

Kolokwium z Analizy Funkcjonalnej

5 maja 2020

Spośród poniższych sześciu zadań proszę **wybrać pięć** i napisać ich rozwiązania (w miarę możliwości każdego na osobnej kartce) z pełnymi uzasadnieniami odpowiedzi. Można (i należy) korzystać ze wszystkich faktów udowodnionych na wykładzie i ćwiczeniach.

1. a) Czy przestrzeń parzystych funkcji ciągłych na $[-1, 1]$ z normą supremum jest przestrzenią Banacha?
b) Czy jest to przestrzeń ośrodkowa?
2. Niech $(u_n)_{n \geq 1}$ będzie układem ortonormalnym w przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$. Określmy na $\mathcal{H}$ operator T wzorem $Tx := (\frac{n}{n+1} \langle x, u_n \rangle)_{n=1}^\infty$. Wykaż, że T jest operatorem liniowym ciągłym między $\mathcal{H}$ a c_0 i znajdź jego normę.

3. Niech

$$F := \left\{ f \in L_2[0, 1] : \int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 t f(t) dt = 0 \right\}.$$

Oblicz

$$\inf_{f \in F} \int_0^1 |t^3 - f(t)|^2 dt.$$

4. Załóżmy, że μ jest miarą na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ taką, że $\mu(A) = \int_A f dx$ dla pewnego $f \in L^1(\mathbb{R})$ i wszystkich zbiorów borelowskich A . Wykaż, że $|\mu|(A) = \int_A |f| dx$ dla $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ oraz $\frac{d\mu}{d|\mu|} = \text{sgn}(f)$.
5. Oblicz normę funkcjonału φ zadanego wzorem

$$\varphi(f) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-|x|} dx$$

na przestrzeni $L_p(\mathbb{R})$ dla $1 \leq p \leq \infty$.

6. Dla jakich $p \in [1, \infty]$ istnieje niezerowy funkcjonał liniowy ciągły φ na ℓ_p taki, że $\varphi(e_n) = 0$ dla wszystkich n (gdzie jak zwykle $e_n = (\delta_{n,k})_{k \geq 1}$)?