

11 Wykład 11 online - Operatory zwarte

Jak wiemy z analizy i topologii przestrzenie zwarte mają szereg ważnych własności (np. funkcje ciągłe na zbiorach zwartych są ograniczone i przyjmują swoje kresy) i odgrywają podstawową rolę w wielu rozumowaniach (bo np. w zwartych przestrzeniach metrycznych każdy ciąg zawiera podciąg zbieżny). Jak wiemy podzbiór $\mathbb{R}^n$, bądź $\mathbb{C}^n$ jest zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy jest domknięty i ograniczony. W nieskończone wymiarowych przestrzeniach Banacha jest to nieprawda – oczywiście każdy zbiór zwarty K w przestrzeni unormowanej X musi być domknięty i ograniczony, tzn. $\sup_{x \in K} \|x\| < \infty$ (bo norma jest funkcją ciągłą), jednak przeciwna implikacja jest fałszywa, jak pokazuje poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 11.1. *Jednostkowa kula domknięta w przestrzeni unormowanej X jest zwarta wtedy i tylko wtedy, gdy X jest skończenie wymiarowe.*

Dowód. „ $\Leftarrow$ ”. W przestrzeniach skończonego wymiaru wszystkie normy są równoważne, więc domknięta kula jednostkowa jest zbiorem domkniętym i ograniczonym w $\mathbb{F}^n$, a zatem i zwartym (w metryce euklidesowej, a więc z równoważności również w metryce indukowanej przez inną normę).

„ $\Rightarrow$ ”. Załóżmy, że $\dim(X) = \infty$, wykażemy, że kula jednostkowa nie jest zwarta. W tym celu skonstruujemy indukcyjnie ciąg $(x_n)_{n \geq 1}$ wektorów z kuli jednostkowej taki, że $\|x_i - x_j\| \geq 1/2$ dla $i \neq j$ (oczywiście taki ciąg nie ma podciągu zbieżnego). Za x_1 przyjmujemy dowolny wektor o normie nie większej niż 1. Jeśli mamy skonstruowane $x_1, \dots, x_n$, to przestrzeń $F = \text{Lin}\{x_1, \dots, x_n\}$ jest domkniętą (bo każda podprzestrzeń skończonego wymiarowa jest zupełna, czyli domkniętą) podprzestrzenią X i oczywiście $F \neq X$. Zatem (np. z twierdzenia Mazura o oddzielaniu) istnieje niezerowy funkcjonal φ zerujący się na F . Wybierzmy wektor x_{n+1} taki, że $\|x_{n+1}\| \leq 1$ i $|\varphi(x_{n+1})| > \frac{1}{2}\|\varphi\|$. Wówczas dla $i < n+1$, mamy $\varphi(x_i) = 0$, zatem

$$\|\varphi\| \|x_{n+1} - x_i\| \leq |\varphi(x_{n+1}) - \varphi(x_i)| = |\varphi(x_{n+1})| > \frac{1}{2}\|\varphi\|.$$

Wynika stąd, że $\|x_{n+1} - x_i\| > 1/2$ dla $1 \leq i < n+1$, co pokazuje, że skonstruowany ciąg ma postulowaną własność separowalności gwarantującą brak podciągu zbieżnego. $\square$

Mimo, że domknięte zbiory ograniczone w przestrzeniach Banacha nie muszą być zwarte, to argumenty zwartościowe są często wykorzystywane w analizie funkcjonalnej. Dzieje się tak, bo wiele operatorów ma własność przekształcania kul domkniętych na zbiory prezwarte (tzn. zwarte po domknięciu). Operatory takie będziemy nazywać zwartymi.

Definicja 11.2. Załóżmy, że T jest operatorem liniowym między przestrzeniami Banacha X i Y . Mówimy, że T jest *zwarty*, jeśli $\overline{T(B_X)}$ jest zwartym podzbiorem Y . Przestrzeń operatorów zwartych między X i Y będziemy oznaczać przez $K(X, Y)$, będziemy też pisać $K(X)$ zamiast $K(X, X)$.

Fakt 11.3. i) Każdy operator zwarty jest ciągły.

ii) Operator liniowy $T: X \rightarrow Y$ jest zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy z każdego ciągu ograniczonego (x_n) w X można wybrać podciąg (x_{n_k}) taki, że Tx_{n_k} jest zbieżny.

