Uniwersytet Warszawski
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki

Jakub Onufry Wojtaszczyk

Własności zmiennych logarytmicznie wklęsłych

rozprawa doktorska

Promotor rozprawy:

dr hab. Rafał Latała, prof. UW
Instytut Matematyki UW

Lipiec 2008

Oświadczenie autora rozprawy:
oświadczam, że niniejsza rozprawa została napisana przeze mnie samodzielnie.

. . . .

data *Jakub Onufry Wojtaszczyk*

Oświadczenie promotora rozprawy:
niniejsza rozprawa jest gotowa do oceny przez recenzentów.

. . . .

data *dr hab. Rafał Latała, prof. UW*

Streszczenie

Praca zawiera szereg wyników dotyczących miarowych własności zmiennych logarytmicznie wklęsłych, ze szczególnym uwzględnieniem zmiennych pochodzących od prostych klas ciał wypukłych — kul B_p^n i kul Orlicza.

Uzyskane wyniki dotyczą dwóch rodzajów własności. Pierwszą jest tzw. własność (τ) i związane z nią własności dotyczące koncentracji miary. Udowodniona jest równoważność „optymalnej" koncentracji i „optymalnej" nierówności (τ) dla zmiennych logarytmicznie wklęsłych, pokazane jest, że każda z powyższych pociąga za sobą nierówność Cheegera. Taka „optymalna" koncentracja jest udowodniona między innymi dla miary jednostajnej na B_p^n.

Drugą badaną własnością jest tzw. ujemna stowarzyszoność modułów, która uogólnia wprowadzoną przez Balla i Perissinaki podniezależność cięć współrzędnościowych. Ta własność pociąga za sobą między innymi wykładniczą koncentrację normy euklidesowej oraz twierdzenia porównawcze dla momentów. Udowodniona jest dla klasy miar związanych z kulami Orlicza, w szczególności zawierającej miarę jednostajną na dowolnej uogólnionej kuli Orlicza.

Słowa kluczowe

Zmienna logarytmicznie wklęsła, uogólniona kula Orlicza, kula B_p^n, własność (τ), splot infimum, ujemne stowarzyszenie

Klasyfikacja tematyczna

41A63
41A05
65D30

Abstract

In this thesis I present a series of results concerning the measure properties of logarithmically concave measures, especially measures stemming from simple classes of convex bodies — B_p^n balls and Orlicz balls.

The results focus on two types of properties. The first is the so–called (τ) property and related results of concentration of measure type. I prove the equivalence of "optimal" concentration and "optimal" (τ) inequality for log–concave measures. I also show each of these implies the Cheeger inequality. Such an "optimal" concentration result is proved in particular for the uniform measure on the B_p^n ball.

The second considered property is the so–called negative association of absolute values, which generalizes the subindependence of coordinate slabs introduced by Ball and Perissinaki. This property implies in particular the exponential concentration of the euclidean norm and comparison theorems for moments. It is proved for a class of measures tied to the Orlicz balls, in particular for the uniform measure on any generalized Orlicz ball.

Key words

Logarithmically concave measure, generalized Orlicz ball, B_p^n ball, property (τ), infimum convolution, negative association

AMS subject classifications

41A63
41A05
65D30

Spis treści

Rozdział 1

Wprowadzenie

1.1 Wstęp

W ciągu ostatnich kilkunastu lat zrozumienie zachowania zmiennych logarytmicznie wklęslych znacząco się rozwinęło. W szczególności dużo lepiej rozumiemy powiązanie między miarami logarytmicznie wklęsłymi a ciałami wypukłymi (np. [3]), Bo'az Klartag udowodnił Centralne Twierdzenie Graniczne dla miar logarytmicznie wklęslych ([23]), Paouris oszacował ogon normy euklidesowej dowolnej izotropowej zmiennej logatytmicznie wklęsłej ([40]). Co być może ważniejsze, pojawiła się pewna liczba prostszych technik, które weszły do repertuaru tej dziedziny i stały się standardem.

Z radością mogę stwierdzić, że w trakcie ostatnich trzech lat pracy pod kierunkiem dr. hab. Rafała Latały udało mi się wnieść pewien wkład w ten rozwój. Jako, że moje zainteresowania są bardziej geometryczne niż probabilistyczne, zajmowałem się chętniej ciałami wypukłymi aniżeli miarami — choć, co częste w tej dziedzinie — okazuje się, że większość twierdzeń w tej pracy automatycznie przekłada się na wyniki dla szerszych klas miar logarytmicznie wklęsłych. W swojej pracy doktorskiej chcę przedstawić zbiór wyników, które przede wszystkim dotyczą dwóch rodzin zbiorów wypukłych — kul B_p^n oraz kul Orlicza.

1.2 Motywacja

Dziedzina, którą się zajmuję jest interesujące niejako z dwóch różnych stron. Z probabilistycznego punktu widzenia mira logarytmicznie wklęsła na $\mathbb{R}^n$ (a raczej wektor losowy o logarytmicznie wklęsłym rozkładzie) stanowi jedno z naturalnych uogólnień ciągu zmiennych niezależnych o szybko malejących ogonach. Teraz wiemy już, że dla wektorów o logarytmicznie wklęsłym rozkładzie przenosi się szereg własności zmiennych niezależnych, z których najważniejszą jest wspomniane już Centralne Twierdzenie Graniczne. Warunek logarytmicznej wklęsłości, czy też wypukłości dziedziny, pojawia się też naturalnie w zastosowaniach, np. w sytuacji, gdy na pewną miarę logarytmicznie wklęsła (np. miarę Lebesgue'a czy gaussowską) nakładamy dodatkowe ograniczenia przez nierówności liniowe.

Z geometrycznego punktu widzenia wypukłość jest jeszcze bardziej naturalnym założeniem. Pytania dotyczące miar zbiorów wypukłych są w matematyce obecne od bardzo dawna (patrz np. nierówność Brunna–Minkowskiego, [14], [38], przegląd historyczny w [18]). Okazuje się jednak, ze zastosowanie narzędzi probabilistycznych daje tu bardzo wiele nowych możliwości — obecnie również te wyniki, które w swoim sformułowaniu używają wyłącznie języka geometrii wypukłej, jak np. Twierdzenie 4.3.1, w dowodzie silnie korzystają z faktów i technik probabilistycznych. Tak jak to często dzieje się w matematyce, gdy udaje się znaleźć powiązanie pomiędzy dwoma pozornie odległymi dziedzinami, to zazwyczaj dzieje się to z wielkim pożytkiem dla obydwu z nich.

Trudno ukryć, że główną motywacją przy pisaniu tej pracy jest chęć autora, by uzyskać tytuł doktora nauk matematycznych. Mimo to chcę, żeby przy okazji powstała praca, która będzie dla Czytelnika interesująca i przybliży mu pewne zagadnienia z coraz bardziej zatartego pogranicza geometrii wypukłej i teorii miar logarytmicznie wklęsłych. Nie zakładam zatem, że czytelnik jest biegły w tej dziedzinie, a przeciwnie — postaram się stosunkowo starannie przedstawiać dowody również takich faktów, które dla eksperta mogłyby wydać się trywialne i niegodne wzmianki.

1.3 Notacja

W tym rozdziale zgromadzę większość notacji, która będzie używana w niniejszej pracy. W przeważającej większości jest to notacja standardowa, jednakże — w szczególności ze względu na zróżnicowanie używanej w różnych środowiskach notacji — przedstawię tu również te ustalenia, które większości czytelników mogą wydać się trywialne.

Liczby całkowite oznaczał będę przez $\mathbb{Z}$, liczby naturalne zaś — przez $\mathbb{N}$. Zakładam w tej pracy, że zero jest liczbą naturalną.

Przez $\mathbb{R}$ oznaczam zbiór liczb rzeczywistych. Dla liczby naturalnej n przez $\mathbb{R}^n$ oznaczam n–wymiarową przestrzeń euklidesową wyposażoną w miarę Lebesgue'a, oznaczaną $\lambda_n(\cdot)$ lub po prostu $\lambda(\cdot)$, standardowy iloczyn skalarny $\langle\cdot,\cdot\rangle$ oraz ortonormalny układ współrzędnych $e_1,\ldots,e_n$. Miarę Lebesgue'a zbioru $A\subset\mathbb{R}^n$, w wypadkach, gdy nie będzie ryzyka pomyłki, będę też niekiedy oznaczał $|A|$. Dla wektora $x\in\mathbb{R}^n$ przez x_i będę często oznaczał jego i–tą współrzędną, czyli $\langle x, e_i\rangle$. Na $\mathbb{R}^n$ będę rozpatrywał w szczególności normy $\|\cdot\|_p$ zadane wzorem $\|x\|_p = (\sum x_i^p)^{1/p}$ dla $p\in[1,\infty)$, oraz $\|\cdot\|_\infty$ zadaną wzorem $\|x\|_\infty = \sup|x_i|$. W szczególności norma $\|\cdot\|_2$ to standardowa norma euklidesowa pochodząca od iloczynu skalarnego, będę ją tez niekiedy oznaczał $|\cdot|$.

Na $\mathbb{R}^n$ rozważam standardową topologię (pochodzącą od którejkolwiek z równoważnych norm). Domknięcie w tej topologii oznaczam przez Cl, wnętrze przez Int. Jeśli $A\subset B\subset\mathbb{R}^n$, to przez $\mathrm{Int}_B\, A$ oznaczam wnętrze A względem B, czyli największy taki podzbiór A, który jest otwarty w topologii indukowanej na B przez standardową topologię z $\mathbb{R}^n$.

Przez $\mathbb{R}_+$ oznaczam liczby rzeczywiste nieujemne, przez $\mathbb{R}^n_+$ — uogólnioną nieujemną ćwiartkę $\mathbb{R}^n$, czyli $\{x\in\mathbb{R}^n : \forall_{i\in\{1,2,\ldots,n\}}\ x_i\geqslant 0\}$.

Wszystkie miary, które rozważam w pracy są miarami borelowskimi na $\mathbb{R}^n$. Dla miary μ na $\mathbb{R}^n$ przez *rzut* tej miary na podprzestrzeń afiniczną $H\subset\mathbb{R}^n$ mam na myśli miarę μ_H na H zadaną przez $\mu_H(C)=\mu(P^{-1}(C))$, gdzie P to rzut prostopadły na H. Dla dowolnego zbioru A przez $\mathbf{1}_A$ będę oznaczał jego funkcję charakterystyczną, czyli funkcję zadaną wzorem $\mathbf{1}_A(x)=1$ jeśli $x\in A$, zaś 0 w przeciwnym przypadku. Przez $\bar{A}$ oznaczam zazwyczaj dopełnienie zbioru A. Jeśli μ jest zadana przez gęstość m, to dla $K\subset H$ przez *obcięcie* μ do K mam na myśli miarę $\mu_{|K}$ na H zadaną przez gęstość $m\cdot\mathbf{1}_K$.

Jeśli $m : X\to\mathbb{R}$, to nośnikiem m nazywam zbiór $\mathrm{Cl}\{x\in X : m(x)\neq 0\}$. Jeżeli miara μ jest miarą, to nośnikiem μ (oznaczanym również $\operatorname{supp}\mu$) nazywamy najmniejszy taki zbiór domknięty, że $\mu(\bar{A})=0$. W wypadkach, które będziemy rozważać, jeżeli μ ma gęstość m, to $\operatorname{supp}\mu=\operatorname{supp} m$.

Zbiór $K\subset\mathbb{R}^n$ nazywamy wypukłym, jeżeli dla każdych $x,y\in K$ i każdego $t\in[0,1]$ mamy $tx+(1-t)y\in K$. Zbiór $K\subset\mathbb{R}^n$ będziemy nazywać *ciałem wypukłym*, jeżeli jest zwarty, wypukły i ma niepuste wnętrze. Przez *ciało symetryczne* rozumiemy ciało wypukłe, które ma środek symetrii w środku układu współrzędnych. W języku analizy funkcjonalnej można powiedzieć, że ciała symetryczne to kule jednostkowe norm. Przez *ciało 1–symetryczne* rozumiemy takie ciało wypukłe, które dodatkowo jest symetryczne względem wszystkich hiperpłaszczyzn $\{x_i = 0\}$. Równoważnie, dla dowolnego ciągu $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n$ i $(x_1, \ldots, x_n) \in K$ mamy też $(\varepsilon_1 x_1, \ldots, \varepsilon_n x_n) \in K$. Oczywiście ciało 1–symetryczne jest symetryczne. W literaturze można też spotkać określenie „ciała bezwarunkowe". Dla ciała wypukłego $K \subset \mathbb{R}^n$ możemy zdefiniować miarę probabilistyczną na $\mathbb{R}^n$ jako znormalizowaną miare Lebesgue'a obciętą do K, tj. $\frac{1}{\lambda(K)}\lambda_{|K}$. Wektor losowy $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ wybierany według tej miary będziemy nazywać losowym wektorem z ciała K.

Kulą $B_p^n \subset \mathbb{R}^n$ nazywamy kulę jednostkową normy $\|\cdot\|_p$ w $\mathbb{R}^n$, czyli zbiór $\{x : \sum_{i=1}^n |x_i|^p \leqslant 1\}$. Niech stała $r_{p,n}$ będzie dobrana tak, że $|r_{p,n} B_p^n| = 1$.

Dla wypukłego zbioru $A \subset \mathbb{R}^n$ funkcję f nazywamy wypukłą, jeśli dla każdego $x, y \in A$ i każdego $t \in [0, 1]$ spełnia $f(tx + (1-t)y) \leqslant tf(x) + (1-t)f(y)$. Funkcję $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ nazwiemy *funkcją Younga* jeśli jest wypukła, spełnia $f(0) = 0$, nie jest tożsamościowo równa zero oraz istnieje $x \neq 0$ takie, że $f(x) \neq \infty$. Jeżeli mamy n funkcji Younga f_n, to zbiór

$$K = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : \sum_{i=1}^{n} f_i(|x_i|) \leqslant 1\}$$

jest ciałem 1–symetrycznym w $\mathbb{R}^n$. Takie ciało nazywamy *uogólnioną kulą Orlicza*. Jeśli wszystkie funkcje f_n są równe, to zbiór K nazywamy po prostu *kulą Orlicza*. Kule B_p^n dla $p \in [1, \infty)$ są kulami Orlicza dla funkcji Younga równych $f(x) = x^p$, kula B_∞^n jest kulą Orlicza dla funkcji Younga $f(x) = 0$ dla $x \leqslant 1$ i $f(x) = \infty$ dla $x > 1$.

Będę na $\mathbb{R}^n$ rozważał szereg miar innych niż miara Lebesgue'a. W szczególności na prostej będę rozważał miarę γ, czyli standardową miarę Gaussowską o gęstości $(\sqrt{2\pi})^{-1} e^{-x^2/2}$, standardową symetryczną miarę wykładniczą ν o gęstości $2^{-1} e^{-|x|}$ oraz miary ν_p o gęstości $(2\gamma_p)^{-1} e^{-|x|^p}$, gdzie $\gamma_p = \Gamma(1 + 1/p)$. Przypomnijmy przy okazji, że funkcja Γ, zdefiniowana jako

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x} dx$$

jest logarytmicznie wklęsła oraz spełnia $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$, $\Gamma(1) = 1$ i $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ (patrz np. [1]). Łatwo sprawdzić, że dla $1 \leqslant p < \infty$ zachodzi $1/2 \leqslant \gamma_p \leqslant 1$. W szczególności ν_1 to standardowa miara wykładnicza ν, zaś ν_2 to miara gaussowska $\mathcal{N}(0, 1/\sqrt{2})$. Miary ν_p są logarytmicznie wklęsłe. Dla miary μ przez μ^n oznaczam miarę produktową $\mu^{\otimes n}$, zatem ν_p^n ma gęstość $(2\gamma_p)^{-n} \exp(-\|x\|_p^p)$. Przez $\mu_{p,n}$ będę oznaczał miarę jednostajną na kuli $r_{p,n} B_p^n$. To również jest miara log–wklęsła.

Mówimy, że funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest rosnąca (malejąca) jeśli dla $x \geqslant y$ mamy $f(x) \geqslant f(y)$ (odp. $f(x) \leqslant f(y)$). Mówimy, że funkcja jest ściśle rosnąca jeśli dla $x > y$ mamy $f(x) > f(y)$. Funkcję $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ bądź $f : \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}$ będziemy nazywać *rosnącą po współrzędnych*, jeśli warunek $x_i \geqslant y_i$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$ implikuje $f(x_1, \ldots, x_n) \geqslant f(y_1, \ldots, y_n)$ (odp. $f(x_1, \ldots, x_n) \leqslant f(y_1, \ldots, y_n)$). Zbiór $A \subset \mathbb{R}_+^n$ nazywamy *w–zbiorem* lub zbiorem malejącym po współrzędnych, jeśli dla $(x_1, \ldots, x_n) \in A$ i $0 \leqslant y_i \leqslant x_i$ mamy $(y_1, \ldots, y_n) \in A$. Dla rosnącej po współrzędnych funkcji f zbiory $f^{-1}((-\infty, t])$ są w–zbiorami, zaś funkcja charakterystyczna w–zbioru jest malejąca po współrzędnych. Podobnie funkcję $f : \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}$ nazywamy *rosnącą po promieniach*, jeśli $f(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) \geqslant f(x_1, \ldots, x_n)$ dla $\lambda \geqslant 1$. Analogicznie definiujemy funkcje malejące, ściśle rosnące i ściśle malejące po promieniach i współrzędnych. Zbiór nazywamy *p–zbiorem*, jeśli jego funkcja charakterystyczna jest malejąca po promieniach.

Funkcję $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ nazywamy *logarytmicznie wklęsłą* lub log–wklęsłą, jeśli $\ln f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ jest funkcją wklęsłą. Miarę probabilistyczną na $\mathbb{R}^n$ nazywamy *logarytmicznie wklęsłą* lub log–wklęsłą, jeśli dla każdych $A, B \subset \mathbb{R}^n$ spełnia $\mu(tA + (1-t)B) \geqslant \mu(A)^t \mu(B)^{1-t}$. W pracy będę zajmował się wyłącznie log–wklęsłymi miarami probabilistycznymi, zatem na użytek całej pracy, o ile nie zostanie wyraźnie zaznaczone co innego, przez miarę log–wklęsłą rozumiem w szczególności miarę probabilistyczną. Klasyczne twierdzenie Borella (patrz [11]) mówi, że dowolna miara log–wklęsła, niekoniecznie probabilistyczna, której nośnik nie jest zawarty w żadnej właściwej podprzestrzeni afinicznej, ma gęstość, i ta gęstość jest funkcją wklęsłą. Z nierówności Prekopy–Leindlera (patrz [42]) dostajemy zaś, że dowolna miara o gęstości log–wklęsłej jest log–wklęsła. W szczególności log–wklęsłe są miary jednostajne na zbiorach wypukłych. Wiadomo też (patrz np. [3]), że dowolna miara log–wklęsła jest słabą granicą rzutów miar jednostajnych na ciałach wypukłych. W wielu zatem wypadkach badanie miar jednostajnych na ciałach wypukłych jest równoważne badaniu miar log–wklęsłych. O mierze log–wklęsłej, podobnie jak o ciele wypukłym, będziemy mówić, że jest *symetryczna*, jeżeli jest niezmiennicza ze względu na symetrię o środku w układzie współrzędnych, zaś *1–symetryczna*, jeśli jest niezmiennicza ze względu na symetrię względem każdej z płaszczyzn $\{x_i = 0\}$. Wektor losowy w $\mathbb{R}^n$ nazywamy log–wklęsłym, jeśli jego rozkład jest logarytmicznie wklęsły.

Używamy w tej pracy standardowych oznaczeń probabilistycznych. Dla zmiennej losowej X przez $\mathbb{E}X$ oznaczamy jej wartość oczekiwaną, przez $\operatorname{Var} X$ oznaczamy wariancję (czyli $\mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2$), dla dwóch zmiennych losowych X i Y przez $\operatorname{Cov}(X, Y)$ oznaczamy ich kowariancję, czyli $\mathbb{E}XY - \mathbb{E}X\mathbb{E}Y$.

