

Egzamin z Analizy Funkcjonalnej

23 czerwca 2020

Spośród poniższych sześciu zadań proszę **wybrać pięć** i napisać ich rozwiązania (w miarę możliwości każdego na osobnej kartce) z pełnymi uzasadnieniami odpowiedzi. Można (i należy) korzystać ze wszystkich faktów udowodnionych na wykładzie i ćwiczeniach. W zadaniu drugim i szóstym rozpatrujemy przestrzenie nad liczbami zespolonymi, w pozostałych można przyjąć, że ciało skalarów to $\mathbb{R}$.

1. Niech

$$X := \{f \in C[0, \infty): \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0\}.$$

Czy przestrzeń X z normą supremum:

- i) jest przestrzenią unormowaną?
- ii) jest przestrzenią Banacha?
- iii) jest przestrzenią ośrodkową?

2. Określmy operator T z $L_2[0, 2\pi]$ w ℓ_4 wzorem

$$Tf = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx \right)_{n \geq 1}.$$

- i) Wykaż, że T jest dobrze określony i ciągły.
- ii) Znajdź T^* .

3. Załóżmy, że f jest niezerową funkcją ciągłą na $\mathbb{R}$ o nośniku zwartym oraz $f_n(x) = f(x - n)$.

- i) Wykaż, że funkcje f_n należą do wszystkich $L_p(\mathbb{R})$, $1 \leq p \leq \infty$ oraz f_n nie zawierają podciągu zbieżnego w normie $L_p(\mathbb{R})$ dla żadnego $p \in [1, \infty]$.
- ii) Wykaż, że f_n zbiegają słabo do zera w $L_p(\mathbb{R})$ dla $1 < p < \infty$.

4. Dla operatora liniowego ciągłego T na przestrzeni Banacha X definiujemy operator $\exp(T)$ wzorem

$$\exp(T) := \text{Id} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{T^k}{k!}.$$

- i) Wykaż, że powyższy szereg jest zbieżny w normie operatorowej, operator $\exp(T)$ jest ciągły i $\|\exp(T)\| \leq e^{\|T\|}$.
- ii) Udowodnij, że $\exp(T) - \text{Id}$ jest zwarty, jeśli T jest zwarty.

5. Niech f będzie funkcją ciągłą na $[0, 1]$, a operator T na $L_1[0, 1]$ będzie zadany wzorem $Tg = fg$.

- i) Wykaż, że T jest dobrze określony, ciągły oraz $\|T\| = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|$.
- ii) Znajdź widmo i rezolwentę operatora T .

6. Operator T na zespolonej przestrzeni ℓ_2 jest dany wzorem

$$T((x_n)_{n \geq 1}) = (x_1, ix_3, i^2 x_5, \dots) = (i^{n-1} x_{2n-1})_{n \geq 1}.$$

- i) Znajdź sprzężenie Hilbertowskie T^* operatora T .
- ii) Czy T jest operatorem unitarnym?
- iii) Czy T jest operatorem zwartym? A T^* ?