Dowód. i) Każdy zbiór zwarty jest ograniczony, zatem $T(B_X) \subset MB_Y$ dla pewnego $M < \infty$, ale to oznacza, że $\|T\| \leq M < \infty$, czyli T jest ciągły.

ii) Jeśli ciąg (x_n) jest ograniczony, to $x_n \in MB_X$ dla pewnego $M < \infty$, stąd (Tx_n) jest ciągiem elementów zbioru zwartego $MT(B_X)$, czyli ma podciąg zbieżny. Na odwrót, jeśli $y_n \in \overline{T(B_X)}$, to istnieje ciąg $x_n \in B_X$ taki, że $\|y_n - Tx_n\| \leq 1/n$. Wystarczy zauważyć, że zbieżność Tx_{n_k} implikuje zbieżność y_{n_k} i skorzystać z ciągowej definicji zwartej przestrzeni metrycznej. $\square$

Z Twierdzenia 11.1 natychmiast otrzymujemy wniosek.

Wniosek 11.4. Operator identycznościowy na przestrzeni Banacha X jest zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy $\dim X < \infty$.

Przykład 1. Każdy operator ciągły skończonego rzędu jest zwarty (przypomnijmy, że rząd przekształcenia liniowego to wymiar jego obrazu).

Istotnie, wtedy $\overline{T(B_X)}$ jest ograniczonym podzbiorem przestrzeni skończonego wymiaru $T(X)$, zatem jest zwarty. $\square$

Przykład 2. Załóżmy, że $k = k(x, y): [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{F}$ jest funkcją ciągłą. Określmy

$$Kf(x) := \int_0^1 k(x, y)f(y)dy \quad x \in [0, 1], \quad f \in C[0, 1].$$

Wówczas K jest zwartym operatorem na $C[0, 1]$.

Zauważmy najpierw, że

$$\begin{aligned} |Kf(x_1) - Kf(x_2)| &\leq \int_0^1 |k(x_1, y) - k(x_2, y)||f(y)|dy \\ &\leq \|f\|_\infty \sup_{y \in [0, 1]} |k(x_1, y) - k(x_2, y)|. \end{aligned}$$

Z jednostajnej ciągłości funkcji k wynika zatem, że Kf jest funkcją ciągłą, czyli K jest liniowym operatorem na $C[0, 1]$. Ponadto

$$\|Kf\|_\infty \leq \|f\|_\infty \sup_{x, y} |k(x, y)|,$$

stąd $\|K\| \leq \sup_{x, y} |k(x, y)| < \infty$, czyli K jest ciągły. By pokazać zwartość K , czyli przewartość zbioru $A = K(B_{C[0, 1]})$ w $C[0, 1]$ skorzystamy z twierdzenia Arzeli-Ascolego. Z powyższych rachunków wynika, że jeśli $g \in A$, to $\|g\|_\infty \leq \sup_{x, y} |k(x, y)|$ oraz jeśli $|x_1 - x_2| < \delta$, to

$$|g(x_1) - g(x_2)| \leq \sup_{y \in [0, 1]} |k(x_1, y) - k(x_2, y)| \leq \varepsilon,$$

dla odpowiednio małego δ . Zatem A jest wspólnie ograniczoną rodziną funkcji równocześnie ciągłych, zatem jest przetrwarta w $C[0, 1]$. $\square$

Przypomnijmy, że przez $B(X, Y)$ oznaczamy przestrzeń ciągłych odwzorowań liniowych z X w Y z normą operatorową.