Dla dowolnych zbiorów $A, B \subset \mathbb{R}^n$ przez $A+B$ oznaczamy sumę Minkowskiego tych zbiorów, czyli $\{a + b : a \in A, b \in B\}$. Dla liczby rzeczywistej λ przez λA oznaczamy zbiór $\{\lambda a : a \in A\}$. Przy tych oznaczeniach zachodzi $\lambda A + \lambda B = \lambda(A + B)$ oraz dla dodatnich λ i μ i wypukłego zbioru A również $\lambda A + \mu A = (\lambda + \mu)A$. Dla zbioru K (najczęściej będącego ciałem wypukłym) przez K° oznaczamy zbiór dualny, czyli $\{x : \forall_{v \in K} \langle v, x\rangle \leqslant 1\}$. Jeśli K jest symetrycznym ciałem wypukłym, to $(K^\circ)^\circ = K$.

Dla funkcji f przez $\mathcal{L}f$ oznaczamy jej transformatę Legendre'a (patrz Definicja 1.4.8). Przez $\operatorname{Diam} A$ oznaczamy średnicę zbioru A, czyli $\sup\{|a - b| : a, b \in A\}$. Przez $\rho(x, A)$ oznaczamy $\inf\{|x - a| : x \in A\}$.

1.4 Przegląd wyników i organizacja pracy

W tej pracy skoncentruję się przede wszystkim na dwóch rodzinach ciał wypukłych: kulach B_p^n oraz kulach Orlicza, a raczej na pochodzących od nich miarach logarytmicznie wklęsłych, oraz na dwóch własnościach miar logarytmicznie wklęsłych: ujemnym stowarzyszeniu modułów i własności (τ). W pierwszym rozdziale przedstawię ogólne wprowadzenie do pracy. W sekcji 1.2 pokazuję z jakimi problemami związana jest badana tematyka i co motywuje prowadzone przeze mnie badania. W sekcje 1.3 zbieram ustalenia notacyjne, które są wykorzystywane w całej pracy. W niniejszej części, oprócz przedstawienia struktury pracy, pokrótce wprowadzę wspomniane wyżej dwie własności, na których skoncentruje się ta praca. Jedną z najważniejszych części tej pracy są podziękowania, zawarte w części 1.5 — choćby dlatego, że mówią one o ludziach, którzy są dla mnie ważniejsi, aniżeli wyniki zawarte w tej pracy.

Reszta pracy podzielona jest na rozdziały odpowiadające coraz bardziej złożonym rodzinom miar logarytmicznie wklęsłych. Każdy rozdział z osobna ma w zamierzeniu przedstawić wiedzę, którą posiadam o tej rodzinie. W ten sposób postaram się przedstawić jakie pogłębienie wiedzy o danej klasie miar zostało osiągnięte w ramach mojej pracy. Wynika z tego, oczywiście, że w każdym rozdziale przemieszane są wyniki dotyczące ujemnej stowarzyszoności i wyniki dotyczące własności (τ). Żaden z rozdziałów nie jest, zatem, samodzielną pracą — jeśli ktoś jest zainteresowany tylko wynikami dotyczącymi, powiedzmy, kul Orlicza, to oczywiście wystarczy, że przejrzy rozdział piąty, natomiast jeśli chciałby zrozumieć dowody, to prawdopodobnie będzie musiał zapoznać się z przynajmniej fragmentami pozostałych rozdziałów.

W rozdziale drugim omawiam to, co jest prawdą dla dowolnej zmiennej logarytmicznie wklęsłej. W szczególności tu znajdują się konsekwencje obydwu własności — co prawda zarówno własność (τ), jak i ujemna stowarzyszoność modułów jest udowodniona wyłącznie dla niektórych klas zmiennych logarytmicznie wklęsłych, jednak jestem w stanie udowodnić twierdzenia mówiące o konsekwencjach, jakie posiadanie którejś z tych własności miałoby dla dowolnej miary log–wklęsłej, co w szczególności stanowi motywację dla dalszych badań. W szczególności w sekcji 2.3 zostaje omówiony związek pomiędzy własnością (τ) a optymalną koncentracją dla dowolnej miary logarytmicznie wklęsłej.

W rozdziale trzecim opisuję najprostszą klasę zmiennych logarytmicznie wklęsłych, a mianowicie zmienne produktowe, czyli będące produktem jednowymiarowych zmiennych log–wklęsłych. Dla takich zmiennych najczęściej stosowane argumenty są nieskomplikowane, tak jest i w tym przypadku. W rozdziale czwartym koncentruję się na najprostszym przykładzie nieproduktowych miar logarytmicznie wklęsłych, czyli miar jednostajnych na kulach B_p^n. W części 4.2 znajduje się omówienie związanych z tematyką pracy wcześniejszych wyników o mierze jednostajnej na B_p^n. Największy fragment tego rozdziału stanowi część 4.4, w której omawiam dowód własności (τ) dla tych miar. W sekcji 4.3 znajduje się dowód ujemnego stowarzyszenia modułów nie tylko dla miary jednostajnej na B_p^n, ale też szeregu innych miar logarytmicznie wklęsłych o nośniku na B_p^n.

Rozdział piąty dotyczy uogólnionych kul Orlicza. Prawie cała jego objętość to dowód ujemnej stowarzyszoności modułów dla tych kul. Wpierw przedstawiam w nim prostszy dowód mniej skomplikowanej bardzo słabej ujemnej stowarzyszoności modułów, potem dowodzę ogólnej wersji twierdzenia o ujemnej stowarzyszoności.

1.4.1 Ujemna stowarzyszoność modułów

Ujemna stowarzyszoność jest jedną z kilku formalizacji intuicji stojącej za sytuacją, w której, jeżeli jedna zmienna jest duża, to druga raczej jest mała. Chodzi przy tym o uzyskanie większej informacji o rozkładzie łącznym aniżeli jedna statystyka liczbowa (jak dzieje się to w wypadku ujemnej korelacji). Formalnie pojęcie to definiujemy następująco:

Definicja 1.4.1. *Mówimy, że ciąg zmiennych losowych $X_1, \ldots, X_n$ jest* ujemnie stowarzyszony, *jeżeli dla dowolnych ograniczonych i rosnących po współrzędnych funkcji $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ i $g : \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}$ oraz rozłącznych podzbiorów $\{i_1, \ldots, i_k\}$ oraz $\{j_1, \ldots, j_l\}$ zbioru indeksów $\{1, 2, \ldots, n\}$ mamy*

$$\operatorname{Cov}\Big(f(X_{i_1}, \ldots, X_{i_k}), g(X_{j_1}, \ldots, X_{j_l})\Big) \leqslant 0. \tag{1.4.1}$$

Powiemy, że ciąg (X_j) jest słabo ujemnie stowarzyszony, *jeśli własność (1.4.1) zachodzi dla $l = 1$, zaś* bardzo słabo ujemnie stowarzyszony, *jeśli (1.4.1) zachodzi dla $l = k = 1$ (czyli, innymi słowy, funkcje rosnące od dowolnych dwóch zmiennych z ciągu mają niedodatnią kowariancję).*

Definicja ujemnej stowarzyszoności została wprowadzona w latach osiemdziesiątych dwudziestego wieku przez Alama, Joag–Deva, Proschana i Saxenę w kontekście zastosowań statystycznych.

Pierwszą motywacją do badania ujemnej stowarzyszoności w kontekście zmiennych log–wklęsłych były próby rozszerzenia wyników Antilli, Balla i Perissinaki (patrz [2]) dla kul B_p^n tak, by udowodnić Centralne Twierdzenie Graniczne dla uogólnionych kul Orlicza. Obecnie Centralne Twierdzenie Graniczne zostało udowodnione w pełnej ogólności przez B. Klartaga (patrz [23], [24] i [25]), natomiast rozwinięte poniżej techniki pozwalają badać bardziej subtelne własności sum postaci $\sum a_i X_i$, przykładowo szacować je przez kombinacje liniowe zmiennych niezależnych lub też analizować analogi prawa iterowanego logarytmu. Udowodnionej w rozdziale czwartym własności użył ostatnio B. Fleury do udowodnienia odwrotnej nierówności Höldera dla uogólnionych kul Orlicza [17]. Istnieje też bogata literatura dotycząca zmiennych ujemnie stowarzyszonych, co pozwala mieć nadzieję na łatwe przenoszenie wyników z tej teorii do badań zmiennych logarytmicznie wklęsłych o ujemnie stowarzyszonych modułach.

Warto tu zauważyć, że w sposób trywialny ciąg niezależnych zmiennych losowych jest ujemnie stowarzyszony. Niestety — ujemna stowarzyszoność ciągu zmiennych losowych zachodzi, z naszego punktu widzenia, tylko w trywialnym wypadku miar produktowych:

Stwierdzenie 1.4.2. *Jeżeli $(X_1, \ldots, X_n)$ jest wektorem losowym o rozkładzie 1–symetrycznym, oraz ciąg $(X_1, \ldots, X_n)$ jest bardzo słabo ujemnie stowarzyszony, to zmienne X_i są parami niezależne.*

Dowód. Weźmy dowolne $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ i dowolne rosnące funkcje $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Niech $f^\circ(x) = -f(-x)$, funkcja f° również jest funkcją rosnącą. Z 1–symetrii rozkładu wektor (X_i, X_j) ma ten sam rozkład co $(-X_i, X_j)$, zatem

$$0 \geqslant \mathrm{Cov}(f^\circ(X_i), g(X_j)) = \mathrm{Cov}\Big(- f(-X_i), g(X_j)) = -\mathrm{Cov}(f(X_i), g(X_j)\Big).$$

Jeśli zarówno $\mathrm{Cov}(f(X_i), g(X_j))$ jak i $(-\mathrm{Cov}(f(X_i), g(X_j))$ są niedodatnie, to $\mathrm{Cov}(f(X_i), g(X_j)) = 0$. Ta własność zachodzi dla dowolnych i, j, f i g. W szczególności dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$ mamy $\mathbb{P}(X_i \in [a, \infty) \cap X_j \in [b, \infty)) = \mathbb{P}(X_i \in [a, \infty)) \cdot \mathbb{P}(X_j \in [b, \infty))$. Stąd standardowym rozumowaniem przez lemat o $\pi - \lambda$ układach dostajemy, że X_i i X_j są niezależne. □

Widzimy zatem, że poza trywialnym przypadkiem nie należy mieć nadziei na udowodnienie ujemnej stowarzyszoności, nawet w bardzo słabej wersji, dla zmiennych logarytmicznie wklęsłych. Sprawy stają się jednak ciekawsze, gdy rozważymy zmienne $|X_i|$, czyli zaczniemy badać ujemną stowarzyszoność modułów. To motywuje następującą definicję:

Definicja 1.4.3. *Mówimy, że miara μ ma* ujemnie stowarzyszone moduły*, jeżeli dla wektora $X = (X_1, \ldots, X_n)$ o rozkładzie μ ciąg zmiennych $(|X_i|)_{i=1}^n$ jest ujemnie stowarzyszony. Mówimy, że ciało K ma ujemnie stowarzyszone moduły, jeśli miara jednostajna na tym ciele ma ujemnie stowarzyszone moduły.*

Warto tu zauważyć, że na badanie modułów zmiennej 1–symetrycznej możemy spojrzeć też jako na badanie ujemnej stowarzyszoności zmiennych jednostajnie rozłożonych na ciele $L \cap \mathbb{R}_+^n$ — jeśli $(X_1, \ldots, X_n)$ to wektor losowy jednostajnie rozłożony na 1–symetrycznym ciele K, to wektor $(|X_1|, \ldots, |X_n|)$ ma ten sam rozkład, co wektor losowy rozłożony jednostajnie na $K \cap \mathbb{R}_+^n$.

1.4.2 Własność (τ) i koncentracja

Koncentracja miary to zjawisko znajdujące zastosowanie w wielu różnych dziedzinach matematyki. Rozważa się szereg różnych wariantów tego zjawiska. Nas, w największej ogólności, będzie interesowała sytuacja, w której dla ustalonej miary μ znajdziemy taką rodzinę zbiorów $(B_t)_{t>0}$, że dla dowolnego zbioru A spełniającego $\mu(A) \geqslant \frac{1}{2}$ zachodzi $\mu(A + B_t) \geqslant 1 - e^{-t}(1 - \mu(A))$. Wyobraźmy sobie na przykład sytuację, gdy B_t jest odpowiednio przeskalowaną kulą euklidesową, powiedzmy $\sqrt{t}B_2^n$. Koncentracja oznacza wtedy, że dla dowolnego zbioru A jego $\sqrt{t}$–otoczka już dla stosunkowo niewielkich t zaczyna bardzo szybko obrastać w miarę, a miara dopełnienia tej otoczki wykładniczo się kurczy. Takie zjawisko (z $B_t = C\sqrt{t}B_2^n$) ma miejsce np. dla miary gaussowskiej, miary jednostajnej na sferze czy miary jednostajnej na kuli. Prostą konsekwencją koncentracji miary jest koncentracja funkcji Lipszycowskich — zbiór, na którym funkcja Lipszycowska odchyla się o więcej niż t od swojej średniej będzie wykładniczo mały.

Dla inaczej dobranych zbiorów B_t interpretacja geometryczna jest mniej oczywista, lecz wciąż intuicją jest to, że pewne konkretne powiększenie dowolnego zbioru będzie rosnąć wykładniczo szybko.

Własność (τ) została wprowadzona przez B. Maureya w pracy [32]. Służyła temu, by udowodnić tzw. dwupoziomową koncentrację Talagranda dla miary wykładniczej ν^n — koncentrację, w której za zbiory B_t przyjmujemy $C(\sqrt{t}B_2^n + tB_1^n)$. Taka koncentracja jest o wiele bardziej precyzyjna niż koncentracja euklidesowa (w której trzeba, dla miary ν^n, przyjąć $B_t = \max\{t, \sqrt{t}\}B_2^n$). Własność (τ) definiuje się następująco:

Definicja 1.4.4. *Niech μ będzie miarą probabilistyczną na $\mathbb{R}^n$, zaś $\varphi : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ będzie funkcją mierzalną. Powiemy, że para (μ, φ) ma* własność (τ), *jeśli dla dowolnej ograniczonej funkcji mierzalnej $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zachodzi*

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{f\Box\varphi} d\mu \int_{\mathbb{R}^n} e^{-f} d\mu \leqslant 1, \tag{1.4.2}$$

gdzie dla dwóch funkcji f i g zdefiniowanych na $\mathbb{R}^n$

$$f\Box g(x) := \inf\{f(x-y) + g(y) \colon y \in \mathbb{R}^n\}$$

oznacza splot infimum *funkcji f i g.*

Zauważmy, że im większa funkcja φ, tym trudniej spełnić (1.4.2):

Uwaga 1.4.5. *Jeśli para (μ, φ) spełnia własność (τ), zaś $\psi(x) \leqslant \varphi(x)$ dla każdego $x \in \mathbb{R}^n$, to para (μ, ψ) również spełnia (τ).*

Na jednym krańcu skali znajduje się funkcja $\varphi(x) \equiv 0$, dla której (μ, φ) ma własność (τ) dla dowolnej miary μ, na drugim zaś funkcja $\varphi(x) = 0$ dla $x = 0$ i ∞ dla $x \neq 0$ — dla takiej funkcji φ jedynymi miarami, dla których (μ, φ) spełnia (τ) są miary skupione w jednym punkcie.

W swojej pracy Maurey zauważa, że własność (τ) implikuje $\mu(A + B_\varphi(t)) \geqslant 1 - \mu(A)^{-1}e^{-t}$, gdzie

$$B_\varphi(t) := \{x \in \mathbb{R}^n \colon \varphi(x) \leqslant t\}.$$

Poniżej będziemy potrzebować odrobinę silniejszego oszacowania:

Stwierdzenie 1.4.6. *Załóżmy, że para (φ, μ) spełnia własność (τ). Wtedy dla dowolnego Borelowskiego zbioru A oraz dowolnego $t \geqslant 0$,*

$$\mu(A + B_\varphi(t)) \geqslant \frac{e^t \mu(A)}{(e^t - 1)\mu(A) + 1}. \tag{1.4.3}$$

Dowód. Niech $f(x) = t\mathbf{1}_{\mathbb{R}^n \setminus A}$. Wtedy $f(x)$ jest nieujemne na $\mathbb{R}^n$, zatem $f\Box\varphi$ jest nieujemne. Dla $x \notin A + B_\varphi(t)$ mamy $f\Box\varphi(x) = \inf_y(f(y) + \varphi(x-y)) \geqslant t$, bo albo $y \notin A$, i wtedy $f(y) = t$, albo $y \in A$, i wtedy $\varphi(x-y) \geqslant t$ jako że $x \notin A + B_\varphi(t)$.

Zatem z własności (τ) dla f mamy

$$\begin{aligned} 1 &\geqslant \int e^{f\Box\varphi(x)} d\mu(x) \int e^{-f(x)} d\mu(x) \\ &\geqslant \Big[\mu\Big(A + B_\varphi(t)\Big) + e^t\Big(1 - \mu(A + B_\varphi(t))\Big)\Big]\Big[\mu(A) + e^{-t}(1 - \mu(A))\Big], \end{aligned}$$

co po wyłączeniu warunku na $\mu(A + B_\varphi(t))$ poprzez bezpośredni rachunek daje (1.4.3). $\square$

Spójrzmy jeszcze, jaką koncentrację daje nam ten wzór dla odpowiednio dużych i małych zbiorów A:

Wniosek 1.4.7. *Niech A będzie dowolnym zbiorem o mierze dodatniej, zaś t będzie liczbą dodatnią. Załóżmy, że para (φ, μ) spełnia własność (τ). Wtedy*

$$\mu(A + B_\varphi(t)) > \min\{e^{t/2}\mu(A), 1/2\}, \tag{1.4.4}$$

Jeśli dodatkowo $\mu(A) \geqslant 1/2$, to

$$1 - \mu(A + B_\varphi(t)) < e^{-t/2}(1 - \mu(A)) \tag{1.4.5}$$

Dowód. Niech $f_t(p) := e^t p/((e^t - 1)p + 1)$. Zauważmy, że funkcja f_t jest rosnąca w p, oraz dla $p \leqslant e^{-t/2}/2$ mamy

$$(e^t - 1)p + 1 \leqslant e^{t/2} + 1 - \frac{1}{2}(e^{t/2} + e^{-t/2}) < e^{t/2},$$

zatem $f_t(p) > \min(e^{t/2}p, 1/2)$, skąd wobec Stwierdzenia 1.4.6 mamy nierówność (1.4.4). Co więcej dla $p \geqslant 1/2$ mamy

$$1 - f_t(p) = \frac{1-p}{(e^t - 1)p + 1} \leqslant \frac{1-p}{(e^t + 1)/2} < e^{-t/2}(1 - p)$$

skąd otrzymujemy (1.4.5). □

1.4.3 Hipoteza splotu infimum IC

Jednym z pytań, którymi zajmowałem się w ramach swoich studiów doktoranckich było: jakie pary (μ, φ) spełniają własność (τ)? Łatwo zauważyć, że dla dowolnej miary μ para $(\mu, 0)$ spełnia (τ). Co więcej, jeśli para (μ, φ) spełnia (τ), zaś $0 \leqslant \psi \leqslant \varphi$, to para (μ, ψ) również spełnia (τ). Zatem naszym zadaniem będzie dla ustalonej miary μ znalezienie jak najmniejszego φ_μ, dla którego para (μ, φ_μ) spełnia własność (τ). W poszukiwaniu optymalnego φ_μ przypomnijmy wpierw kilka definicji.

Definicja 1.4.8. *Niech $f : \mathbb{R}^n \to (-\infty, \infty]$.* Transformatą Legendre'a *f, oznaczaną $\mathcal{L}f$ nazywamy funkcję $\mathcal{L}f(x) := \sup_{y\in\mathbb{R}^n}\{\langle x, y\rangle - f(y)\}$.*

Transformata Legendre'a funkcji wypukłej jest funkcją wypukłą. Jeśli f jest wypukła i półciągła z dołu, to $\mathcal{L}\mathcal{L}f = f$, w ogólnym przypadku mamy $\mathcal{L}\mathcal{L}f \leqslant f$. Również, jeśli $f \geqslant g$, to $\mathcal{L}f \leqslant \mathcal{L}g$. Transformata Legendre'a spełnia $\mathcal{L}(Cf)(x) = C\mathcal{L}f(x/C)$, zaś jeśli $g(x) = f(x/C)$, to $\mathcal{L}g(x) = \mathcal{L}f(Cx)$. Te oraz inne własności $\mathcal{L}$ można znaleźć np. w monografii [31]. Transformata Legendre'a była już używana w kontekście geometrii wypukłej, np. w [3] i [26].

