i $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$. $\square$

12.3 Podwójne sprzężenie, refleksywność

Widzieliśmy już jak określić sprzężenie przestrzeni i operatora. Ale przestrzeń sprzężona X^* to przestrzeń Banacha, a operator sprzężony T^* to operator między przestrzeniami Banacha, więc możemy określić ich sprzężenia $X^{**} = (X^*)^*$ i $T^{**} = (T^*)^*$. Na pozór wydają się to bardzo skomplikowane obiekty, ale okazuje się, że często tak nie jest. Zaczniemy od analizy X^{**} .

Widzieliśmy wcześniej, że dla $1 < p < \infty$, $L_p^* = L_q$ i $L_q^* = L_p$, gdzie $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, zatem wtedy $L_p^{**} = L_p$ dla $p \in (1, \infty)$. Dla $p = 1$, $L_1^* = L_\infty$ oraz L_1 jest właściwą podprzestrzenią L_∞^* . Ponadto $c_0^* = \ell_1$ i $\ell_1^* = \ell_\infty \supsetneq c_0$. Okazuje się, że zawsze X można traktować jako podprzestrzeń X^{**} . By sprecyzować tę obserwację potrzebujemy następującej definicji.

Definicja 12.4. Przez X^{**} będziemy oznaczać $(X^*)^*$, czyli przestrzeń dualną do X^* . Dla $x \in X$ możemy określić element $i(x) \in X^{**}$ wzorem $i(x)(\varphi) = \varphi(x)$ dla $\varphi \in X^*$.

Fakt 12.5. Zdefiniowane powyżej przekształcenie $i: X \rightarrow X^{**}$ jest liniową izometrią dla dowolnej przestrzeni unormowanej X .

Dowód. Liniowość jest oczywista. Zauważmy, że

$$\|i(x)\|_{X^{**}} = \sup_{\|\varphi\|_{X^*} \leq 1} |i(x)(\varphi)| = \sup_{\|\varphi\|_{X^*} \leq 1} |\varphi(x)| = \|x\|,$$

gdzie ostatnia równość wynika z Wniosku 8.8 z twierdzenia Hahna-Banacha. $\square$

Definicja 12.6. Przestrzeń Banacha taką, że $i(X) = X^{**}$ nazywamy przestrzenią refleksywną.

Przykłady. Przestrzenie skończonego wymiaru, przestrzenie Hilberta, przestrzenie L_p , $1 < p < \infty$ są refleksywne. Przestrzeń dualna do przestrzeni refleksywnej jest refleksywna. Przestrzenie $c_0, \ell_1, \ell_\infty, L_1[0, 1], L_\infty[0, 1], C[0, 1]$ nie są refleksywne.

Przejdźmy do analizy drugiego sprzężenia operatora. Jeśli $T \in B(X, Y)$, to $T^* \in B(Y^*, X^*)$ oraz $T^{**} := (T^*)^* = B(X^{**}, Y^{**})$. Zauważmy, że w przypadku skończonego wymiaru, jeśli $T \in B(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ jest zadany przez macierz A , to $T^* \in B(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ jest zadany przez A^T , a $T^{**} \in B(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ przez $(A^T)^T = A$, czyli $T^{**} = T$. Dla przestrzeni nieskończonego wymiaru jak widzieliśmy X można traktować jako podprzestrzeń X^{**} . Następny fakt mówi, że operator T^{**} obcięty do X pokrywa się z T . W szczególności dla przestrzeni refleksywnych, podobnie jak dla przestrzeni skończonego wymiaru, $T^{**} = T$.

Fakt 12.7. Załóżmy, że i_X i i_Y są naturalnymi włożeniami X w X^{**} i Y w Y^{**} . Wtedy dla dowolnego $T \in B(X, Y)$, $T^{**}(i_X(x)) = i_Y(Tx)$.

Dowód. Mamy dla $\varphi \in Y^*$ oraz $x \in X$,

$$T^{**}(i_X(x))(\varphi) = i_X(x) \circ T^*(\varphi) = T^*(\varphi)(x) = \varphi(Tx) = i_Y(Tx)(\varphi),$$

gdzie kolejno korzystamy z definicji $T^{**} = (T^*)^*$, i_X , T^* oraz i_Y . $\square$

12.4 Twierdzenie Schaudera o zwartości operatora sprzężonego.

Kolejny ważny wynik, pochodzący od polskiego matematyka Juliusza Schaudera, mówi, że sprzężenie zachowuje zwartość operatora.

