

Kartkówka 1

7 kwietnia 2020

1. Załóżmy, że $\mathcal{H}_1$ i $\mathcal{H}_2$ są przestrzeniami Hilberta. Oznaczmy iloczyny skalarne w tych przestrzeniach przez $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ i $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$, a normy przez $|\cdot|_1$ i $|\cdot|_2$.

i) Wykaż, że przestrzeń $\mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2$ z normą

$$|(x_1, x_2)| = (|x_1|_1^2 + |x_2|_2^2)^{1/2}$$

jest przestrzenią euklidesową. Jaki jest iloczyn skalarny w tej przestrzeni?

ii) Czy przestrzeń powyżej jest Hilberta? Odpowiedź uzasadnij.

Można przyjąć dla uproszczenia, że rozpatrujemy przestrzeń nad $\mathbb{R}$.

2. Niech

$$a_n = \int_0^{2\pi} t^2 e^{int} dt.$$

Oblicz

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2.$$