Mając transformatę Legendre'a możemy zdefiniować funkcje M_μ i $\Lambda^\star_\mu$:

Definicja 1.4.9. *Niech μ będzie miarą probabilistyczną na $\mathbb{R}^n$. Definiujemy*

$$M_\mu(v) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{\langle v,x\rangle} d\mu(x), \quad \Lambda_\mu(v) := \log M_\mu(v)$$

oraz

$$\Lambda^\star_\mu(v) := \mathcal{L}\Lambda_\mu(v) = \sup_{u\in\mathbb{R}^n}\Big\{ \langle v, u\rangle - \ln \int_{\mathbb{R}^n} e^{\langle u,x\rangle} d\mu(x)\Big\}.$$

Funkcja $\Lambda_\mu^\star$ odgrywa kluczową rolę w teorii wielkich odchyleń, patrz np. [15].

Częstokroć w geometrii wypukłej zdarza się, że ekstremalne w pewien sposób w zbiorze wszystkich funkcji okazują się funkcjonały liniowe, tak dzieje się np. dla izoperymetrii sferycznej czy gaussowskiej. To motywuje sprawdzenie, co dzieje się, gdy w definicji wstawimy jako f dowolny funkcjonał liniowy:

Uwaga 1.4.10. *Niech μ będzie symetryczną miarą probabilistyczną na $\mathbb{R}^n$ i niech φ będzie wypukłą funkcja, dla której para (μ, φ) spełnia własność (τ). Wtedy*

$$\varphi(v) \leqslant \Lambda_\mu^\star(v).$$

Dowód. Weźmy $f(x) = \langle x, v\rangle$. Wtedy

$$f\Box\varphi(x) = \inf_y\{f(x-y) + \varphi(y)\} = \inf_y\{\langle x-y, v\rangle + \varphi(y)\} = \langle x, v\rangle - \mathcal{L}\varphi(v).$$

Z własności (τ) otrzymujemy

$$1 \geqslant \int e^{f\Box\varphi} d\mu \int e^{-f} d\mu = e^{-\mathcal{L}\varphi(v)} \int e^{\langle x,v\rangle} d\mu \int e^{-\langle x,v\rangle} d\mu = e^{-\mathcal{L}\varphi(v)} M_\mu^2(v),$$

gdzie w ostatniej równości wykorzystujemy symetrię μ. Zatem logarytmując stronami otrzymujemy $\mathcal{L}\varphi(v) \geqslant 2\Lambda_\mu(v)$, a przykładając transformatę Legendre'a dostajemy $\varphi(v) = \mathcal{L}\mathcal{L}\varphi(v) \leqslant 2\Lambda_\mu^\star(v/2)$. Nierówność $2\Lambda_\mu^\star(v/2) \leqslant \Lambda_\mu^\star(v)$ wynika z wypukłości $\Lambda_\mu^\star$. $\square$

Mamy zatem kandydata na naszą optymalną funkcję φ_μ. Stąd poniższa definicja:

Definicja 1.4.11. *Mówimy, że symetryczna miara probabilistyczna μ spełnia* nierówność splotu infimum ze stałą β *(w skrócie* IC(β)*, od* infimum convolution*), jeśli para $(\mu, \Lambda_\mu^\star(\frac{\cdot}{\beta}))$ ma własność (τ).*

Zauważmy, że funkcja $\Lambda_\mu^\star$ jest wypukła i przyjmuje minimum w zerze, zatem jest rosnąca na $[0, \infty)$ i malejąca na $(-\infty, 0]$. Zatem na mocy uwagi 1.4.5 im mniejsza stała β, tym silniejsza jest własność $IC(\beta)$:

Uwaga 1.4.12. *Jeśli miara μ spełnia $IC(\beta)$, to spełnia również $IC(\gamma)$ dla dowolnego $\gamma > \beta$.*

1.4.4 Hipoteza koncentracyjna CI

Jak już sygnalizowałem, główną motywacją do badania własności (τ) jest próba otrzymania precyzyjnych nierówności koncentracyjnych dla dowolnej miary μ. Zatem warto przetłumaczyć, jak hipoteza IC tłumaczy się na język koncentracji. To motywuje wprowadzenie następujących definicji:

Definicja 1.4.13. *Niech μ będzie miarą probabilistyczną na $\mathbb{R}^n$, a $p \geqslant 1$ liczbą rzeczywistą. Definiujemy następujące zbiory*

$$\mathcal{M}_p(\mu) := \left\{v \in \mathbb{R}^n \colon \int |\langle v, x\rangle|^p d\mu(x) \leqslant 1\right\},$$

$$\mathcal{Z}_p(\mu) := (\mathcal{M}_p(\mu))^\circ = \left\{x \in \mathbb{R}^n \colon |\langle v, x\rangle|^p \leqslant \int |\langle v, y\rangle|^p d\mu(y) \text{ dla każdego } v \in \mathbb{R}^n\right\}$$

i dla $p > 0$

$$B_p(\mu) := \{v \in \mathbb{R}^n \colon \Lambda_\mu^*(v) \leqslant p\}.$$

Zbiory $\mathcal{Z}_p(\mu_K)$ dla $p \geqslant 1$, gdy μ_K jest miarą jednostajną na ciele wypukłym K nazywane są *ciałami L_p–centroidowymi K*. Zostały wprowadzone (z inną normalizacją) w [30], ich własności były też badane w [40].

Hipoteza IC przekłada się bezpośrednio na koncentrację, w której za B_t bierzemy ciała $B_t(\mu)$. Z punktu widzenia zastosowań lepsze jednak są ciała $\mathcal{Z}_t(\mu)$, co motywuje następującą definicję:

Definicja 1.4.14. *Powiemy, że miara μ spełnia* nierówność koncentracyjną ze stałą β *(w skrócie* CI(β)*, od* concentration inequality*), jeżeli dla każdego $p \geqslant 2$ oraz każdego zbioru borelowskiego $A \subset \mathbb{R}^n$ zachodzi*

$$\mu(A) \geqslant \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; 1 - \mu(A + \beta\mathcal{Z}_p(\mu)) \leqslant e^{-p}(1 - \mu(A)). \tag{1.4.6}$$

W części 2.3.2 udowodnimy, że dla dowolnej miary log–wklęsłej własności CI i IC są równoważne. Na razie, w ramach motywacji, poprzestaniemy na następującym stwierdzeniu:

Stwierdzenie 1.4.15. *Niech μ będzie symetryczną miarą log–wklęsłą na $\mathbb{R}^n$, zaś K takim zbiorem wypukłym, że dla dowolnej półprzestrzeni A mamy*

$$\mu(A) \geqslant 1/2 \;\Rightarrow\; 1 - \mu(A + K) \leqslant e^{-p}/2.$$

Wtedy $K \supset c\mathcal{Z}_p$ dla $p \geqslant 4\ln 3$.

Dowód. Ustalmy $v \in \mathbb{R}^n$ i niech $A = \{x : \langle v, x\rangle < 0\}$. Wtedy $A + K = \{x : \langle v, x\rangle < a(v)\}$, gdzie $a(v) = \sup_{x\in K}\langle x, v\rangle$. Wobec symetrii μ, $\mu(A) \geqslant 1/2$. Niech X będzie zmienną losową o rozkładzie takim jak $\langle v, x\rangle$ (gdzie x jest wybierane według miary μ). Wtedy

$$\mathbb{P}(|X| \geqslant a(v)) = 2\mathbb{P}(X \geqslant a(v)) = 2(1 - \mu(A + K)) \leqslant e^{-p}.$$

Z log–wklęsłości miary μ mamy $\|X\|_p \leqslant p\|X\|_q/q$ (patrz Stwierdzenie 2.1.2) dla dowolnego $p \geqslant q \geqslant 2$, gdzie $\|X\|_p = (\mathbb{E}|X|^p)^{1/p}$. Zatem na mocy nierówności Paley'a–Zygmunda (patrz [28], Lemat 0.2.1) otrzymujemy dla $q \geqslant 2$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(|X| \geqslant \|X\|_q/2) &= \mathbb{P}(|X|^q \geqslant 2^{-q}\mathbb{E}|X|^q) \geqslant (1 - 2^{-q})^2\|X\|_q^{2q}/\|X\|_{2q}^{2q}\\ &\geqslant \frac{9}{16}2^{-2q} > 3^{-2q}.\end{aligned}$$

Zatem jeśli $p \geqslant 4\ln 3$ oraz $c = (4\ln 3)^{-1}$,

$$\mathbb{P}(|X| \geqslant c\|X\|_p) \geqslant \mathbb{P}(|X| \geqslant \frac{1}{2}\|X\|_{p/2\ln 3}) > 3^{-p/\ln 3} = e^{-p}.$$

Zatem $c\|X\|_p = c(\int |\langle v, x\rangle|^p d\mu(x))^{1/p} \leqslant a(v)$ i $c\mathcal{Z}_p(\mu) \subset K$. □

1.4.5 Podział wkładu pracy

Niniejsza praca doktorska oparta jest w większości na pracach [48], [41] oraz [29]. Jako, że dwie z tych prac mają po dwóch autorów, warto odnieść się do pytania, w jakim stopniu zaprezentowane wyniki są moim własnym wkładem intelektualnym, a w jakim stopniu żeruję na pracy i myśli innych.

Praca [48] jest moją samodzielną pracą. Nie mogę twierdzić, oczywiście, że na wyniki tej pracy nie miały wpływu inne osoby — nie powstałaby ona bez dr. hab. Rafała Latały, który zasugerował mi rozważany w pracy problem, a także bez wysiłku wielu osób, które szkoliły mnie w matematyce, i których sposób myślenia i uprawiania matematyki z pewnością wywarł wpływ na to, co wymyśliłem. Jednakże bez większych wątpliwości mogę zapewnić, że wyniki z tej pracy (w rozprawie doktorskiej reprezentowane przez przykład (2.2.4), Twierdzenie 5.2.1 oraz pewną część lematów przygotowawczych do Twierdzenia 5.3.17) są moimi samodzielnymi pomysłami w takim stopniu, w jakim samodzielnymi mogą być dowolne pomysły matematyka, który korzystał z dobrodziejstw formalnej edukacji.

Praca [41] powstała wspólnie z moim młodszym kolegą, Marcinem Pilipczukiem. Podstawowym wynikiem tej pracy był dowód Twierdzenia 5.3.17. Przedstawiony w [41] dowód był bardzo techniczny, w szczególności opierał się na indukcji pozaskończonej. W niniejszej pracy prezentuję alternatywny dowód, pochodzący już ode mnie. Oprócz jednak jednego nowego pomysłu (zastąpienia podziału na zbiory dodatniej miary podejściem w stylu lematu lokalizacyjnego) oraz lematów potrzebnych do jego implementacji opiera się on na pomysłach, które wypracowaliśmy wspólnie z Marcinem. Podstawowe używane przeze mnie narzędzia (takie jak Lemat 5.3.11 czy warunek Θ) powstały podczas wspólnych rozmów i wymieniania myśli, i nie sposób w jakikolwiek sposób powiedzieć „ten pomysł jest Marcina, a ten mój". Jedynym większym pomysłem w [41], o którym bez wątpliwości mogę powiedzieć, że jest mój jest przejście od słabej ujemnej stowarzyszoności do ujemnej stowarzyszoności, w obecnym kształcie odpowiadające przejściu od Lematu 5.3.14 do Lematu 5.3.16. Za czasów, gdy pisałem pracę [41], cieszyłem się z tak wspólnego charakteru uzyskiwanych wyników, bo dowodziło to mojej umiejętności współpracy matematycznej (wszystkie trzy prace poprzedzające [41] publikowałem samodzielnie). Z omawianej pracy [41] w niniejszej rozprawie pochodzą części 2.2 oraz 4.3 oraz podwaliny pod rozdział 5.

Praca [29] powstała w wyniku współpracy z moim promotorem, dr. hab. Rafałem Latałą. Tu z kolei, z zapewne oczywistych powodów, więcej wiedzy i doświadczenia wniósł Rafał. Inny też nieco był tryb pracy — więcej czasu myśleliśmy samodzielnie, mniej czasu spędzaliśmy na rozmowach i błyskawicznym przerzucaniu się myślami. Można by zatem pokusić się o bardziej precyzyjne rozgraniczenie tego, co pochodzi od którego z nas. Przykładowo w części 3.3 (która, jeśli chodzi o ilość mojego wkładu, jest zdecydowanie nadreprezentatywna) „swoimi" nazwałbym Lematy 3.3.1, 3.3.3 oraz pomysł stojący za Twierdzeniem 3.3.6, natomiast wynikiem myślenia Rafała są Lemat 3.3.5 oraz Stwierdzenie 3.3.4. Ale nawet tam, gdzie daje się jednoznacznie zidentyfikować osobę, która wpadła na konkretny pomysł, muszę zaznaczyć, że — jako, że pracowaliśmy wspólnie i wymienialiśmy sporo uwag i przemyśleń — w częściach, które nazwę „swoimi" jest z pewnością ślad sposobu myślenia, narzędzi matematycznych i podejścia Rafała, zaś mam też nadzieję, że przynajmniej w niektórych częściach „Rafała" jest jakiś pierwiastek mojego toku myślenia. Co więcej, poszczególne lematy nie są wiele warte, dopóki nie składają się w końcowy wynik — a, przynajmniej przez pewien czas, żadnemu z nas nie udało się poprowadzić samodzielnego, własnego rozumowania dowodzącego (w tym wypadku) Twierdzenia 3.3.6. Wszystkie te problemy czynią zatem problem rozgraniczania wkładu, w moim odczuciu, raczej jałowym. Ja wiem, że bez udziału Rafała tej pracy by nie napisał, sądzę też, że gdyby Rafałowi przyszło pisać ją samemu, to byłoby mu nieco trudniej i zapewne wynik końcowy miałby inny kształt. Jedyną częścią, w której mój wkład jest na tyle mały, żebym czuł potrzebę to zaznaczyć jest „przygotowywanie gruntu" (w tej rozprawie w większości zawarte w części 2.3), które w przytłaczającej większości Rafał przemyślał i uporządkował, zanim ja dołączyłem się do pracy.

1.5 Podziękowania

To dość duża praca (w szczególności jest to największy blok tekstu, jaki dotychczas w życiu napisałem). Zatem zbierze się sporo podziękowań.

Dziękuję przede wszystkim mojemu promotorowi, dr. hab. Rafałowi Latale. Dziękuję za przygarnięcie mnie pod swoje skrzydła pomimo tego, że nie narzekał na niedobór zajęć. Dziękuję za wskazanie tematu do badań, który okazał się być dla mnie ciekawy, i w którym okazało się, że mogę coś nowego wymyśleć. Dziękuję też za niekończącą się cierpliwość do mojej, momentami dość daleko posuniętej, niefrasobliwości, za wszystkie te momenty, kiedy uzupełniał i naprawiał moje rozliczne błędy, niedociągnięcia i niedopatrzenia. No i dziękuję za czas wspólnie spędzony nad matematyką, który — oprócz przyniesienia owoców w postaci wyników — był dla mnie pod wieloma względami bardzo kształcący.

Dziękuję prof. Henrykowi Woźniakowskiemu, który wprowadził mnie na drogę matematyki badawczej, pomógł napisać i zredagować moją pierwszą publikację oraz wprowadził mnie na studia doktoranckie. Dziękuję mu też za liczne rady, oraz za to, że umożliwił mi zmianę promotora w trakcie trwania studiów doktoranckich.

Dziękuję swojemu tacie, prof. Przemysławowi Wojtaszczykowi, za wsparcie podczas stawiania pierwszych kroków w matematyce i cierpliwe wysłuchiwanie moich pomysłów, w tym za uważną lekturę drugiej z moich publikacji.

Dziękuję Marcinowi Pilipczukowi za czas spędzony na Wrzecionie, który zaowocował między innymi sporą częścią wyników dla kul Orlicza. Za część tego czasu pewnie powinienem podziękować też Oli.

Dziękuję niektórym z recenzentów moich prac (w szczególności prac „A series whose sum range is an infinite set” oraz „On the infimum convolution inequality”) za sumienne przeczytanie moich, niekiedy niezbyt lekkich prac, i twórcze uwagi. Miło wiedzieć, że większość recenzentów, na których trafiłem naprawdę przykłada się do tego, co robi i stara się porządnie ocenić to, co czyta. Wasze „I recommend publishing” było dla mnie sporo warte. W szczególności dziękuję recenzentowi pierwszej z tych prac, który oprócz porządnego przeczytania pracy zdołał ją istotnie ulepszyć.

Podziękowania należą się różnym osobom, z którymi rozmawiałem podczas myślenia nad tą pracą, i których uwagi — nawet niekoniecznie związane z matematyką — niekiedy naprowadzały mnie na nowy trop myślenia. W szczególności chcę tu wymienić Grażynę i Iwonę, z którymi rozmawiając wpadłem na argument gęstościowy w dowodzie Lematu 5.3.9.

Dziękuję za wsparcie we wszelkich dziedzinach życia osobom, które mnie wspierały. Wszystkich tych osób, oczywiście, nie da się wymienić, ale bez wymienienia kilku z nich czułbym się strasznie nieuczciwy. Dziękuję zatem mamie za to, że ciągle chce jej się do mnie uśmiechać i we mnie wierzyć. Dziękuję Magdzie za wspólnie spędzone dni i wiarę we mnie. Dziękuję Iwonie i Łukaszowi za rozmowę w chwilach, kiedy bardzo potrzebowałem rozmowy. Kubie również dziękuję za rozmowy, a nadto za wspólnie spędzony czas na Natolinie. No i dziękuję Grażynie. Za to, że chce mi się pisać ten doktorat.

Rozdział 2

Ogólne zmienne logarytmicznie wklęsłe

Zaczniemy pracę od przyjrzenia się faktom, które zachodzą dla dowolnej zmiennej log–wklęsłej. W tym rozdziale sformułujemy pewne ogólne fakty i kryteria, których będziemy potem używać w konkretnych przypadkach. Zastanowimy się też konsekwencjami własności IC, CI oraz ujemnej stowarzyszoności modułów, zatem rozdział ten można traktować jako nieco przydługie podsumowanie treści całej pracy.

2.1 Znane fakty

Zanim zaczniemy analizować nowsze wyniki, przypomnijmy kilka faktów, które w tej dziedzinie są znane od pewnego czasu, a z których przyjdzie nam korzystać.

2.1.1 Zmienne jednowymiarowe

Zmienne logarytmicznie wklęsłe (lub, nieomalże równoważnie, miary przecięć ciał wypukłych podprzestrzeniami liniowymi) były badane od dłuższego czasu. Dość często przy tych badaniach pojawia się potrzeba oszacowania wartości czy momentów jednowymiarowej zmiennej logarytmicznie wklęsłej. Okazuje się, że po ustaleniu zerowego, pierwszego i drugiego momentu zmienna log–wklęsła już jest stosunkowo „szytwna". Istnieje wiele wyników tego typu, nam przyda się pochodząca od Hensley'a [21] następująca nierówność:

Lemat 2.1.1. *Niech g będzie gęstością jednowymiarowej symetrycznej zmiennej logarytmicznie wklęsłej o wariancji 1. Wtedy $g(0) \geqslant \frac{1}{2\sqrt{3}}$.*

Istnieją tez ograniczenia na gęstość w zerze z góry. Okazuje się też, że nie tylko gęstość w zerze, ale także momenty zmiennej log–wklęsłej zachowują się w przewidywalny sposób:

Stwierdzenie 2.1.2. *Niech μ będzie symetryczną miarą logarytmicznie wklęsłą na $\mathbb{R}^n$. Wtedy dla dowolnego $p \geqslant q \geqslant 2$ i dowolnego $v \in \mathbb{R}^n$ zachodzi*

$$\Big(\int | \langle v, x\rangle |^p d\mu(x)\Big)^{1/p} \leqslant \frac{p}{q}\Big(\int | \langle v, x\rangle |^q d\mu(x)\Big)^{1/q}. \tag{2.1.1}$$

Własność (2.1.1) nazywana jest *1–regularnością* miary μ.