Twierdzenie 11.5. *Załóżmy, że X i Y są przestrzeniami Banacha.*

i) *Przestrzeń operatorów zwartych $K(X, Y)$ jest domkniętą podprzestrzenią operatorów ograniczonych $B(X, Y)$.*

ii) *Jeśli operator $T: X \rightarrow Y$ jest zwarty, a operatory $S_1: X' \rightarrow X$ oraz $S_2: Y \rightarrow Y'$ są ciągłe, to operator $S_2TS_1: X' \rightarrow Y'$ jest zwarty*

Dowód. i) To, że $K(X, Y)$ jest przestrzenią liniową jest łatwym ćwiczeniem. By wykazać jej domkniętość w $B(X, Y)$ załóżmy, że $T_n \in K(X, Y)$ zbiega do T w normie operatorowej. Niech (x_m) będzie ciągiem wektorów z kuli jednostkowej X , musimy pokazać, że ciąg (Tx_m) ma podciąg zbieżny. Ze zwartości operatorów T_n wynika, że dla dowolnego n , każdy podciąg $(T_n x_m)_m$ ma podciąg zbieżny. Metodą przekątniową możemy wybrać podciąg m_k taki, że dla każdego n ciąg $(T_n x_{m_k})$ jest zbieżny do pewnego $y_n \in Y$. Pokażemy, że ciąg y_n jest zbieżny. Dla ustalonych n_1 i n_2 oraz odpowiednio dużych m_k zachodzi

$$\begin{aligned} \|y_{n_1} - y_{n_2}\| &\leq \|y_{n_1} - T_{n_1}x_{m_k}\| + \|T_{n_1}x_{m_k} - T_{n_2}x_{m_k}\| + \|T_{n_2}x_{m_k} - y_{n_2}\| \\ &\leq \varepsilon + \|T_{n_1} - T_{n_2}\|\|x_{m_k}\| + \varepsilon \leq 2\varepsilon + \|T_{n_1} - T_{n_2}\|. \end{aligned}$$

Stąd, ponieważ (T_n) jest ciągiem Cauchy'ego w $B(X, Y)$, więc (y_n) jest Cauchy'ego w Y , czyli jest zbieżny do pewnego y . By zakończyć dowód pokażemy, że Tx_{m_k} zbiega do y , w tym celu szacujemy dla ustalonego n i odpowiednio dużego m_k

$$\begin{aligned} \|Tx_{m_k} - y\| &\leq \|Tx_{m_k} - T_nx_{m_k}\| + \|T_nx_{m_k} - y_n\| + \|y_n - y\| \\ &\leq \|T - T_n\| + \|y_n - y\| + \|T_nx_{m_k} - y_n\|. \end{aligned}$$

Pierwsze dwa składniki są małe dla dużego n , a ostatni zbiega do zera przy ustalonym n , gdy k dąży do nieskończoności.

ii) Wystarczy skorzystać z równoważnej charakteryzacji zwartości operatora danej przez część ii) Faktu 11.3 zauważyć, że operatory ciągłe przeprowadzają ciągi ograniczone na ograniczone, a zbieżne na zbieżne. $\square$

Przykład 3. (Operatory Hilberta-Schmidta)

Założmy, że $L_2(X) = L_2(X, \mu)$ oraz $k = k(x, y) \in L_2(X \times X, \mu \otimes \mu)$. Określmy operator K na $L_2(X)$ wzorem

$$Kf(x) = \int_X k(x, y)f(y)d\mu(y).$$

Zauważmy, że na podstawie nierówności Schwarz'a

$$|Kf(x)| \leq \|f\|_2 \left(\int_X k^2(x, y)d\mu(y) \right)^{1/2},$$

stąd natychmiast dostajemy

$$\|Kf\|_2^2 \leq \|f\|_2^2 \int_X \int_X k^2(x, y) d\mu(x) d\mu(y),$$

czyli $K: L_2(X) \rightarrow L_2(X)$ i $\|K\| \leq \|k\|_2 < \infty$. Pokażemy, że K jest operatorem zwartym. Niech $(g_\alpha)_\alpha$ będzie bazą o.n. $L_2(X)$, wtedy (jak wiemy z zadania 5.9 z ćwiczeń) $(g_\alpha(x)g_\beta(y))_{\alpha,\beta}$ jest bazą o.n. $L_2(X \times X)$. Zatem możemy rozpisać funkcję k w tej bazie otrzymując

$$k(x, y) = \sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha\beta} g_\alpha(x) g_\beta(y),$$

gdzie $(a_{\alpha\beta})_{\alpha,\beta}$ jest ciągiem sumowalnym z kwadratem. Ponieważ tylko przeliczalnie wiele współczynników w powyższej sumie jest niezerowych, więc po ich przenieumerowaniu możemy zapisać

$$k(x, y) = \sum_{i,j=1}^{\infty} a_{ij} g_i(x) g_j(y).$$

Określmy

$$k_n(x, y) := \sum_{i,j=1}^n a_{ij} g_i(x) g_j(y)$$

oraz

$$K_n f(x) := \int_X k_n(x, y) f(y) d\mu(y) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} g_i(x) \int_X f(y) g_j(y) d\mu(y).$$