Twierdzenie 12.8 (Schauder). *Operator $T \in B(X, Y)$ jest zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy operator $T^* \in B(Y^*, X^*)$ jest zwarty.*

Dowód. „ $\Rightarrow$ ”. Załóżmy, że T jest zwarty, niech φ_n będzie ciągiem funkcyjonałów z B_{Y^*} , by wykazać zwartość T^* należy pokazać, że $T^*\varphi_{n_k}$ jest zbieżny w X^* dla pewnego podciągu (n_k) . Zbiór $K = \overline{T(B_X)} \subset Y$ jest zbiorem zwartym, metrycznym (w metryce indukowanej przez normę Y). Określmy funkcje F_n na K wzorem

$$F_n := (\varphi_n)|_K : K \rightarrow \mathbb{F}.$$

Funkcje F_n są oczywiście ciągłe, ponadto jeśli $y_1, y_2 \in K$, $\|y_1 - y_2\| \leq \varepsilon$, to

$$|F_n(y_1) - F_n(y_2)| \leq \|\varphi_n\| \|y_1 - y_2\| \leq \|y_1 - y_2\| \leq \varepsilon,$$

czyli (F_n) jest równociągłym ciągiem funkcji z $C(K)$. Zauważmy też, że

$$\sup_n |F_n(y)| \leq \sup_n \|\varphi_n\| \|y\| \leq \|y\| \quad \text{dla } y \in K,$$

czyli ciąg (F_n) jest punktowo ograniczony. Zatem z twierdzenia Arzeli-Ascolego wynika, że ciąg F_n ma podciąg F_{n_k} jednostajnie zbieżny. Zauważmy jednak, że

$$\begin{aligned} \|F_{n_k} - F_{n_l}\|_\infty &= \sup_{y \in K} |\varphi_{n_k}(y) - \varphi_{n_l}(y)| \geq \sup_{x \in B_X} |\varphi_{n_k}(Tx) - \varphi_{n_l}(Tx)| \\ &= \sup_{x \in B_X} |T^*\varphi_{n_k}(x) - T^*\varphi_{n_l}(x)| = \|T^*\varphi_{n_k} - T^*\varphi_{n_l}\|. \end{aligned}$$

Stąd wynika, że $(T^*\varphi_{n_k})$ jest ciągiem Cauchy’ego w X^* , czyli jest zbieżny.

„ $\Leftarrow$ ”. Jeśli T^* jest zwarty, to z udowodnionej już implikacji wynika, że $T^{**} = (T^*)^*$ jest zwarty. Ale $T = i_Y^{-1} \circ T^{**} \circ i_X$ na podstawie Faktu 12.7, czyli jest zwarty jako złożenie operatora zwartego i dwóch izometrii. $\square$

12.5 Jaka własność T^* odpowiada za surjektywność T ?

Z poprzednich wyników słuchacz mógł błędnie wywnioskować, że jeśli operator T ma jakąś własność, to operator T^* też ma podobną własność. Dla pewnych własności tak jest (np. pokazaliśmy, że sprzężenie zachowuje zwartość czy odwracalność T), ale dla innych nie, np. łatwo widzieć, że sprzężenie nie zachowuje ani różnowartościowości ani surjektywności. Łatwo to zauważyć w przypadku skończenia wymiarowym – jeśli mamy operator liniowy T z $\mathbb{F}^n$ w $\mathbb{F}^m$ i powiedzmy $n \geq m$, to T jest „na” wtedy i tylko wtedy, gdy T ma rząd m . Operator T^* z $\mathbb{F}^m$ w $\mathbb{F}^n$ oczywiście nie może być surjekcją, jeśli $n > m$, ale ma ten sam rząd

co T , czyli jeśli T jest surjekcją, to T^* ma rząd m (bo transpozycja macierzy zachowuje jej rząd), co oznacza, że T^* jest różnowartościowy. Podobnie jeśli $n \leq m$ i T jest różnowartościowy, to T^* jest „na”. Można więc zaryzykować stwierdzenie, że surjektywność T jest równoważna z różnowartościowością T^* – jednak w przypadku nieskończonego wymiaru nie jest to do końca prawdą, trzeba bowiem nieco wzmocnić pojęcie różnowartościowości.

Definicja 12.9. Mówimy, że ciągły operator liniowy T między przestrzeniami Banacha X i Y jest izomorficznym włożeniem, jeśli T jest izomorfizmem X na $T(X)$, tzn. istnieje stała $c > 0$ taka, że $\|Tx\| \geq c\|x\|$ dla $x \in X$.

Uwaga 12.10. Można udowodnić, że $T \in B(X, Y)$ jest izomorficznym włożeniem wtedy i tylko wtedy, gdy T jest różnowartościowy i $T(X)$ jest domknięte.

Twierdzenie 12.11. Załóżmy, że T jest ciągłym operatorem liniowym między przestrzeniami Banacha X i Y . Wówczas

- i) T jest izomorficznym włożeniem wtedy i tylko wtedy, gdy T^* jest „na”,
- ii) T jest „na” wtedy i tylko wtedy, gdy T^* jest izomorficznym włożeniem.

Dowód omówimy na ćwiczeniach.