Dowód. Niech X będzie wektorem losowym o rozkładzie μ. Skoro μ jest symetryczna i log–wklęsła, to zmienna losowa $S = \langle u, X\rangle$ ma rozkład log–wklęsły na prostej. Musimy pokazać, że $(\mathbb{E}|S|^p)^{1/p} \leqslant \frac{p}{q}(\mathbb{E}|S|^q)^{1/q}$ dla $p \geqslant q \geqslant 2$. Barlow, Marshall i Proschan [5] (patrz też dowód Uwagi 5 w [27]) pokazali, że

$$(\mathbb{E}|S|^p)^{1/p} \leqslant \frac{(\Gamma(p+1))^{1/p}}{(\Gamma(q+1))^{1/q}}(\mathbb{E}|S|^q)^{1/q},$$

więc wystarczy pokazać, że funkcja $f(x) := \frac{1}{x}(\Gamma(x+1))^{1/x}$ jest nierosnąca na $[2,\infty)$. Wzór Bineta (będący precyzyjniejszą formą wzoru Stirlinga, patrz [1, Twierdzenie 1.6.3]) daje nam

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) = \sqrt{2\pi}x^{x+1/2}e^{-x+\xi(x)},$$

gdzie $\xi(x) = \int_0^\infty \operatorname{arctg}(t/x)(e^{2\pi t}-1)^{-1}dt$ jest funkcją malejącą. Zatem

$$\ln f(x) = \frac{\xi(x)}{x} + \frac{\ln(2\pi x)}{2x} - 1$$

jest faktycznie funkcją rosnącą na $[2,\infty)$. □

2.1.2 Położenia, położenie izotropowe

Dla dowolnego ciała wypukłego przez *położenie* tego ciała rozumiemy jego obraz w przekształceniu afinicznym pełnego rzędu. Intuicją, która stoi za tym określeniem jest to, że zmiana położenia ciała w przestrzeni nie powinna wpływać istotnie na jego własności. W geometrii wypukłej wyróżnia się szereg różnych istotnych położeń (np. takie, w którym wpisana elipsoida o największej objętości jest kulą, analogicznie dla opisanej elipsoidy, i szereg innych). Nas, z powodu probabilistycznego podejścia do geometrii wypukłej, będzie interesowało tzw. *położenie izotropowe*. Wpierw zdefiniujemy pojęcie izotropowości dla wektorów losowych:

Definicja 2.1.3. *Mówimy, że wektor losowy X na $\mathbb{R}^n$ jest izotropowy, gdy $\mathbb{E}X = 0$ oraz dla każdego wektora jednostkowego θ mamy*

$$\mathbb{E}\langle X,\theta\rangle^2 = 1.$$

Mówimy, że miara probabilistyczna μ jest izotropowa, gdy wektor losowy o rozkładzie μ jest izotropowy.

Wprowadźmy w $\mathbb{R}^n$ ortonormalny układ współrzędnych $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Niech $X_i = \langle e_i, X\rangle$. Wtedy powyższa definicja jest równoważna następującemu warunkowi:

$$\mathbb{E}X_i = 0 \text{ oraz } \mathbb{E}X_iX_j = \delta_{ij}.$$

Faktycznie, jeśli ten warunek jest spełniony, to

$$\mathbb{E}\langle X,\theta\rangle^2 = \sum_{i,j}\mathbb{E}X_iX_j\theta_i\theta_j = \sum_i \theta_i^2 = 1.$$

Zauważmy, że każda miara ma położenie izotropowe.

Stwierdzenie 2.1.4. *Dla dowolnej probabilistycznej miary μ, która nie jest skupiona na żadnej podprzestrzeni aficznej i dla której $\int |x|^2 d\mu(x) < \infty$ istnieje takie przekształcenie afiniczne A, że miara $\mu \circ A^{-1}$ jest izotropowa.*

Dowód. Bez straty ogólności mogę założyć, że $\int x d\mu(x) = 0$. Niech C będzie macierzą kowariancji μ, czyli $c_{ij} = \mathbb{E}X_iX_j$. Jeżeliby ta macierz była zdegenerowana, to istnieje taki niezerowy wektor v, że $v^TCv = 0$, czyli $\mathbb{E}\langle v, X_i\rangle^2 = 0$. Z tego oczywiście wynika $\langle X_i, v\rangle = 0$ prawie na pewno, czyli X, wbrew założeniom, jest skupiona na przestrzeni $v^\perp$. Wobec tego C jest odwracalna. Co więcej, C jest nieujemnie określona, a zatem istnieje taka macierz A, że $A^TCA = \mathrm{I}$. A jest szukaną macierzą, bo $\mathrm{Cov}AX = A^TCA$. □

Dla ciał wypukłych naturalna jest inna normalizacja. Niech X_K oznacza wektor losowy o rozkładzie jednostajnym na K. Powiemy, że ciało K jest *w położeniu izotropowym*, jeśli ma objętość 1 oraz istnieje taka stała L_K, że wektor X_K/L_K jest izotropowy. Stałą L_K nazywamy *stałą izotropową* ciała K. Zauważmy, że dowolne ciało wypukłe K da się przekształcić przekształceniem afinicznym w pozycję izotropową — wpierw przekształceniem afinicznym tak, by miara jednostajna na ciele była izotropowa, a potem jednokładnością tak, by objętość ciała stała się jednością.

Jednym z najistotniejszych problemów całej teorii asymptotycznej geometrii wypukłej jest hipoteza zwana „slicing conjecture”, którą można sformułować następująco:

Hipoteza 1. *Istnieje taka stała C, że dla każdego ciała wypukłego K w pozycji izotropowej stała L_K (czyli $\sqrt{\mathbb{E}X_i^2}$) jest nie większa niż C.*

Dowód tej hipotezy dla ciał 1–symetrycznych można znaleźć np. w pracy Bobkova i Nazarova [10]. Jako, że większość naszych wyników będzie dotyczyła konkretnych klas ciał 1–symetrycznych, to nie będziemy zajmować się tą hipotezą w dalszej części pracy. Nie da się jednak wykluczyć (i należy mieć nadzieję), że rozwijane w pracy metody mogą się przydać również w walce z tym problemem.

2.2 Ujemna stowarzyszoność modułów

Będziemy badać własność ujemnej stowarzyszoności dla różnych klas funkcji (funkcji rosnących po współrzędnych, oraz, jako dodatek dla kul B_p^n, dla funkcji rosnących po promieniach). Załóżmy chwilowo, że w definicji 1.4.1 mamy $k + l = n$, by to osiągnąć możemy zdefiniować $\tilde{g}(x_{j_1}, \ldots, x_{j_l}, x_{r_1}, \ldots, x_{r_{n-l-k}}) = g(x_{j_1}, \ldots, x_{j_l})$. Wygodniej będzie badać w–zbiory i p–zbiory zamiast funkcji, co motywuje sformułowanie następującego prostego lematu:

Lemat 2.2.1. *Niech μ będzie dowolną miarą probabilistyczną na $\mathbb{R}_+^n$ i niech $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ będzie wektorem losowym o rozkładzie μ. Załóżmy, że dla danych $0 \leqslant k, l \leqslant n$ mamy dwie rodziny funkcji ograniczonych: $\mathcal{F}$ na $\mathbb{R}_+^k$ i $\mathcal{G}$ na $\mathbb{R}_+^l$. Niech $\mathcal{A} = \{f^{-1}(-\infty, t] : f \in \mathcal{F}, t \in \mathbb{R}\}$, i analogicznie $\mathcal{B}$ dla $\mathcal{G}$. Wtedy jeżeli nierówność*

$$\mu(A \times B)\mu(\bar{A} \times \bar{B}) \leqslant \mu(A \times \bar{B})\mu(\bar{A} \times B), \tag{2.2.1}$$

zachodzi dla każdego $A \in \mathcal{A}$ oraz $B \in \mathcal{B}$, to nierówność (1.4.1) zachodzi dla X i dowolnych $f \in \mathcal{F}, g \in \mathcal{G}$.

W szczególności, jeśli nierówność (2.2.1) zachodzi dla dowolnego k i dowolnych w–zbiorów A, B, to zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots, X_n$ są ujemnie stowarzyszone.

Dowód. Weźmy dowolne dwie funkcje $\mathcal{F} \ni f : \mathbb{R}_+^k \to \mathbb{R}$ i $\mathcal{G} \ni g : \mathbb{R}_+^l \to \mathbb{R}$. Jako, że kowariancja jest dwuliniowa i jest zerem, jeżeli którakolwiek z funkcji jest stała, możemy założyć, że f i g są nieujemne. Dla nieujemnych funkcji mamy

$$f(x) = \int_0^\infty \mathbf{1}_{f^{-1}(t,\infty)}(x)\, dt.$$

Zatem (znowu z dwuliniowości kowariancji) mozemy się ograniczyć do funkcji f i g postaci $1 - \mathbf{1}_A$ and $1 - \mathbf{1}_B$, gdzie $A \in \mathcal{A}$ i $B \in \mathcal{B}$. Skoro $\mathrm{Cov}(1 - \mathbf{1}_A, 1 - \mathbf{1}_B) = \mathrm{Cov}(\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B)$, musimy udowodnić, że $\mathrm{Cov}(\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B) \leqslant 0$.

Przez $\mathbf{X}$ oznaczmy k–wymiarowy wektor $(X_{i_1}, \ldots, X_{i_k})$ złożony ze współrzędnych, na których działa f, zaś przez $\mathbf{Y}$ l–wymiarowy wektor, na którym działa g. Wtedy

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}\Big(\mathbf{1}_A(\mathbf{X}), \mathbf{1}_B(\mathbf{Y})\Big) &= \mathbb{E}\mathbf{1}_A(\mathbf{X})\mathbf{1}_B(\mathbf{Y}) - \mathbb{E}\mathbf{1}_A(\mathbf{X})\mathbb{E}\mathbf{1}_B(\mathbf{Y}) = \mu(A \times B) - \mu(A \times \mathbb{R}^l)\mu(\mathbb{R}^k \times B)\\ &= \mu(A \times B)\mu\Big((A \cup \bar{A}) \times (B \cup \bar{B})\Big) - \mu\Big(A \times (B \cup \bar{B})\Big)\mu\Big((A \cup \bar{A}) \times B\Big)\\ &= \mu(A \times B)\mu(\bar{A} \times \bar{B}) - \mu(A \times \bar{B})\mu(\bar{A} \times B),\end{aligned}$$

co jest nieujemne ze wzoru (2.2.1). □

Przez chwilę skoncentrujmy się na bardzo słabej ujemnej stowarzyszoności modułów. Wtedy rodziną $\mathcal{A}$ jest rodzina półprostych skierowanych w lewo w $\mathbb{R}$, zaś rodziną $\mathcal{B}$ jest rodzina $B \times \mathbb{R}^{n-2}$, gdzie B jest półprostą skierowaną w lewo. Rozważmy teraz miarę μ z gęstością m. Niech $u(x, y)$ oznacza $\int_{\mathbb{R}^{n-2}} m(x, y, v)dv$. Aby udowodnić (2.2.1) trzeba sprawdzić

$$\int_0^a \int_0^b \int_a^\infty \int_b^\infty u(x, y)u(x', y')dx'dy'dxdy \leqslant \int_0^a \int_b^\infty \int_a^\infty \int_0^b u(x, y')u(x', y)dxdy'dx'dy. \quad (2.2.2)$$

W szczególności, oczywiście, wystarczyłoby (choć nie jest równoważne) sprawdzić nierówność

$$u(x, y)u(x', y') \leqslant u(x, y')u(x', y) \quad (2.2.3)$$

dla $0 \leqslant x \leqslant x'$, $0 \leqslant y \leqslant y'$.

Fakt, że nawet bardzo słaba ujemna stowarzyszoność modułów nie zachodzi dla ogólnych miar logarytmicznie wklęsłych był od pewnego czasu znany, natomiast wzór powyżej pozwala nam podać przykład bardzo przyzwoitej miary, dla której zachodzi nierówność w przeciwną stronę. Niech $K \subset \mathbb{R}^3$ będzie kulą w normie zadanej wzorem

$$\|(x, y, z)\| = \max\{|x|, |y|\} + |z|, \quad (2.2.4)$$

zaś μ znormalizowaną miarą jednostajną na K. Zauważmy, że $u(x, y) = c(1 - \max\{|x|, |y|\})$ dla $|x|, |y| \leqslant 1$, 0 w przeciwnym wypadku. W nierówności (2.2.3) możemy bez straty ogólności założyć, że $x' \geqslant y'$, wtedy dla $0 \leqslant x \leqslant y' \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant y' \leqslant 1$ mamy

$$\begin{aligned}u(x, y')u(x', y) - &u(x, y)u(x', y')\\ &= c^2(1 - \max\{x', y\})(1 - \max\{x, y'\}) - c^2(1 - \max\{x, y\})(1 - \max\{x', y'\})\\ &= c^2(1 - x')(1 - \max\{x, y'\}) - c^2(1 - x')(1 - \max\{x, y\})\\ &= c^2(1 - x')(\max\{x, y\} - \max\{x, y'\}).\end{aligned}$$

Jako, że założyliśmy $x' \leqslant 1$, to pierwszy nawias jest zawsze nieujemny, pozostaje zatem rozważyć znak drugiego nawiasu. Jako, że $y' \geqslant y$, to drugi nawias jest niedodatni, a dla $y' > \max\{x, y\}$ jest ujemny. Zatem nierówność (2.2.2) zachodzi w przeciwną stronę, co oznacza, że moduły pierwszej i drugiej współrzędnej są dodatnio, a nie ujemnie stowarzyszone.

2.2.1 Proste fakty o proporcjach

Podczas pracy nad ujemną stowarzyszonością modułów częstokroć będzie się trafiać potrzeba porównania całek z tych samych lub w jakiś sposób związanych ze sobą funkcji po różnych zbiorach. Warto więc zatem zebrać informacje o takich porównaniach. Ta część nie dotyczy zatem bezpośrednio tematu pracy — rozkładów logarytmicznie wklęsłych czy własności probabilistycznych — natomiast zbiera szereg lematów, które będą nam przy dalszej pracy nad ujemną stowarzyszonością potrzebne. Czytelnik zapewne sam z łatwością udowodniłby każdy z nich, lecz dla zupełności wywodu postanowiłem zgromadzić je w jednym miejscu i zamieścić dowody.

Fakt 2.2.2. *Niech $a, b \geqslant 0$ i $c, d > 0$. Wtedy następujące warunki są równoważne:*

- $\frac{a}{c} \geqslant \frac{b}{d}$,
- $\frac{a}{c} \geqslant \frac{a+b}{c+d}$,
- $\frac{a+b}{c+d} \geqslant \frac{b}{d}$.

Jeśli w którejkolwiek z nierówności zachodzi równość, wszystkie wymienione ułamki są równe.

Fakt ten nie wymaga dowodu.

Lemat 2.2.3. *Niech μ będzie miarą na $\mathbb{R}$ o nośniku $[l_\mu, r_\mu]$ (dopuszczamy również wartości nieskończone). Niech $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ będą funkcjami ograniczonymi na $\operatorname{supp} \mu$. Załóżmy dodatkowo, że*

1. *Nośnikiem każdej funkcji $u \in \{f, g, h\}$ jest odcinek $[l_u, r_u]$ (być może nieograniczony),*
2. *Każda funkcja $u \in \{f, g, h\}$ jest ściśle dodatnia na (l_u, r_u),*
3. *$\frac{f}{g}$ jest malejąca na swojej dziedzinie, i $r_f \leqslant r_g$,*
4. *h jest rosnąca.*

Wtedy:

(1a) Dla dowolnych $a < b < c$, $b \in (l_\mu, r_\mu) \cap (l_g, r_g)$ zachodzi

$$\frac{\int_a^b f(x)d\mu}{\int_a^b g(x)d\mu} \geqslant \frac{f(b)}{g(b)} \text{ i } \frac{f(b)}{g(b)} \geqslant \frac{\int_b^c f(x)d\mu}{\int_b^c g(x)d\mu}.$$

(1b) Co więcej, jeśli dla pewnych $a < b < c$ mamy dwie równości w (1a), to $\frac{f(x)}{g(x)}$ jest stała na $(a, c) \cap \operatorname{supp} g \cap \operatorname{supp} \mu$ i dla dowolnych $a \leqslant s < t \leqslant c$ zachodzi

$$\frac{\int_s^t f(x)d\mu}{\int_s^t g(x)d\mu} = f(b)/g(b)$$

jeśli lewa strona jest określona.

(2a) Dla dowonych punktów a, b, c, d spełniających $a < b \leqslant d$ oraz $a \leqslant c < d$ zachodzi:

$$\frac{\int_a^b f(x)d\mu}{\int_a^b g(x)d\mu} \geqslant \frac{\int_c^d f(x)d\mu}{\int_c^d g(x)d\mu}$$

o ile obydwie strony są określone.

(2b) Co więcej, jeśli ta nierówność staje się równością i przynajmniej jedna z liczb $\int_a^c g(x)d\mu(x)$ oraz $\int_b^d g(x)d\mu(x)$ jest ściśle dodatnia, to $\frac{f}{g}$ jest stała na $[a, d]$ tam, gdzie jest określona i równość zachodzi dla dowolnych $a \leqslant a' \leqslant b' \leqslant d' \leqslant d$ oraz $c' \in [a', d']$ jeśli obie strony są określone.

(3) Jeśli $l_g = l_f$, następująca nierówność zachodzi dla dowolnego odcinka I

$$\frac{\int_I f(x)d\mu(x)}{\int_I g(x)d\mu(x)} \geqslant \frac{\int_I f(x)h(x)d\mu(x)}{\int_I g(x)h(x)d\mu(x)},$$

o ile obydwie strony są określone.

Dowód. (1a) Rozważmy pierwszą nierówność. Niech $a' = \max\{l_\mu, l_g, a\}$. Mamy $a \leqslant a' < b$. Mamy też $\int_a^b g(x)d\mu(x) = \int_{a'}^b g(x)d\mu(x) > 0$ i $g > 0$ na $(a', b]$. Zatem

$$\frac{\int_a^b f(x)d\mu(x)}{\int_a^b g(x)d\mu(x)} \geqslant \frac{\int_{a'}^b f(x)d\mu(x)}{\int_{a'}^b g(x)d\mu(x)} = \frac{\int_{a'}^b g(x)\frac{f(x)}{g(x)}d\mu(x)}{\int_{a'}^b g(x)d\mu(x)} \geqslant \frac{\int_{a'}^b g(x)\frac{f(b)}{g(b)}d\mu(x)}{\int_{a'}^b g(x)d\mu(x)} = \frac{f(b)}{g(b)},$$

Podobne rozumowanie dla $c' = \min\{r_\mu, r_g, c\}$ dowodzi drugiej nierówności (warto zauważyć, że $r_f \leqslant r_g$, zatem pierwsza nierówność w powyższym rozumowaniu staje się równością).

(1b) Jeśli zachodzi równość, to $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(b)}{g(b)}$ dla prawie wszystkich $x \in (a', c')$, jako że g jest ściśle dodatnia na (a', c'). Skoro $\frac{f}{g}$ jest funkcją malejącą i stałą na prawie całym (a', c'), musi być stałe na całym odcinku, i zatem

$$\frac{\int_s^t f(x)d\mu(x)}{\int_s^t g(s)d\mu(x)} = \frac{f(b)}{g(b)}$$

jeśli jest określone dla dowolnych $s, t \in (a', c')$. Wiemy, że $\int_a^{a'} g(x)d\mu(x) = \int_{c'}^c g(x)d\mu(x) = 0$, a zatem — skoro w (1a) zachodziły równości — musimy też mieć $\int_a^{a'} f(x)d\mu(x) = \int_{c'}^c f(x)d\mu(x) = 0$, zatem $\int_s^t f(x)d\mu(x) = \int_{(s,t)\cap(a',c')} f(x)d\mu(x)$ i podobnie dla g, skąd teza.