Wtedy K_n są operatorami skończonego rzędu, więc są zwarte, ponadto $K_n - K$ jest operatorem zadanym przez jądro $k_n - k = \sum_{\max(i,j) \geq n+1} a_{ij} g_i(x) g_j(y)$, więc

$$\|K - K_n\| \leq \|k - k_n\|_2 = \left(\sum_{\max(i,j) \geq n+1} |a_{ij}|^2 \right)^{1/2} \rightarrow 0.$$

Zatem K jest zwarty jako granica w normie operatorów zwartych. □

Uwaga 11.6. Powyższy przykład pokazuje najczęstszy sposób dowodzenia zwartości operatora liniowego przez pokazanie, że jest on granicą (w normie operatorowej) operatorów skończonego rzędu. Kolejny fakt mówi, że każdy zwarty operator na (ośrodkowej) przestrzeni Hilberta jest taką granicą.

Fakt 11.7. *Niech $\mathcal{H}$ będzie nieskończenie wymiarową, ośrodkową przestrzenią Hilberta z bazą o.n. $(u_n)_{n \geq 1}$ oraz P_n oznacza rzut ortogonalny na $\text{Lin}\{u_1, \dots, u_n\}$. Wówczas operator liniowy $T \in B(X, \mathcal{H})$ jest zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim_{n \rightarrow \infty} \|P_n T - T\| = 0$.*

Dowód. „ $\Leftarrow$ ”. Operatory $P_n T$ mają rząd co najwyżej n , zatem T jest zwarty jako granica (w normie operatorowej) operatorów skończenie wymiarowych.

„ $\Rightarrow$ ”. Załóżmy, że $\limsup_{n \rightarrow \infty} \|P_n T - T\| > 0$, wtedy istnieje ciąg (n_k) oraz wektory $x_{n_k} \in X$ o normie 1 takie, że $\|P_{n_k} T x_{n_k} - T x_{n_k}\| \geq \varepsilon$ dla wszystkich k . Przechodząc ewentualnie do podciągu możemy zakładać (na mocy zwartości T), że $T x_{n_k} \rightarrow y$. Ale wtedy

$$\begin{aligned} \varepsilon &\leq \|P_{n_k} T x_{n_k} - T x_{n_k}\| \leq \|P_{n_k}(T x_{n_k} - y)\| + \|P_{n_k} y - y\| + \|y - T x_{n_k}\| \\ &\leq 2\|T x_{n_k} - y\| + \|P_{n_k} y - y\| \rightarrow 0, \end{aligned}$$

gdyż $P_{n_k} y \rightarrow y$ i dochodzimy do sprzeczności. $\square$

Uwaga 11.8. Powyższy dowód pokazuje coś więcej. Załóżmy, że Y jest przestrzenią Banacha na której istnieje ciąg operatorów skończenie wymiarowych S_n zbieżny silnie do Id_Y , tzn. $S_n y \rightarrow y$ dla wszystkich $y \in Y$. Wówczas operator $T \in B(X, Y)$ jest zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy $\|S_n T - T\| \rightarrow 0$. W szczególności każdy operator z X w Y zwarty na takiej przestrzeni jest granicą operatorów skończenie wymiarowych. Ta ostatnia własność nazywa się *własnością aproksymacji* dla przestrzeni Y . Per Enflo na początku lat 70tych jako pierwszy skonstruował przykład przestrzeni Banacha bez własności aproksymacji, odpowiadając na pytanie postawione w 1936 roku przez Stanisława Mazura (problem 153 ze słynnej Księgi Szkockiej). Nagrodą za rozwiązanie tego problemu była żywa gęś, którą Enflo odebrał od Mazura podczas swojej wizyty w Warszawie w 1972 roku.