(2a) Niech $F(x, y) = \int_x^y f(t)$ i $G(x, y) = \int_x^y g(t)$. Jako, że lewa strona jest dobrze określona, $G(a, b) > 0$ a zatem i $G(a, d) > 0$. Stosujemy *(1a)* aby dostać:

$$\frac{F(a,b)}{G(a,b)} \geqslant \frac{F(b,d)}{G(b,d)} \tag{2.2.5}$$

jeśli $b \in (l_g, r_g) \cap (l_\mu, r_\mu)$, i z Faktu 2.2.2 otrzymujemy

$$\frac{F(a,b)}{G(a,b)} \geqslant \frac{F(a,b) + F(b,d)}{G(a,b) + G(b,d)} = \frac{F(a,d)}{G(a,d)}.$$

Jeśli prawa strona w (2.2.5) nie była dobrze określona, $G(b, d) = 0$ i wobec tego $F(b, d) = 0$, bo $r_f \leqslant r_g$, zatem $\frac{F(a,b)}{G(a,b)} \geqslant \frac{F(a,d)}{G(a,d)}$. Podobnie z *(1a)*

$$\frac{F(a,c)}{G(a,c)} \geqslant \frac{F(c,d)}{G(c,d)}$$

jeśli $c \in (l_g, r_g) \cap (l_\mu, r_\mu)$, i znowu z Faktu 2.2.2

$$\frac{F(a,d)}{G(a,d)} \geqslant \frac{F(c,d)}{G(c,d)}.$$

Ponownie jeśli lewa strona nie była dobrze zdefiniowana, $G(a, d) = G(c, d)$, zaś $F(a, d) \geqslant F(c, d)$, więc otrzymujemy tę samą nierówność. Łącząc otrzymane dwie nierówności, otrzymujemy tezę.

(2b) Załóżmy, że $G(b,d) > 0$. Jako, że

$$\frac{F(a,b)}{G(a,b)} \geqslant \frac{F(a,d)}{G(a,d)} \geqslant \frac{F(c,d)}{G(c,d)},$$

a pierwsze i ostatnie wyrażenie mają być równe, wszystkie nierówności są *de facto* równościami. Zatem z pierwszej z nich oraz Faktu 2.2.2 otrzymujemy

$$\frac{F(a,b)}{G(a,b)} = \frac{F(b,d)}{G(b,d)}$$

i stosując *(1b)* dostajemy tezę.

(3) Niech $I' = I \cap \operatorname{supp} g$. Skoro $\operatorname{supp} f \subset \operatorname{supp} g$ wszystkie występujące w tezie całki po I są równe odpowiednim całkom po I'. Rozważmy funkcje h oraz $\frac{f}{g}$ na odcinku $\operatorname{Int} I'$ (funkcja $\frac{f}{g}$ jest dobrze określona na $\operatorname{Int} I'$) oraz miarę z gęstością $\frac{g(x)}{\int_{I'} g(t) d\mu(t)} d\mu$ (całka w mianowniku jest dodatnia, bo lewa strona w tezie była dobrze określona). Z ciągłej wersji nierówności ciągów jednomonotonicznych (zwanej też ciągłą nierównością Czebyszewa, tj. dla rosnącej F oraz malejącej G zachodzi $\int F \int G \geqslant \int FG \int 1$) otrzymujemy

$$\int_{I'} h(x) \frac{g(x)}{\int_{I'} g(t) d\mu(t)} d\mu(x) \int_{I'} \frac{f(x)}{g(x)} \frac{g(x)}{\int_{I'} g(t) d\mu(t)} d\mu(x)$$
$$\geqslant \int_{I'} h(x) \frac{f(x)}{g(x)} \frac{g(x)}{\int_{I'} g(t) d\mu(t)} d\mu(x) \int_{I'} \frac{g(x)}{\int_{I'} g(t) d\mu(t)} d\mu(x).$$

Mnożąc stronami przez $[\int_{I'} g(t) d\mu(t)]^2$ dostajemy tezę.

□

Lemat 2.2.4. *Niech μ będzie miarą na $I \subset \mathbb{R}$. Niech funkcje $f, g, p, q : I \to \mathbb{R}$ spełniają $f(x)g(y) \geqslant f(y)g(x)$ dla $x \geqslant y$ oraz $p(x)q(y) \leqslant p(y)q(x)$ dla $x \geqslant y$. Wtedy*

$$\int_I p(x) f(x) d\mu(x) \int_I q(x) g(x) d\mu(x) \leqslant \int_I p(x) g(x) d\mu(x) \int_I q(x) f(x) d\mu(x).$$

Dowód. Musimy udowodnić

$$\int_I \int_I p(x) f(x) q(y) g(y) \, d\mu(y) \, d\mu(x) \leqslant \int_I \int_I p(y) f(x) q(x) g(y) \, d\mu(y) \, d\mu(x).$$

Mnożąc stronami przez dwa i zamieniając zmienne x i y dostajemy równoważne formy:

$$\int_I \int_I \Big[p(x)f(x)q(y)g(y) + p(y)f(y)q(x)g(x) - p(x)f(y)q(y)g(x) - p(y)f(x)q(x)g(y)\Big] \, d\mu(y) \, d\mu(x) \leqslant 0$$

oraz

$$\int_I \int_I \Big(p(x)q(y) - p(y)q(x)\Big)\Big(f(x)g(y) - f(y)g(x)\Big) \, d\mu(y) \, d\mu(x) \leqslant 0,$$

co wynika bezpośrednio z założeń, bo funkcja podcałkowa jest zawsze niedodatnia. □

2.2.2 Konsekwencje

Tak, jak już wspominałem w części 1.4.1, pierwotną motywacją do tego kierunku badań było Centralne Twierdzenie Graniczne. Okazało się jednak, że niezależnie od wyników związanych z

Centralnym Twierdzeniem Granicznym stosunkowo łatwo ujemną stowarzyszoność wykorzystać też w innych sytuacjach. Podamy tu kilka przykładów.

Niech $K \subset \mathbb{R}^n$ będzie ciałem wypukłym w pozycji izotropowej, niech $X = (X_1, X_2, \ldots, X_i)$ będzie wektorem losowym o rozkładzie jednostajnym na K. Załóżmy, że ciąg $|X_i|$ jest ujemnie stowarzyszony. Zauważmy, że jeśli f_i są rosnące, to ciąg $f_i(|X_i|)$ również jest ujemnie stowarzyszony. W szczególności dla dowolnych ciągów liczb rzeczywistych $(a_i)_{i=1}^n$ oraz $(c_i)_{i=1}^n$ ciągi zmiennych $|a_i X_i| - c_i$ oraz $|a_i| X_i^2 - c_i$ są ujemnie stowarzyszone.

Zaczniemy od dwóch nierówności porównawczych pochodzących z prac Q. Shao (patrz [43]). Niech $(X_i^\star)_{i=1}^n$ oznacza ciąg zmiennych losowych, zarówno niezależnych od siebie nawzajem, jak i od X_i, przy czym $X_i^\star$ ma ten sam rozkład co X_i. Wtedy następujące dwie nierówności są bezpośrednim przetłumaczeniem Twierdzeń 1 i 2 z pracy [43] na nasz język:

Twierdzenie 2.2.5. *Niech K będzie ciałem wypukłym o ujemnie stowarzyszonych modułach, zaś $X = (X_1, \ldots, X_n)$ wektorem losowym o rozkładzie jednostajnym na K. Wtedy dla dowolnej funkcji wypukłej $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zachodzi*

$$\mathbb{E} f\Big(\sum_{i=1}^n |a_i X_i|\Big) \leqslant \mathbb{E} f\Big(\sum_{i=1}^n |a_i X_i^\star|\Big).$$

Jeśli dodatkowo f jest rosnąca, to

$$\mathbb{E} f\Big(\max_{k=1,2,\ldots,n} \sum_{i=1}^k (|a_i X_i| - c_i)\Big) \leqslant \mathbb{E} f\Big(\max_{k=1,2,\ldots,n} \sum_{i=1}^k (|a_i X_i^\star| - c_i)\Big).$$

Bardziej bezpośrednim wnioskiem jest twierdzenie o porównywaniu momentów:

Twierdzenie 2.2.6. *Niech K będzie 1–symetrycznym ciałem wypukłym o ujemnie stowarzyszonych modułach, zaś $X = (X_1, \ldots, X_n)$ wektorem losowym o rozkładzie jednostajnym na K. Wtedy dla dowolnej parzystej liczby naturalnej p mamy*

$$\mathbb{E}\Big(\sum_{i=1}^n a_i X_i\Big)^p \leqslant \mathbb{E}\Big(\sum_{i=1}^n a_i X_i^\star\Big)^p.$$

Warto zwrócić uwagę, że tu porównujemy już nie momenty sumy modułów (co jest łatwym wnioskiem z poprzednich nierówności), ale po prostu momenty sum.

Dowód. Kiedy otworzymy nawiasy w wyrażeniu $(\sum a_i X_i)^p$ składniki, w których przynajmniej jedno z X_i pojawi się w nieparzystej potędze uśredniają się do zera, ponieważ K jest 1–symetryczne. Zatem pozostanie nam suma składników postaci

$$(a_i X_1)^{2\alpha_1} (a_2 X_2)^{2\alpha_2} \ldots (a_n X_n)^{2\alpha_n} = |a_1 X_1|^{2\alpha_1} |a_2 X_2|^{2\alpha_2} \ldots |a_n X_n|^{2\alpha_n}.$$

Jeśli zdefiniujemy $f(a_1 x_1) = (a_1 x_1)^{2\alpha_1}$ i $g(a_2 x_2, \ldots, a_n x_n) = (a_2 x_2)^{2\alpha_2} \cdot \ldots \cdot (a_n x_n)^{2\alpha_n}$, to przez bezpośrednie zastosowanie ujemnej stowarzyszoności dostajemy

$$\begin{aligned}\mathbb{E}|a_1 X_1|^{2\alpha_1} |a_2 X_2|^{2\alpha_2} \ldots |a_n X_n|^{2\alpha_n} &\leqslant \mathbb{E}|a_1 X_1|^{2\alpha_1} \mathbb{E}|a_2 X_2|^{2\alpha_2} \ldots |a_n X_n|^{2\alpha_n} \\ &= \mathbb{E}|a_1 X_1^\star|^{2\alpha_1} \mathbb{E}|a_2 X_2|^{2\alpha_2} \ldots |a_n X_n|^{2\alpha_n} \\ &= \mathbb{E}|a_1 X_1^\star|^{2\alpha_1} |a_2 X_2|^{2\alpha_2} \ldots |a_n X_n|^{2\alpha_n}.\end{aligned}$$

Powtarzając ten proces indukcyjnie wyłączymy po kolei wszystkie zmienne i otrzymamy

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big(\sum_{i=1}^n a_i X_i\Big)^p &= \sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_n=p/2} C_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}\mathbb{E}|a_1X_1|^{2\alpha_1}|a_2X_2|^{2\alpha_2}\ldots|a_nX_n|^{2\alpha_n}\\ &\leqslant \sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_n=p/2} C_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}\mathbb{E}|a_1X_1^\star|^{2\alpha_1}|a_2X_2^\star|^{2\alpha_2}\ldots|a_nX_n^\star|^{2\alpha_n}\\ &= \mathbb{E}\Big(\sum_{i=1}^n a_i X_i^\star\Big)^p.\end{aligned}$$

□

Pokażmy też, w jaki sposób za pomocą wyników z pracy [43] jesteśmy w stanie otrzymać wykładniczą koncentrację normy euklidesowej. Twierdzenie 3 z tej pracy brzmi następująco:

Twierdzenie 2.2.7. *Niech $(X_i)_{i=1}^n$ będzie ciągiem ujemnie stowarzyszonych zmiennych losowych o średniej zero i skończonej wariancji. Niech $S_k = \sum_{i=1}^k X_i$, zaś $B_n = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}X_i^2$. Wtedy dla każdych $x > 0$, $a > 0$ oraz $0 < \alpha < 1$ mamy*

$$\mathbb{P}\Big(\max_{1\leqslant k\leqslant n}|S_k| \geqslant x\Big) \leqslant 2\mathbb{P}(\max_{1\leqslant k\leqslant n}|X_k| > a) + \frac{2}{1-\alpha}\exp\left(-\frac{x^2\alpha}{2(ax+B_n)}\cdot\left(1+\frac{2}{3}\ln\left(1+\frac{ax}{B_n}\right)\right)\right).$$

Rozważmy zmienną logarytmicznie wklęsłą w pozycji izotropowej i o ujemnie stowarzyszonych modułach. Dla takiej zmiennej ciąg $(X_i^2-1)_{i=1}^n$ jest ujemnie stowarzyszony. Momenty zmiennych log–wklęsłych są porównywalne (patrz np. [27], ze stałą 8 wynika to z Lematu 2.1.2), zatem mamy

$$\mathbb{E}(X_i^2-1)^2 = \mathbb{E}X_i^4 + 1 - 2\mathbb{E}X_i^2 = \mathbb{E}X_i^4 - 1 \leqslant 5.$$

Jeśli w twierdzeniu 2.2.7 ustalimy przykładowo $\alpha = 1/2$ oraz $x = nt$, to dostaniemy następujący wniosek:

Wniosek 2.2.8. *Niech $X = (X_i)_{i=1}^n$ będzie wektorem losowym o rozkładzie logarytmicznie wklęsłym w pozycji izotropowej i o ujemnie stowarzyszonych modułach. Wtedy dla dowolnego $t > 0$ i $a > 0$ mamy*

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\Big(\max_{1\leqslant k\leqslant n}\Big|\sum_{i=1}^k(X_i^2-1)\Big| > nt\Big)\\ &\leqslant 2\mathbb{P}\Big(\max_{1\leqslant k\leqslant n}|X_k^2-1| > a\Big) + 4\exp\left(-\frac{nt^2}{4(at+5)}\cdot\left(1+\frac{2}{3}\ln\left(1+\frac{at}{5}\right)\right)\right).\end{aligned}$$

Żeby przekonać się, że otrzymany rząd zbieżności jest faktycznie wykładniczy, sformułujemy następujący wniosek:

Wniosek 2.2.9. *Niech $X = (X_i)_{i=1}^n$ będzie wektorem losowym 1–symetrycznym o rozkładzie logarytmicznie wklęsłym, w pozycji izotropowej i o ujemnie stowarzyszonych modułach. Wtedy dla dowolnego $t > 0$ mamy*

$$\mathbb{P}\Big(\Big|\frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n} - 1\Big| > t\Big) \leqslant Ce^{-cnt^2} + Cne^{-c\sqrt[3]{nt}},$$

gdzie c i C to stałe liczbowe.

Dowód. Oczywiście

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n}-1\right|>t\right)\leqslant \mathbb{P}\left(\max_{1\leqslant k\leqslant n}\left|\sum_{i=1}^k (X_i^2-1)\right|>nt\right),$$

zatem musimy tylko ograniczyć prawą stronę nierówności we Wniosku 2.2.8. Niech $a=\sqrt[3]{n^2t^2}$. Jeśli $c<1/L^2$, zaś $C>e$, to dla $a\leqslant 1$ mamy

$$Cne^{-c\sqrt[3]{nt}}=Cne^{-c\sqrt{a}}\geqslant 1.$$

Zatem pozostaje nam tylko rozważyć przypadek $a>1$.

W tym wypadku

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\max_{1\leqslant k\leqslant n}|X_k^2-1|>a) &\leqslant \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(|X_k^2-1|>a)=\sum_{k=1}^n \mathbb{P}(X_k^2>a+1)\\ &\leqslant \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(X_k^2>a)=\sum_{k=1}^n \mathbb{P}(|X_k|>\sqrt{a}).\end{aligned}$$

Rzuty zmiennych log–wklęsłych na podprzestrzenie są log–wklęsłe, w szczególności log–wklęsła jest zmienna X_k. Wiemy, że $\mathrm{Var}(X_k)=1$ oraz $\mathbb{E}X_k=0$, zatem z lematu Borella (patrz np. [11]) dostajemy $\mathbb{P}(|X_k|>t)\leqslant C_1e^{-C_2t}$ dla pewnych stałych C_1, C_2. Zatem

$$\mathbb{P}\Big(\max_{1\leqslant k\leqslant n}|X_k^2-1|>a\Big)\leqslant C_1e^{-C_2\sqrt{a}}=C_1e^{-C_2\sqrt[3]{nt}}.$$

W drugim składniku wystarczy proste szacowanie

$$\left(1+\frac{2}{3}\ln\left(1+\frac{at}{5}\right)\right)\geqslant 1,$$

a więc

$$\begin{aligned}4\exp\left(-\frac{nt^2}{4(at+5)}\cdot\left(1+\frac{2}{3}\ln\left(1+\frac{at}{5}\right)\right)\right) &\leqslant 4\exp\Big(-\frac{nt^2}{4n^{2/3}t^{5/3}+20}\Big)\\ &\leqslant 4e^{-c\sqrt[3]{nt}}+4e^{-cnt^2}.\end{aligned}$$

□

Powyższe szacowanie jest — jak widać — bardzo zgrubne, a jednak i tak daje bardzo silną koncentrację normy euklidesowej, co pokazuje, jak silnym narzędziem może być ujemna stowarzyszoność modułów. Na mocy wyników [10] wiemy, że $L_K^2<L^2$ dla 1–symetrycznych wektorów log–wklęsłych, zatem jeśli weźmiemy za X^K zmienną losową jednostajnie rozłożoną na ciele wypukłym w pozycji izotropowej o ujemnie stowarzyszonych modułach, to poprzez jednokładność o skali $1/L_K$ otrzymamy izotropową zmienną losową, zatem powyższe szacowanie z inną stałą zachodzi też dla X^K.

2.2.3 Potencjalne kierunki badawcze

Chcę tu przedstawić kilka, moim zdaniem ciekawych, problemów, które wiążą się z poruszaną tematyką i stanowią potencjalne kierunki badań w mojej dalszej pracy.

Jak pokazuje przykład (2.2.4), nie można liczyć na udowodnienie ujemnej stowarzyszoności modułów nawet w bardzo „przyzwoitych” klasach zmiennych, takich jak rozkłady jednostajne na ciałach 1–symetrycznych. Oczywiście jest jeszcze szereg klas miar logarytmicznie wklęsłych, dla których ta użyteczna własność mogłaby zachodzić. Warto tu wymienić przede wszystkim kule permutacyjnie niezmiennicze:

Definicja 2.2.10. *Mówimy, że ciało wypukłe K jest* kulą permutacyjnie niezmienniczą*, gdy jest symetryczne, 1–symetryczne, oraz $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in K \Longleftrightarrow (x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) \in K$ dla dowolnej permutacji $\sigma \in S_n$.*

Od kilku lat poszukuję dowodu lub kontrprzykładu na następującą hipotezę:

Hipoteza 2. *Niech μ będzie miarą o rozkładzie jednostajnym na kuli permutacyjnie niezmienniczej. Wtedy μ ma własność ujemnego stowarzyszenia modułów.*

Warto tu zwrócić uwagę na to, że ta hipoteza nie przenosi się „bezmyślnie” na miary logarytmicznie wklęsłe. Można — podobnie jak dla ciał — zdefiniować miarę permutacyjnie niezmienniczą. Niestety, dla permutacyjnie niezmienniczych miar logarytmicznie wklęsłych łatwo znaleźć kontrprzykład na hipotezę o ujemnym stowarzyszeniu modułów — wystarczy zrzutować przykład (2.2.4) na płaszczyznę (x, y). Nie przekłada sie to jednak w żaden znany mi sposób na kontrprzykład dla ciał.

Drugą, związaną z tym tematem hipotezą jest analog prawa iterowanego logarytmu dla ciał wypukłych. Wiadomo (patrz np. [44]) że z ujemnego stowarzyszenia ciągu zmiennych da się uzyskać prawo iterowanego logarytmu dla tego ciągu zmiennych. Wydaje sie, ze technika ta powinna się przenieść również na zmienne o ujemnie stowarzyszonych modułach. Oczywiście jednym z podstawowych problemów jest takie sformułowanie prawa iterowanego logarytmu, by miało zastosowanie w naszym przypadku, który — siłą rzeczy — nie zawiera nieskończonego ciągu zmiennych losowych. Prawdopodobnie zatem potrzebne jest udowodnienie oszacowań ilościowych odpowiadających prawu iterowanego logarytmu (tak, jak tw. Berry'ego–Esseena odpowiada Centralnemu Twierdzeniu Granicznemu). Dopóki jednak nie będę miał w ręku przykładów, nie chcę stawiać konkretnej hipotezy.

Trzecia hipoteza jest najbardziej mglista, ale też i najciekawsza. Widzimy, że ujemna stowarzyszoność modułów nie zachodzi dla ogólnego 1–symetrycznego wektora logarytmicznie wklęsłego. Wydaje się jednak, że może istnieć „poprawka” do ujemnego stowarzyszenia, tzn. oszacowanie błędu w nierówności (1.4.1), które pozwoliłoby wyciągnąć podobne wnioski do tych, które uzyskujemy za pomocą ujemnej stowarzyszoności (szczególnie ciekawe byłoby tu osiągnięcie nowego dowodu nierówności koncentracyjnych takich, jak we Wniosku 2.2.9), a które byłoby prawdziwe dla dowolnego 1–symetrycznego wektora log–wklęsłego. W tym momencie nie umiem nawet podać proponowanego kształtu takiej poprawki, a co dopiero zasugerować linii dowodowej, natomiast moja intuicja raczej skłania się ku temu, że istnienie takiej poprawki powinno być możliwe do udowodnienia.

2.3 Koncentracja i splot infimum

Naszym celem jest dowód hipotezy *IC* dla jak najszerszej klasy miar logarytmicznie wklęsłych. Zaczniemy od dwóch prostych stwierdzeń o własności (τ):

Stwierdzenie 2.3.1 (Tensoryzacja)**.** *Jeśli pary (μ_i, φ_i), $i = 1, \ldots, k$ spełniają własność (τ), oraz $\varphi(x_1, \ldots, x_k) = \varphi_1(x_1) + \ldots + \varphi_k(x_k)$, to para $(\otimes_{i=1}^k \mu_i, \varphi)$ również spełnia własność (τ).*

Stwierdzenie 2.3.2 (Transport miary)**.** *Załóżmy, że (μ, φ) ma własność (τ), zaś przekształcenie $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ spełnia*

$$\psi(Tx - Ty) \leqslant \varphi(x - y) \text{ dla każdych } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Wtedy para $(\mu \circ T^{-1}, \psi)$ ma własność (τ).

Dowody tych własności można znaleźć w pracy [32], choć zapewne łatwiej samemu przeprowadzić indukcję po wymiarze.

Zastanówmy się, jak te własności przenoszą się na własność IC. Okazuje się, że hipoteza IC również ma własności tensoryzacyjne:

Stwierdzenie 2.3.3. *Jeśli μ_i są symetrycznymi miarami probabilistycznymi na $\mathbb{R}^{n_i}$, $1 \leqslant i \leqslant k$, oraz spełniają $\mathrm{IC}(\beta_i)$, wtedy $\mu = \otimes_{i=1}^k \mu_i$ spełnia $\mathrm{IC}(\beta)$ ze stałą $\beta = \max_i \beta_i$.*

Dowód. Z niezależności mamy $\Lambda_\mu(x_1, \ldots, x_k) = \sum_{i=1}^k \Lambda_{\mu_i}(x_i)$ i $\Lambda^*_\mu(x_1, \ldots, x_k) = \sum_{i=1}^k \Lambda^*_{\mu_i}(x_i)$. Stwierdzenie wynika zatem ze Stwierdzenia 2.3.1 oraz Uwagi 1.4.12. □

Ogólne ustalenie zachowania IC przy transporcie miary jest niebanalne, bowiem niebanalne jest stwierdzenie, jak zachowuje się $\Lambda^\star_\mu$, gdy przenosimy miarę μ przez dowolne przekształcenie. Rozważmy prosty przypadek, gdy T jest przekształceniem liniowym:

Stwierdzenie 2.3.4. *Niech $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ będzie przekształceniem liniowym, zaś μ — miarą probabilistyczną na $\mathbb{R}^n$, spełniającą $\mathrm{IC}(\beta)$. Wtedy miara $\mu \circ T^{-1}$ również spełnia $\mathrm{IC}(\beta)$.*

Dowód. Dowód jest bezpośrednim przełożeniem kolejno wszystkich definicji. Załóżmy, że T jest odwracalne (przypadek T nieodwracalnego można otrzymać przez aproksymację), oraz, że $\beta = 1$ (dowód dla innych β jest identyczny, tylko bogatszy w oznaczenia). Będziemy kolejno wyliczać potrzebne składniki IC dla $\mu \circ T^{-1}$. Niech $\tilde{f}(x) = f(T(x))$.

$$\begin{aligned}
M_{\mu\circ T^{-1}}(x) &= \int e^{\langle x,y\rangle} d(\mu \circ T^{-1})(y) = \int e^{\langle T^\star(x),y\rangle} d\mu(y) = M_\mu(T^\star(x)),\\
\Lambda_{\mu\circ T^{-1}}(x) &= \ln M_{\mu\circ T^{-1}}(x) = \ln M_\mu(T^\star(x)) = \Lambda_\mu(T^\star(x)),\\
\Lambda^\star_{\mu\circ T^{-1}}(y) &= \sup_x \Big\{ \langle x, y\rangle - \Lambda_{\mu\circ T^{-1}}(x)\Big\} = \sup_{z=T^\star(x)} \Big\{ \Big\langle z, T^{-1}(y)\Big\rangle - \Lambda_\mu(z)\Big\} = \Lambda^\star_\mu(T^{-1}(y)),\\
f\Box\Lambda^\star_{\mu\circ T^{-1}}(x) &= \inf_y \Big\{ f(y) + \Lambda^\star_{\mu\circ T^{-1}}(x-y)\Big\} = \inf_{z=T^{-1}(y)} \Big\{ \tilde{f}(z) + \Lambda^\star_\mu(T^{-1}(x) - z)\Big\} = (\tilde{f}\Box\Lambda^\star_\mu)(T^{-1}(x))
\end{aligned}$$

$$\int e^{-f} d(\mu \circ T^{-1}) \int e^{f\Box\Lambda^\star_{\mu\circ T^{-1}}} d(\mu\circ T^{-1}) = \int e^{-\tilde{f}} d\mu \int e^{f\Box\Lambda_\mu} d\mu \leqslant 1$$

na mocy IC dla μ. □

Sprawdźmy teraz, czy nasza definicja IC sprawdza się w przypadku, dla którego zostało wprowadzone pojęcie własności (τ), czyli dla miary wykładniczej. Najważniejszym wynikiem pracy [32] było wskazanie prawidłowej funkcji kosztu dla miary wykładniczej ν:

Twierdzenie 2.3.5. *Niech $w(x) = \frac{1}{36}x^2$ dla $|x| \leqslant 4$ i $w(x) = \frac{2}{9}(|x| - 2)$ dla $x \geqslant 4$. Wtedy para $(\nu^n, \sum_{i=1}^n w(x_i))$ spełnia własność (τ).*

To twierdzenie wraz z Wnioskiem 1.4.7 oraz Stwierdzeniem 2.3.1 natychmiast daje następującą nierówność koncentracyjną, znaną jako dwupoziomowa koncentracja Talagranda (pierwotnie udowodnioną innymi metodami i ze znacznie gorszą stałą przez Talagranda w [47]):

$$\nu^n(A) = \nu(-\infty, x] \;\Rightarrow\; \forall_{t\geqslant 0}\ \nu^n(A + 6\sqrt{2t}B_2^n + 18tB_1^n) \geqslant \nu(-\infty, x+t], \tag{2.3.1}$$

Aby sprawdzić hipotezę IC należy zatem sprawdzić, czy $w(x) \geqslant \Lambda^\star_\nu(\frac{\cdot}{\beta})$ dla pewnego β.

Stwierdzenie 2.3.6. *Dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$,*

$$\frac{1}{5}\min\{x^2, |x|\} \leqslant \Lambda_\nu^*(x) \leqslant \min\{x^2, |x|\},$$

w szczególności miara ν^n spełnia IC(9).

Dowód. Nietrudno obliczyć, że $\Lambda_\nu(x) = -\ln(1 - x^2)$ dla $|x| < 1$, zaś

$$\Lambda_\nu^\star(x) = \sqrt{1 + x^2} - 1 - \ln\left(\frac{\sqrt{1 + x^2} + 1}{2}\right).$$

Jako, że $a/2 \leqslant a - \ln(1 + a/2) \leqslant a$ dla $a \geqslant 0$, otrzymujemy $\frac{1}{2}(\sqrt{1 + x^2} - 1) \leqslant \Lambda_\nu^\star(x) \leqslant \sqrt{1 + x^2} - 1$. Mamy więc

$$\min\{|x|, x^2\} \geqslant \sqrt{1 + x^2} - 1 = \frac{x^2}{\sqrt{1 + x^2} + 1} \geqslant \frac{1}{\sqrt{2} + 1}\min\{|x|, x^2\}.$$

Zauważmy też, że $\min\{(x/9)^2, |x|/9\} \leqslant w(x)$, skąd otrzymujemy *IC* dla ν, zaś ze Stwierdzenia 2.3.3 również dla ν^n. □

2.3.1 Równoważne postaci koncentracji

We wstępie wprowadziłem ciała $\mathcal{Z}_p(\mu)$ oraz $B_p(\mu)$, przy czym hipotezę *CI* sformułowałem przy pomocy tych pierwszych, jednocześnie sygnalizując, że hipoteza *IC* w sposób naturalny wiąże się z tymi drugimi. Aby zatem połączyć te dwie hipotezy udowodnię prównywalność tych dwóch ciał.

Przypominjmy, że ciała $\mathcal{Z}_p$ były zdefiniowane dla $p > 1$ jako

$$\mathcal{Z}_p(\mu) := (\mathcal{M}_p(\mu))^\circ = \left\{x \in \mathbb{R}^n \colon |\langle v, x\rangle|^p \leqslant \int |\langle v, y\rangle|^p d\mu(y) \text{ dla każdego } v \in \mathbb{R}^n\right\},$$

zaś ciała B_p dla $p > 0$ jako

$$B_p(\mu) := \{v \in \mathbb{R}^n \colon \Lambda_\mu^*(v) \leqslant p\}.$$

Wyniki tej części pracy przenoszą się również na mniej interesujący nas przypadek miar 1–regularnych, a nawet α–regularnych (czyli takich, w których dopuszczamy pomnożenie prawej strony nierówności (2.1.1) przez stałą α). Jako, że 1–regularność jest jedyną własnością miar log–wklęsłych wykorzystywaną w tej części pracy, wszystkie sformułowania podaje dla miar 1–regularnych. Niewiele trudniejszą analizę przypadku α–regularnego można znaleźć w pracy [29].

Stwierdzenie 2.3.7. *Dla dowolnej probabilistycznej miary symetrycznej μ na $\mathbb{R}^n$ oraz dowolnego $p \geqslant 1$ zachodzi*

$$\mathcal{Z}_p(\mu) \subset 2^{1/p} e B_p(\mu).$$

Dowód. Weźmy $v \in \mathcal{Z}_p(\mu)$, musimy pokazać, że $\Lambda_\mu^\star(v/(2^{1/p}e)) \leqslant p$, czyli, że

$$\frac{\langle u, v\rangle}{2^{1/p}e} - \Lambda_\mu(u) \leqslant p \text{ dla każdego } u \in \mathbb{R}^n.$$

Ustalmy $u \in \mathbb{R}^n$ i oznaczmy $\beta^p = \int |\langle u, x\rangle|^p d\mu(x)$, wtedy $u/\beta \in \mathcal{M}_p(\mu)$, czyli $\langle u/\beta, v\rangle \leqslant 1$. Rozważymy dwa przypadki.

1. $\beta \leqslant 2^{1/p}ep$. Wtedy, skoro $\Lambda_\mu(u) \geqslant \int \langle u, x\rangle \, d\mu(x) = 0$,

$$\frac{\langle u, v\rangle}{2^{1/p}e} - \Lambda_\mu(u) \leqslant \frac{\beta}{2^{1/p}e}\left\langle \frac{u}{\beta}, v\right\rangle \leqslant p \cdot 1.$$

2. $\beta > 2^{1/p}ep$. Wtedy

$$\begin{aligned}\int e^{\langle u,x\rangle} d\mu(x) &\geqslant \int \left|e^{\langle u,x\rangle/p}\right|^p I_{\{\langle u,x\rangle \geqslant 0\}} d\mu(x) \geqslant \int \left|\frac{\langle u,x\rangle}{p}\right|^p I_{\{\langle u,x\rangle\geqslant 0\}} d\mu(x)\\ &= \frac{1}{2}\int \left|\frac{\langle u, x\rangle}{p}\right|^p d\mu(x),\end{aligned}$$

a zatem

$$\int e^{2^{1/p}ep\langle u,x\rangle/\beta} d\mu(x) \geqslant \frac{1}{2}\int \left|\frac{2^{1/p}e\,\langle u,x\rangle}{\beta}\right|^p d\mu(x) = e^p.$$

W tym wypadku $\Lambda_\mu(2^{1/p}epu/\beta) \geqslant p$ i $\Lambda_\mu(u) \geqslant \frac{\beta}{2^{1/p}ep}\Lambda_\mu(2^{1/p}epu/\beta) \geqslant \frac{\beta}{2^{1/p}e}$. Widzimy więc, że

$$\frac{\langle u, v\rangle}{2^{1/p}e} - \Lambda_\mu(u) \leqslant \frac{\beta}{2^{1/p}e}\left\langle \frac{u}{\beta}, v\right\rangle - \frac{\beta}{2^{1/p}e} \leqslant 0.$$

□

Stwierdzenie 2.3.8. *Jeśli μ jest miarą probabilistyczną miarą 1–regularną na $\mathbb{R}^n$, to dla dowolnego $p \geqslant 2$ zachodzi*

$$B_p(\mu) \subset 4e\mathcal{Z}_p(\mu).$$

Dowód. Wpierw pokażemy, że

$$u \in \mathcal{M}_p(\mu) \;\Rightarrow\; \Lambda_\mu\Big(\frac{pu}{2e}\Big) \leqslant p. \tag{2.3.2}$$

Zaiste, jeśli ustalimy $u \in \mathcal{M}_p(\mu)$ i rozważymy $\tilde{u} := \frac{pu}{2e}$, to

$$\Big(\int |\langle \tilde{u}, x\rangle|^k d\mu(x)\Big)^{1/k} = \frac{p}{2e}\Big(\int |\langle u, x\rangle|^k d\mu(x)\Big)^{1/k} \leqslant \begin{cases} \frac{p}{2e} & k \leqslant p \\ \frac{k}{2e} & k > p.\end{cases}$$

Zatem

$$\begin{aligned}\int e^{\langle \tilde{u},x\rangle} d\mu(x) &\leqslant \int e^{|\langle \tilde{u},x\rangle|} d\mu(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\int |\langle \tilde{u}, x\rangle|^k d\mu(x)\\ &\leqslant \sum_{k\leqslant p}\frac{1}{k!}\Big|\frac{p}{2e}\Big|^k + \sum_{k>p}\frac{1}{k!}\Big|\frac{k}{2e}\Big|^k \leqslant e^{\frac{p}{2e}} + 1 \leqslant e^p\end{aligned}$$

z czego wynika już (2.3.2).

Teraz weźmy dowolne $v \notin 4e\mathcal{Z}_p(\mu)$, wtedy możemy znaleźć takie $u \in \mathcal{M}_p(\mu)$, że $\langle v, u\rangle > 4e$. Otrzymujemy zatem wobec (2.3.2)

$$\Lambda_\mu^*(v) \geqslant \left\langle v, \frac{pu}{2e}\right\rangle - \Lambda_\mu\Big(\frac{pu}{2e}\Big) > \frac{p}{2e}4e - p = p,$$

czyli $v \notin B_p(\mu)$. □

Rozważyliśmy zatem przypadek dużych p, gdzie $B_p(\mu)$ jest porównywalne z $\mathcal{Z}_p(\mu)$. Co dzieje się dla małych p? Poniższe dwa stwierdzenia dowodzą, że dla małych p zbiór $B_p(\mu)$ jest porównywalny z kulą euklidesową $\sqrt{p}B_2^n$, o ile miara μ jest w położeniu izotropowym. Jako, że dowolna miara poprzez przekształcenie afiniczne daje się przenieść do położenia izotropowego, wnioskujemy z tego, że dla ogólnej miary $B_p(\mu)$ jest porównywalne z elipsoidą. Jak i w poprzednim przypadku, potrzebujemy udowodnić dwa zawierania, i tak jak poprzednio tylko jedno z nich wykorzystuje 1–regularność.

Stwierdzenie 2.3.9. *Niech μ będzie symetryczną, izotropową miarą na $\mathbb{R}^n$. Wtedy dla każdego u zachodzi nierówność $\min\{1, \Lambda_\mu^*(u)\} \leqslant |u|^2$, w szczególności zaś*

$$\sqrt{p}B_2^n \subset B_p(\mu) \ \text{ dla } p \in (0,1).$$

Dowód. Przy użyciu symetrii i izotropowości μ, otrzymujemy

$$\int e^{\langle u,x\rangle} d\mu(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} \int \langle u,x\rangle^{2k} d\mu(x) \geqslant 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|u|^{2k}}{(2k)!} = \cosh(|u|).$$

Zatem dla $|u| < 1$,

$$\Lambda_\mu^*(u) \leqslant \mathcal{L}(\ln\cosh)(|u|) = \frac{1}{2}\Big[(1+|u|)\ln(1+|u|) + (1-|u|)\ln(1-|u|)\Big] \leqslant |u|^2,$$

gdzie aby otrzymać ostatnią nierówność skorzystaliśmy z nierówności $\ln(1+x) \leqslant x$ dla $x > -1$. □

Stwierdzenie 2.3.10. *Jeśli miara μ jest symetryczna, izotropowa i 1–regularna, to*

$$\Lambda_\mu^*(u) \geqslant \min\left\{\frac{|u|}{2e}, \frac{|u|^2}{2e^2}\right\},$$

w szczególności

$$B_p(\mu) \subset \max\{2ep, e\sqrt{2p}\}B_2^n \ \text{ dla dowolnego } p > 0.$$

Dowód. Dzięki symetrii, izotropowości i 1–regularności μ otrzymujemy

$$\begin{aligned}\int e^{\langle u,x\rangle} d\mu(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} \int \langle u,x\rangle^{2k} d\mu(x) \leqslant 1 + \frac{|u|^2}{2} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(k|u|)^{2k}}{(2k)!} \\ &\leqslant 1 + \frac{|u|^2}{2} + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{e|u|}{2}\right)^{2k}.\end{aligned}$$

Zatem jeśli $e|u| \leqslant 1$,

$$\int e^{\langle u,x\rangle} d\mu(x) \leqslant 1 + \frac{|u|^2}{2} + \frac{4}{3}\left(\frac{e|u|}{2}\right)^4 \leqslant 1 + \frac{e^2|u|^2}{2} + \frac{(e|u|)^4}{8} \leqslant e^{e^2|u|^2/2}$$

czyli $\Lambda_\mu(u) \leqslant e^2|u|^2/2$ dla $e|u| \leqslant 1$. Widzimy więc, że $\Lambda_\mu^*(u) \geqslant \min\{\frac{|u|}{2e}, \frac{|u|^2}{2e^2}\}$ dla każdego u. □

By sformułować zgrabną wersję twierdzenia o porównywaniu $\sqrt{p}B_2^n$, $\mathcal{Z}_p(\mu)$ oraz $B_p(\mu)$ przyda nam się jeszcze następująca uwaga:

Uwaga 2.3.11. *Dla każdych $p \geqslant q \geqslant 1$ mamy $\mathcal{M}_p(\mu) \subset \mathcal{M}_q(\mu)$, zatem $\mathcal{Z}_q(\mu) \subset \mathcal{Z}_p(\mu)$. Jeśli miara μ jest 1–regularna, to $\mathcal{M}_q(\mu) \subset \frac{p}{q}\mathcal{M}_p(\mu)$, a zatem $\mathcal{Z}_p(\mu) \subset \frac{p}{q}\mathcal{Z}_q(\mu)$ dla $p \geqslant q \geqslant 2$. Co więcej dla każdej symetrycznej miary μ, $\Lambda_\mu^*(0) = 0$, zatem na mocy wypukłości Λ_μ^* otrzymujemy $B_q(\mu) \subset B_p(\mu) \subset \frac{p}{q}B_q(\mu)$ dla wszystkich $p \geqslant q > 0$.*

Teraz, by zebrać to w całość, możemy sformułować następujące twierdzenie:

Wniosek 2.3.12. *Niech μ będzie probabilistyczną, symetryczną miarą log–wkęsłą na $\mathbb{R}^n$. Wtedy dla $p \geqslant 2$ mamy*

$$(e\sqrt{2})^{-1}\mathcal{Z}_p(\mu) \subset B_p(\mu) \subset 4e\mathcal{Z}_p(\mu).$$

Jeżeli μ jest dodatkowo izotropowa, to dla $p \leqslant 2$ mamy

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{p}B_2^n \subset B_p(\mu) \subset \sqrt{8}e\sqrt{p}B_2^n.$$

2.3.2 Między CI, IC a nierównością Cheegera

Wiemy już, że z własności (τ) da się otrzymać koncentrację. Upewnijmy się zatem, że faktycznie z własności (τ) zadaniej przez IC otrzymujemy koncentrację CI:

Stwierdzenie 2.3.13. *Załóżmy, że μ jest probabilistyczną, symetryczną miarą logarytmicznie wklęsłą spełniającą $IC(\beta)$. Wtedy μ spełnia też $CI(8e\beta)$.*

Dowód. Niech A będzie dowolnym zbiorem takim, że $\mu(A) \geqslant 1/2$. Na mocy Wniosku 1.4.7 mamy

$$1 - \mu(A + B_{\Lambda_\mu^\star(\cdot/\beta)}(2t)) < e^{-t}(1 - \mu(A)).$$

Z definicji mamy

$$B_{\Lambda_\mu^\star(\cdot/\beta)}(2t) = \{x \in \mathbb{R}^n : \Lambda_\mu^\star(x/\beta) \leqslant 2t\} = \{\beta x \in \mathbb{R}^n : \Lambda_\mu^\star(x) \leqslant 2t\} = \beta B_{2t}(\mu) \subset 2\beta B_t(\mu),$$

gdzie ostatnie zawieranie wynika z Uwagi 2.3.11. Na mocy Wniosku 2.3.12 dla $t \geqslant 2$ mamy $B_t(\mu) \subset 4e\mathcal{Z}_t(\mu)$, zatem

$$1 - \mu(A + 8\beta e\mathcal{Z}_t(\mu) \leqslant 1 - \mu(A + B_{\Lambda_\mu^\star(\cdot/\beta)}(2t)) < e^{-t}(1 - \mu(A)).$$

□

Teraz spróbujmy odwrócić tę implikację. Wpierw zauważmy, że sformułowanie CI mówi nam coś o powiększaniu dużych zbiorów. Okazuje się, że przez przejście do dopełnień jest to równoważne informacji o powiększaniu małych zbiorów. Formalizuje to następujące ogólne stwierdzenie:

Stwierdzenie 2.3.14. *Niech K będzie dowolnym zbiorem borelowskim, zaś $\gamma > 1$. Następujące dwa warunki są równoważne:*

$$\forall_{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)}\ \mu(A) > 0 \Rightarrow \mu(A + K) > \min\left\{\gamma\mu(A), \frac{1}{2}\right\}, \tag{2.3.3}$$

$$\forall_{\tilde{A} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)}\ \mu(\tilde{A}) \geqslant \frac{1}{2} \Rightarrow 1 - \mu(\tilde{A} - K) < \frac{1}{\gamma}(1 - \mu(\tilde{A})). \tag{2.3.4}$$

Dowód. (2.3.3)⇒(2.3.4). Załóżmy, że $\mu(\tilde{A}) \geqslant 1/2$, ale $1 - \mu(\tilde{A} - K) \geqslant \gamma^{-1}(1 - \mu(\tilde{A}))$. Niech $A := \mathbb{R}^n \setminus (\tilde{A} - K)$, wtedy $(A + K) \cap \tilde{A} = \emptyset$, więc $\mu(A + K) \leqslant 1/2$ i

$$\mu(A + K) \leqslant 1 - \mu(\tilde{A}) \leqslant \gamma(1 - \mu(\tilde{A} - K)) = \gamma\mu(A),$$

co przeczy (2.3.3).

(2.3.4)⇒(2.3.3). Weźmy dowolny zbiór $A \in \mathbb{R}^n$ o mierze dodatniej taki, że $\mu(A + K) \leqslant \min\{\gamma\mu(A), 1/2\}$. Niech $\tilde{A} := \mathbb{R}^n \setminus (A + K)$, wtedy $\mu(\tilde{A}) \geqslant 1/2$. Co więcej $(\tilde{A} - K) \cap A = \emptyset$, zatem

$$1 - \mu(\tilde{A} - K) \geqslant \mu(A) \geqslant \frac{1}{\gamma}\mu(A + K) = \frac{1}{\gamma}(1 - \mu(\tilde{A})),$$

co przeczy (2.3.4). □

Dowód implikacji $CI \Rightarrow IC$ będzie się opierał na transporcie własności IC z miary wykładniczej. Potrzebna nam będzie wiedza, że koncentracja miary μ jest taka, jak koncentracja miary wykładniczej. Zacznijmy zatem od następującego stwierdzenia:

Stwierdzenie 2.3.15. *Załóżmy, że miara μ spełnia $CI(\beta)$. Wtedy dla dowolnego zbioru borelowskiego A oraz $t > 1$ mamy*

$$\mu(A) = \nu(-\infty, x] \quad \Rightarrow \quad \mu(A + 6e\beta B_t(\mu)) > \nu(-\infty, x + t].$$

Dowód. Wpierw przejdźmy od kuli $\mathcal{Z}_t(\mu)$ do kuli $B_t(\mu)$. Niech $t > 1$, na mocy, kolejno, $CI(\beta)$, Wniosku 2.3.12 oraz Uwagi 2.3.11 mamy:

$$\begin{aligned} e^{-t}(1 - \mu(A)) > e^{-2t}(1 - \mu(A)) &\geqslant 1 - \mu(A + \beta\mathcal{Z}_{2t}(\mu)) \geqslant 1 - \mu(A + e\sqrt{2}\beta B_{2t}(\mu)) \\ &\geqslant 1 - \mu(A + 3e\beta B_t(\mu)). \end{aligned}$$

Niech $K = 3e\beta B_t(\mu)$. Jeśli $x \geqslant 0$, to $\mu(A) = 1 - e^{-x}/2$ oraz

$$\mu(A + 2K) \geqslant \mu(A + K) > 1 - e^{-t}(1 - \mu(A)) = \nu(-\infty, x + t].$$

Jeśli $x + t \leqslant 0$, to $\mu(A) = e^x/2$ i na mocy Stwierdzenia 2.3.14 mamy

$$\mu(A + 2K) \geqslant \mu(A + K) > \min\{e^t\mu(A), 1/2\} = \nu(-\infty, x + t].$$

Jeżeli zaś $x < 0 < x + t$, to z poprzedniego przypadku $\mu(A + K) \geqslant 1/2 = \nu(-\infty, 0]$, zatem na mocy pierwszego przypadku mamy

$$\mu(A + 2K) = \mu((A + K) + K) > \nu(-\infty, t] > \nu(-\infty, x + t].$$

□

Żeby poradzić sobie z przypadkiem $t \leqslant 1$ potrzebna nam będzie nierówność Cheegera. Niech $\mu^+(A)$ oznacza zewnątrzną miarę brzegu A, zdefiniowaną jako

$$\mu^+(A) = \liminf_{t \to 0^+} \frac{\mu(A + tB_2^n) - \mu(A)}{t}. \tag{2.3.5}$$

Definicja 2.3.16. *Mówimy, że dla miary μ zachodzi* nierówność Cheegera *ze stałą $\kappa > 0$, jeżeli dla każdego zbioru A mamy*

$$\mu^+(A) \geqslant \kappa \min\{\mu(A), 1 - \mu(A)\}.$$

Nietrudno sprawdzić (patrz np. [9, Twierdzenie 2.1]), że z nierówności Cheegera wynika

$$\mu(A) = \nu(-\infty, x] \Rightarrow \mu(A + tB_2^n) \geqslant \nu(-\infty, x + \kappa t]. \tag{2.3.6}$$

Na mocy Stwierdzenia 2.3.9 umiemy porównać kulę $\sqrt{t}B_2^n$ z kulą $B_t(\mu)$. Brakuje nam zatem do dowodu tego, by miara μ spełniała nierówność Cheegera. Tu z pomocą przyjdzie nam wynik E. Milmana z pracy [34]. Wiąże ono nierówność Cheegera między innymi z następującą własnością miary:

Definicja 2.3.17. *Mówimy, że miara μ spełnia* własność wykładniczej koncentracji funkcji Lipszycowskich *ze stałą C, jeśli dla każdej funkcji 1–Lipszycowskiej f zachodzi*

$$\mu(\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x) - \mathbb{E}_\mu f(x)| > t\}) \leqslant e \cdot e^{-Ct}.$$

Bardziej formalnie, Twierdzenie 1.5 pracy [34] mówi między innymi:

Twierdzenie 2.3.18. *Jeżeli miara μ spełnia założenia wypukłości (które są spełnione dla każdej miary log–wklęsłej), oraz ma własność wykładniczej koncentracji funkcji Lipszycowskich ze stałą C, to spełnia nierówność Cheegera ze stałą κ, która zależy tylko od C.*

Udowodnijmy zatem, że $CI(\beta)$ pociąga za sobą wykładniczą koncentrację funkcji Lipszycowskich:

Stwierdzenie 2.3.19. *Jeśli μ jest izotropową, probabilistyczną miarą log–wklęsłą na $\mathbb{R}^n$, spełniającą $CI(\beta)$, zaś f jest funkcją 1–Lipszycowską, to*

$$\mu(\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x) - \mathrm{Med}_\mu f(x)| > t\}) \leqslant e \cdot e^{-t/\beta}.$$

Ponadto

$$\mu(\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x) - \mathbb{E}_\mu f(x)| > t\}) \leqslant e \cdot e^{-t/(e+1)\beta},$$

a zatem na mocy Twierdzenia 2.3.18 spełnia również nierówność Cheegera z pewną stałą $\kappa(\beta)$ zależną tylko od β.

Dowód. Niech $A_t = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) - \mathrm{Med}_\mu f > t\}$ i $A = \{x : f(x) \leqslant \mathrm{Med}_\mu f\}$. Niech $p \geqslant 2$. Mamy $\mu(A) \geqslant 1/2$, a zatem $1 - \mu(A + \beta Z_p(\mu)) \leqslant e^{-p}(1 - \mu(A)) \leqslant e^{-p}/2$. Na mocy Uwagi 2.3.11 mamy

$$\mathcal{Z}_p(\mu) \subset \frac{p}{2}\mathcal{Z}_2(\mu) = \frac{p}{2}B_2^n.$$

Niech $t = \beta p/2$, wtedy skoro f jest 1–Lipszycowska, $A_t \cap (A + tB_2^n) = \emptyset$, zatem $\mu(A_t) \leqslant 1 - \mu(A + tB_2^n) \leqslant 1 - \mu(A + \beta Z_p) \leqslant e^{-2t/\beta}/2$ dla $t \geqslant \beta$. Podobnie można dowieść, że dla $t \geqslant \beta$ mamy $\mu(\{x : f(x) - \mathrm{Med}_\mu f(x) < -t\}) \leqslant e^{-2t/\beta}/2$, co daje tezę dla $t \geqslant \beta$. Jeżeli $t \leqslant \beta$, wtedy oczywiście $\mu(A_t) \leqslant 1 \leqslant e \cdot e^{-t/\beta}$.

Przez całkowanie przez części dostajemy $\mathbb{E}_\mu f \leqslant \mathrm{Med}_\mu f + \int_0^\infty \mu(\{x : f(x) > \mathrm{Med}_\mu f + t\})dt \leqslant \mathrm{Med}_\mu f + e\beta$, zatem rozważając osobno $t > (e+1)\beta$ i $t \leqslant (e+1)\beta$ dostajemy tezę. □

Mamy już zatem narzędzia, by radzić sobie zarówno z małymi, jak i z dużymi t. To wystarcza, aby z CI odzyskać IC.

Stwierdzenie 2.3.20. *Niech μ będzie probabilistyczną, symetryczną i izotropową miarą log–wklęsłą na $\mathbb{R}^n$ spełniającą $CI(\beta)$ oraz nierówność Cheegera ze stałą κ. Wtedy miara μ spełnia $IC(36\max\{6e\beta, \kappa^{-1}\})$.*

Dowód. Na mocy Stwierdzenia 2.3.9 oraz nierówności (2.3.6) dla dowolnego $t \leqslant 1$ mamy

$$\mu(A) = \nu(-\infty, x] \quad \Rightarrow \quad \mu(A + \frac{1}{\kappa}B_t(\mu)) \geqslant \mu(A + \frac{1}{\kappa}\sqrt{t}B_2^n) \geqslant \nu(-\infty, x + \sqrt{t}].$$

Dla $t \geqslant 1$ możemy zastosować Stwierdzenie 2.3.15, by dostać

$$\mu(A) = \nu(-\infty, x] \quad \Rightarrow \quad \mu(A + 6e\beta B_t(\mu)) > \nu(-\infty, x + t].$$

Zatem w ogólności możemy napisać

$$\mu(A) = \nu(-\infty, x] \quad \Rightarrow \quad \mu(A + \max\{6e\beta, \kappa^{-1}\}B_t(\mu)) > \nu(-\infty, x + \max\{t, \sqrt{t}\}]. \tag{2.3.7}$$

Mamy zatem już koncentrację przypominającą tę dla miary wykładniczej. Przez D oznaczmy $\max\{6e\beta, \kappa^{-1}\}$. Musimy udowodnić, że para $(\mu, \Lambda_\mu^\star(\cdot/36D))$ spełnia własność (τ). Ustalmy funkcję mierzalną $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Dla dowolnej funkcji mierzalnej $h : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ oraz dowolnego $t \in \mathbb{R}$ wprowadźmy oznaczenie

$$A(h, t) := \{x \in \mathbb{R}^k : h(x) < t\}.$$

Niech g będzie taką niemalejącą, prawostronnie ciągłą funkcją na $\mathbb{R}$, że $\mu(A(f,t)) = \nu(A(g,t))$. Wtedy rozkład g względem ν jest taki sam, jak rozkład f względem μ, a zatem

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-f(x)} d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-g(x)} d\nu(x).$$

Zatem by dowieść własności (τ) wystarcza wykazać, że

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{f \Box \Lambda_\mu^\star(\frac{\cdot}{36D})} d\mu \leqslant \int_{\mathbb{R}} e^{g \Box w} d\nu,$$

gdzie w jest zdefiniowana tak, jak w Twierdzeniu 2.3.5. Udowodnimy silniejszą własność:

$$\forall_{u>0} \ \ \mu\Big(A\Big(f \Box \Lambda_\mu^\star(\frac{\cdot}{36D}), u\Big)\Big) \geqslant \nu\Big(A(g \Box w, u)\Big).$$

Jako, że zbiór $A(g \Box w, u)$ jest półprostą, wystarczy pokazać, że

$$g(x_1) + w(x_2) < u \ \Rightarrow \ \mu\Big(A\Big(f \Box \Lambda_\mu^\star(\frac{\cdot}{36D}), u\Big)\Big) \geqslant \nu(-\infty, x_1 + x_2]. \tag{2.3.8}$$

Ustalmy x_1 i x_2 tak, by $g(x_1)+w(x_2) < u$ i weźmy $s_1 > g(x_1)$, $s_2 = w(x_2)$, przy czym $s_1+s_2 < u$. Niech $A := A(f, s_1)$, wtedy $\mu(A) = \nu(A(g, s_1)) \geqslant \nu(-\infty, x_1]$. Z definicji w łatwo wynika, że $x_2 \leqslant \max\{6\sqrt{s_2}, 9s_2\}$, skąd z nierówności (2.3.7)

$$\mu(A + DB_{36s_2}(\mu) \geqslant \nu(-\infty, x_1 + x_2].$$

Jako, że

$$\begin{aligned} A + DB_{36s_2}(\mu) &\subset A + 36DB_{s_2}(\mu) = A(f, s_1) + \{x : \Lambda_\mu^\star(x/36D) < s_2\} \\ &\subset A\Big(f \Box \Lambda_\mu^\star\Big(\cdot/36D\Big), s_1 + s_2\Big), \end{aligned}$$

dostaliśmy nierówność (2.3.8), a zatem i tezę. □

Podsumujmy zauważając, że z założeń Stwierdzenia 2.3.20 można się pozbyć izotropowości:

Twierdzenie 2.3.21. *Niech μ będzie probabilistyczną, symetryczną miarą log–wklęsłą na $\mathbb{R}^n$. Wtedy:*

1. *Jeśli μ spełnia $IC(C)$, to μ spełnia $CI(C')$ i C' zależy tylko od C,*
2. *Jeśli μ spełnia $CI(C)$, to μ spełnia $CI(C')$ i C' zależy tylko od C,*
3. *Jeśli μ spełnia $IC(C)$ bądź $CI(C)$ i jest izotropowa, to spełnia również nierówność Cheegera ze stałą κ zależną tylko od C.*

Dowód. Punkt 1. wynika wprost ze Stwierdzenia 2.3.13.

By udowodnić punkt 3. zauważmy, że na mocy punktu 1. można założyć, że μ spełnia $CI(C)$, zatem na mocy Twierdzenia 2.3.18 oraz Stwierdzenia 2.3.19 μ spełnia nierówność Cheegera.

By udowodnić punkt 2. zauważmy, że na mocy Stwierdzenia 2.1.4 istnieje takie przekształcenie liniowe L, że miara $\mu \circ L^{-1}$ jest izotropowa. Jako, że $\mathcal{Z}_p(\mu \circ L^{-1}) = L(\mathcal{Z}_p(\mu))$, mamy

$$\mu \circ L^{-1}(A + \mathcal{Z}_p(\mu \circ L^{-1})) = \mu \circ L^{-1}(L(L^{-1}(A) + \mathcal{Z}_p(\mu))) = \mu(L^{-1}(A) + \mathcal{Z}_p(\mu)),$$

czyli $CI(C)$ dla μ pociąga za sobą $CI(C)$ dla $\mu \circ L^{-1}$. Z tego, na mocy Stwierdzenia 2.3.20 oraz punktu 3, wynika $IC(C')$ dla $\mu \circ L^{-1}$, a z tego z kolei na mocy Stwierdzenia 2.3.4 $IC(C')$ dla μ. □

2.3.3 Konsekwencje optymalnej koncentracji

Pierwotną motywacją do tego kierunku badań było postawiona przez Rafała Latałę hipoteza porównywania silnych i słabych momentów.

Definicja 2.3.22. *Powiemy, że miara probabilistyczna μ na $\mathbb{R}^n$ ma* porównywalne silne i słabe momenty *ze stałą γ (w skrócie $CWSM(\gamma)$, od Comparable Weak & Strong Moments), jeśli dla dowolnej normy $\|\cdot\|$ na $\mathbb{R}^n$ zachodzi*

$$\forall_{p\geqslant q\geqslant 2} \left(\int \left|\|x\| - \left(\int \|x\|^q d\mu\right)^{1/q}\right|^p d\mu\right)^{1/p} \leqslant \gamma \sup_{\|u\|^*\leqslant 1} \left(\int |\langle u,x\rangle|^p d\mu\right)^{1/p}. \tag{2.3.9}$$

gdzie $\|\cdot\|_*$ oznacza normę dualną do $\|\cdot\|$.

Pokażmy, jak $CWSM$ wynika z CI:

Stwierdzenie 2.3.23. *Niech μ będzie log–wklęsłą miarą probabilistyczną na $\mathbb{R}^n$, spełniającą $CI(\beta)$. Wtedy μ spełnia również $CWSM(4\beta)$.*

Dowód. Ustalmy normę $\|\cdot\|$. Dla $p \geqslant 2$ niech

$$m_p := \sup_{\|u\|_*\leqslant 1} \left(\int |\langle u,x\rangle|^p d\mu\right)^{1/p}.$$

Niech $M := \mathrm{Med}_\mu(\|x\|)$, $A := \{x\colon \|x\| \leqslant M\}$, zaś $\tilde{A} := \{x\colon \|x\| \geqslant M\}$. Wtedy $\mu(A), \mu(\tilde{A}) \geqslant 1/2$, więc na mocy CI($\beta$) i Uwagi 2.3.11 mamy

$$\forall_{t\geqslant p}\ 1 - \mu\Big(A + \frac{\beta t}{p}\mathcal{Z}_p(\mu)\Big) \leqslant \frac{1}{2}e^{-t},\ 1 - \mu\Big(\tilde{A} + \frac{\beta t}{p}\mathcal{Z}_p(\mu)\Big) \leqslant \frac{1}{2}e^{-t}.$$

Niech $y \in \mathcal{Z}_p$, wtedy istnieje takie $u \in \mathbb{R}^n$, że $\|u\|_* \leqslant 1$ oraz

$$\|y\| = \langle u,y\rangle \leqslant \left(\int |\langle u,x\rangle|^p d\mu(x)\right)^{1/p} \leqslant m_p,$$

a więc $\|x\| \leqslant M + tm_p$ dla $x \in A + t\mathcal{Z}_p(\mu)$. Zatem, o ile $t \geqslant p$, otrzymujemy

$$\mu\Big\{x\colon \|x\| \geqslant M + \frac{\beta t}{p}m_p\Big\} \leqslant 1 - \mu\Big(A + \beta\frac{t}{p}\mathcal{Z}_p(\mu)\Big) \leqslant \frac{1}{2}e^{-t}.$$

Podobnie możemy pokazać, że $\|x\| \geqslant M - tm_p$ dla $x \in \tilde{A} + t\mathcal{Z}_p(\mu)$ i $\mu\{x\colon \|x\| \leqslant M - \beta tm_p/p\} \leqslant e^{-t}/2$, a zatem

$$\mu\Big\{x\colon \Big|\|x\| - M\Big| \geqslant \frac{\beta t}{p}m_p\Big\} \leqslant e^{-t} \text{ dla } t \geqslant p.$$

Całkując przez części otrzymujemy

$$\begin{aligned}
&\left(\int |\|x\| - M|^p d\mu\right)^{1/p} \\
&\qquad \leqslant \frac{\beta m_p}{p}\left[p + \left(p\int_p^\infty t^{p-1}\mu\Big\{x\colon \Big|\|x\| - M\Big| \geqslant \frac{\beta t}{p}m_p\Big\}dt\right)^{1/p}\right] \\
&\qquad \leqslant \frac{\beta m_p}{p}\left[p + \left(p\int_p^\infty t^{p-1}e^{-t}dt\right)^{1/p}\right] \\
&\qquad \leqslant \beta m_p\Big(1 + \frac{\Gamma(p+1)^{1/p}}{p}\Big) \leqslant 2\beta m_p.
\end{aligned}$$

Aby z powyższej nierówności otrzymać tezę oznaczmy przez $\|f\|_p$ normę w sensie przestrzeni L_p, czyli $(\int |f(x)|^p dx)^{1/p}$. Niech $g(x) = \|x\|$. Wtedy na mocy nierówności trójkąta oraz nierówności $\|\cdot\|_p \geqslant \|\cdot\|_q$ dla $q \leqslant p$ otrzymujemy

$$\Big\| g - \|g\|_q \Big\|_p \leqslant \|g - M\|_p + \Big\| \|g\|_q - M \Big\|_p = \|g - M\|_p + \Big| \|g\|_q - \|M\|_q \Big|$$
$$\leqslant 2\beta m_p + \|g - M\|_q \leqslant 2\beta(m_p + m_q) \leqslant 4\beta m_p.$$

□

Ta własność pozwala w bardzo prosty sposób odzyskać szereg silnych wyników w teorii zmiennych logarytmicznie wklęsłych. Jako przykład podajmy następujące Stwierdzenie:

Stwierdzenie 2.3.24. *Niech μ będzie izotropową miarą probabilistyczną na $\mathbb{R}^n$ spełniającą* CWSM(γ). *Wtedy*

1. $\int \Big| \|x\|_2 - \sqrt{n} \Big|^2 d\mu(x) \leqslant \gamma^2$,
2. *jeśli μ jest dodatkowo log–wklęsła, to dla $p > 2$ mamy,*

$$\left(\int \|x\|_2^p d\mu \right)^{1/p} \leqslant \sqrt{n} + \frac{\gamma}{2} p.$$

Dowód. Zauważmy, że $\int \|x\|_2^2 d\mu = n$ i $\|u\|_2^* = \|u\|_2$. Zatem 1 wynika bezpośrednio z (2.3.9) dla $p = q = 2$. Co więcej, z (2.3.9) dla $q = 2$ wynika

$$\left(\int \|x\|_2^p d\mu \right)^{1/p} \leqslant \sqrt{n} + \gamma \sup_{\|u\|_2 \leqslant 1} \left(\int |\langle u, x \rangle|^p d\mu \right)^{1/p} \leqslant \sqrt{n} + \frac{\gamma}{2} p$$

na mocy izotropowości μ oraz Stwierdzenia 2.1.2. □

Własność 1 jest kluczowym składnikiem w dowodzie Centralnego Twierdzenia Granicznego dla ciał wypukłych [24], zatem $CWSM(\gamma)$ pozwalaloby odzyskać w stosunkowo prosty sposób dowód Centralnego Twierdzenia Granicznego. Własność 2 wzmacnia wynik Paourisa [40], mówiący, że p–ty moment normy euklidesowej dla symetrycznego, izotropowego wektora logarytmicznie wklęsłego szacuje się przez $C(p + \sqrt{n})$.

W dalszym ciągu pracy udowodnimy w szczególności własność CI dla kul B_p^n. Uzyskana koncentracja jest silniejsza, aniżeli dotychczas znane wyniki nawet dla tych kul. W szczególności otrzymamy, jako produkt poniekąd uboczny, nierówność izoperymetryczną silniejszą niż nierówność Cheegera (która z CI wynika na mocy Twierdzenia 2.3.18) dla kul B_p^n przy $p \geqslant 2$ (przypadek $p \leqslant 2$ został rozwiązany przez S. Sodina w [45]).

2.3.4 Hipotezy i przypadki szczególne

Trudno jednoznacznie rozstrzygnąć, jak szeroka klasa miar powinna spełniać $CI(\beta)$. Wrodzony optymizm oraz zaufanie do przyjazności matematyki dla zwykłego człowieka każe jednak odważyć się na następującą hipotezę:

Hipoteza 3. *Istnieje taka stała liczbowa C, że dowolna symetryczna miara logarytmicznie wklęsła spełnia $CI(C)$.*

Oczywiście powyższa hipoteza, na mocy Twierdzenia 2.3.21 jest równoważna analogicznej hipotezie dla własności IC.

Może się zdarzyć, oczywiście, że tak silna hipoteza jest nazbyt śmiała — wtedy wciąż aktualne pozostają pytania o inne klasy miar logarytmicznie wklęsłych, które można rozpatrywać. Naturalnym uogólnieniem kul B_p^n są kule Orlicza (dla których, w szczególności, mamy ujemną stowarzyszoność modułów), a dalej kule permutacyjnie niezmiennicze i kule 1–symetryczne.. Warto zauważyć, że w szczególnych wypadkach — dla małych zbiorów, albo dużych t — hipoteza ta zachodzi, o czym świadczy następujące stwierdzenie:

Stwierdzenie 2.3.25. *Niech μ będzie probabilistyczną, symetryczną miarą log–wklęsłą na $\mathbb{R}^n$, zaś c niech będzie dowolną liczbą z przedziału $(0, 1]$. Wtedy*

$$\mu\Big(A + \frac{40}{c}\mathcal{Z}_p(\mu)\Big) \geqslant \frac{1}{2}\min\{e^p\mu(A), 1\}$$

o ile $p \geqslant cn$ lub $\mu(A) \leqslant e^{-cn}$.

Dowód. Przy pomocy standardowego szacowania objętościowego dla dowolnego $r > 0$ możemy wybrać $S \subset \mathcal{M}_r(\mu)$ tak, by $\#S \leqslant 5^n$ oraz $\mathcal{M}_r(\mu) \subset \bigcup_{u\in S}(u + \frac{1}{2}\mathcal{M}_r(\mu))$. Wtedy dla $t > 0$ mamy,

$$x \notin t\mathcal{Z}_r(\mu) \ \Rightarrow\ \max_{u\in S}\langle u, x\rangle \geqslant t/2$$

i z nierówności Czebyszewa

$$\mu\Big(\mathbb{R}^n \setminus t\mathcal{Z}_r(\mu)\Big) \leqslant \sum_{u\in S}\mu\Big\{x\colon\ \langle u, x\rangle \geqslant \frac{t}{2}\Big\} \leqslant \sum_{u\in S}\Big(\frac{2}{t}\Big)^r \int \langle u, x\rangle_+^r\, d\mu \leqslant \frac{1}{2}5^n\Big(\frac{2}{t}\Big)^r.$$

Niech $\mu(A) = e^{-q}$, rozważymy dwa przypadki.

1. $p \geqslant \max\{q, cn\}$. Wtedy na mocy Uwagi 2.3.11,

$$\mu(30c^{-1}\mathcal{Z}_p(\mu)) > \mu(30\mathcal{Z}_{\max\{p,n\}}) \geqslant 1 - \frac{1}{2}e^{-\max\{p,n\}} \geqslant 1 - \mu(A),$$

a więc $A \cap 30c^{-1}\mathcal{Z}_p(\mu) \neq \emptyset$, i zatem $0 \in A + 30c^{-1}\mathcal{Z}_p(\mu)$ i

$$\mu(A + 40c^{-1}\mathcal{Z}_p(\mu)) \geqslant \mu(10c^{-1}\mathcal{Z}_p(\mu)) \geqslant 1/2.$$

2. $q \geqslant \max\{p, cn\}$. Niech $\tilde{q} := \max\{q, n\}$, oraz

$$\tilde{A} := A \cap 30c^{-1}\mathcal{Z}_q(\mu).$$

Tak jak w przypadku 1, mamy $\mu(30c^{-1}\mathcal{Z}_q(\mu)) > 1 - e^{-\tilde{q}}/2$, zatem $\mu(\tilde{A}) \geqslant \mu(A)/2$. Co więcej,

$$\Big(1 - \frac{p}{q}\Big)\tilde{A} \subset A - \frac{p}{q}30c^{-1}\mathcal{Z}_q(\mu) \subset A + 30c^{-1}\mathcal{Z}_p(\mu)$$

i wobec tego

$$\begin{aligned}\mu\Big(A + 40c^{-1}\mathcal{Z}_p(\mu)\Big) &\geqslant \mu\Big(\Big(1 - \frac{p}{q}\Big)\tilde{A} + \frac{p}{q}10c^{-1}\mathcal{Z}_q(\mu)\Big)\\ &\geqslant \mu\Big(\Big(1 - \frac{p}{q}\Big)\tilde{A} + \frac{p}{q}10\mathcal{Z}_{\tilde{q}}(\mu)\Big) \geqslant \mu(\tilde{A})^{1-\frac{p}{q}}\mu(10\mathcal{Z}_{\tilde{q}})^{\frac{p}{q}}\\ &\geqslant \Big(\frac{1}{2}\mu(A)\Big)^{1-\frac{p}{q}}\Big(\frac{1}{2}\Big)^{\frac{p}{q}} \geqslant \frac{1}{2}\mu(A)\mu(A)^{-\frac{p}{q}} = \frac{1}{2}e^p\mu(A).\end{aligned}$$

$\square$

Tego Stwierdzenia będziemy jeszcze używać przy dowodzie nierówności CI dla kul B_p^n. Warto tu zauważyć, że w istocie oznacza ono, że przy badaniu nierówności CI dla ustalonego zbioru A oraz dla $t > 1$ możemy z A wyrzucić fragmenty o łącznej mierze nie większej niż Ce^{-Cn}. Faktycznie bowiem, jeśli A ma miarę porównywalną z e^{-Cn}, to CI zachodzi na mocy powyższego Stwierdzenia, jeśli natomiast nie, to odrzucone fragmenty nie wpłyną na miarę zbioru (zatem jeśli okrojony zbiór $\tilde{A}$ powiększy się przy rozszerzeniu e^t razy, to rozszerzenie będzie większe niż $(1-\varepsilon)e^t\mu(A)$).

Warto tu też wspomnieć o słabszej niż CI hipotezie Kannana–Lovasza–Simonovitsa:

Hipoteza 4. *Istnieje taka stała $\kappa > 0$, że dowolna izotropowa, probabilistyczna miara log–wklęsła spełnia nierówność Cheegera 2.3.16 ze stałą κ.*

Oczywiście na mocy Twierdzenia 2.3.21 ta hipoteza wynika z hipotezy CI.

Słabszym wariantem hipotezy CI jest następująca hipoteza:

Hipoteza 5. *Istnieje stała C taka, że dla każdej 1–symetrycznej, probabilistycznej miary log–wklęsłej μ na $\mathbb{R}^n$ oraz każdego zbioru mierzalnego $A \subset \mathbb{R}^n$ spełniającego $\mu(A) \geqslant 1/2$ zachodzi*

$$\mu(A + C(tB_1^n + \sqrt{t}B_2^n)) \geqslant 1 - e^{-t}(1 - \mu(A)).$$

Poświęćmy chwilę, by umotywować tę hipotezę. Kula $C(tB_1^n + \sqrt{t}B_2^n)$, pojawiająca się po lewej stronie nierówności, to — z dokładnością do stałej multyplikatywnej — kula $\mathcal{Z}_t(\nu^n)$. Zatem intuicja stojąca za tą hipotezą jest taka, że miara wykładnicza jest w pewnym sensie ekstremalna — można powiedzieć „najgorzej skoncentrowana" — w klasie miar 1–symetrycznych, logarytmicznie wklęsłych. Hipoteza CI pociąga za sobą Hipotezę 5. Jednak może, *a priori*, zdarzyć się, że hipoteza 5 jest prawdziwa w szerszej klasie miar niż CI, albo przynajmniej, że łatwiejsza do udowodnienia.

Rozdział 3

Miary produktowe

3.1 Wprowadzenie

Choć zapewne jest to oczywista definicja, wypada rozpocząć rozdział od formalnego zdefiniowania tematu naszych rozważań:

Definicja 3.1.1. *Miarę μ na $\mathbb{R}^n$ nazwiemy* produktową*, jeśli $\mu = \mu_1 \otimes \mu_2 \otimes \ldots \otimes \mu_n$, gdzie μ_i to miary na prostej.*

Miary produktowe zazwyczaj są najprostszym przypadkiem, który możemy rozważyć z probabilistycznego punktu widzenia. Zauważmy oczywisty fakt, że jeśli miara μ jest produktowa, a my rozważamy wektor $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ o rozkładzie μ, to zmienne X_i są niezależne. Zatem — jeżeli interesują nas własności probabilistyczne — poruszamy się po gruncie, który został dogłębnie przebadany. Przykładowo Centralne Twierdzenie Graniczne dla zmiennych niezależnych znane jest od lat dwudziestych poprzedniego wieku. Innym przykładem jest ujemna stowarzyszoność modułów — jeśli X ma rozkład produktowy, to skoro X_i są niezależne, to $\mathrm{Cov}(f(|X_{i_1}|, \ldots, |X_{i_k}|), g(|X_{j_1}|, \ldots, |X_{j_l}|)) = 0$, więc moduły są w trywialny sposób ujemnie (a także dodatnio) stowarzyszone. Z naszego punktu widzenia możemy się zatem spodziewać, że wyniki dla miar produktowych będą stosunkowo proste. Tak też jest w istocie.

3.2 Hipoteza IC

Zacznijmy od dowodu hipotezy IC dla miar produktowych. Na mocy Stwierdzenia 2.3.3 produkt miar spełniających IC spełnia IC, więc wystarczy udowdnić IC dla miary na prostej.

Twierdzenie 3.2.1. *Dowolna symetryczna miara log–wklęsła na $\mathbb{R}$ spełnia* IC(48)*.*

Dowód. Niech μ będzie symetryczną miarą log–wklęsłą na $\mathbb{R}$. Niech $g(x)$ oznacza gęstość μ (jeśli μ jest skupiona w jednym punkcie, to trywialnie spełnia $IC(\varepsilon)$ dla każdego ε dodatniego, zaś jeśli nie, to na mocy Tw. Borella [11] ma gęstość), dodatkowo wprowadźmy $\mu[x, \infty) = e^{-h(x)}$. Na mocy Stwierdzenia 2.3.4 możemy założyć, że μ jest izotropowa. Na mocy nierówności Hensley'a (Lemat 2.1.1) otrzymujemy

$$g(0) = g(0)\Big(\int_{\mathbb{R}} x^2 g(x) dx\Big)^{1/2} \geqslant \frac{1}{2\sqrt{3}} \geqslant \frac{1}{8}.$$

Niech $T\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie taką funkcją, że $\nu(-\infty, x) = \mu(-\infty, Tx)$. Wtedy $\mu = \nu \circ T^{-1}$. Bezpośrednie przekształcenie równości $\nu(x, \infty) = \mu(Tx, \infty)$ dla $x \geqslant 0$ prowadzi do równości

$h(Tx) = x + \ln 2$ dla $x \geqslant 0$. W szczególności widzimy, że T jest wklęsła (bo h jest wypukła), a skoro μ jest symetryczna, to T jest nieparzysta. W szczególności, $|Tx - Ty| \leqslant 2|T(x-y)|$ dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$. Zauważmy też, że $T'(0) = 1/(2g(0)) \leqslant 4$, zatem na mocy wklęsłości T, $Tx \leqslant 4x$ dla $x \geqslant 0$.

Niech

$$\tilde{h}(x) := \begin{cases} x^2 & \text{dla } |x| \leqslant 2/3 \\ \max\{4/9, h(|x|)\} & \text{dla } |x| > 2/3. \end{cases}$$

Twierdzimy, że $(\mu, \tilde{h}(\frac{\cdot}{48}))$ ma własność (τ). Zauważmy, że $\tilde{h}((Tx-Ty)/48) \leqslant \tilde{h}(T(|x-y|)/24)$, więc na mocy Stwierdzenia 2.3.2 wystarczy sprawdzić, że

$$\tilde{h}\left(\frac{Tx}{24}\right) \leqslant w(x) \text{ dla } x \geqslant 0, \tag{3.2.1}$$

gdzie $w(x)$ jest zdefiniowane tak, jak w Twierdzeniu 2.3.5. Rozpatrzymy dwa przypadki:

1. $Tx \leqslant 16$, wtedy
$$\tilde{h}\left(\frac{Tx}{24}\right) = \left(\frac{Tx}{24}\right)^2 \leqslant \min\left\{\frac{4}{9}, \left(\frac{x}{6}\right)^2\right\} \leqslant w(x).$$

2. $Tx \geqslant 16$, wtedy $x \geqslant 4$ i
$$\tilde{h}\left(\frac{Tx}{24}\right) = \max\left\{\frac{4}{9}, h\left(\frac{Tx}{24}\right)\right\} \leqslant \max\left\{\frac{4}{9}, \frac{h(Tx)}{24}\right\} = \max\left\{\frac{4}{9}, \frac{x + \ln 2}{24}\right\} \leqslant \frac{x}{9}$$
$$\leqslant w(x).$$

Zatem nierówność (3.2.1) jest spełniona w obydwu przypadkach.

By skończyć dowód, potrzebujemy pokazać, że $\Lambda_\mu^*(x) \leqslant \tilde{h}(x)$. Dla $|x| \leqslant 2/3$ wynika to ze Stwierdzenia 2.3.9. Dla większych x zauważmy, że dla dowolnych $t, x \geqslant 0$ zachodzi $\Lambda_\mu(t) \geqslant tx + \ln \mu[x, \infty) = tx - h(x)$, zatem

$$\Lambda_\mu^*(x) = \Lambda_\mu^*(|x|) = \sup_{t \geqslant 0} \left\{t|x| - \Lambda_\mu(t)\right\} \leqslant h(|x|) \leqslant \tilde{h}(x).$$

□

Stąd, na mocy Stwierdzenia 2.3.3 oraz Twierdzenia 2.3.21 mamy następujący wniosek:

Wniosek 3.2.2. *Dowolna symetryczna, produktowa miara log–wklęsła na $\mathbb{R}^n$ spełnia $IC(48)$ oraz $CI(C)$ dla pewnej stałej liczbowej C (można dobrać $C < 1044$ na mocy Stwierdzenia 2.3.13).*

Warto tu zwrócić uwagę na to, jak wiele daje tu Twierdzenie 2.3.21 — o ile w przypadku własności (τ), od której pochodzi IC, struktura produktowa jest stosunkowo prosta i łatwo — nawet bez czytania dowodu — uwierzyć, że własność IC jest zachowana dla produktów miar, o tyle w wypadku własności CI już tej struktury produktowej nie widać. Kule $\mathcal{Z}_p(\mu)$ dla miar produktowych μ generalnie nie mają struktury produktowej (tj. nie są kostkami). By to zilustrować, a także na potrzeby dalszych zastosowań, zbadajmy, jak wyglądają kule $\mathcal{Z}_p$ dla najprostszych miar produktowych, odpowiadających w pewnym sensie kulom B_p^n, czyli dla miar ν_p^n. Przypomnijmy, że ν_p^n ma gęstość $(2\gamma_p)^{-1} e^{-\|x\|_p^p}$.

Stwierdzenie 3.2.3. *Dla dowolnego $p \geqslant 1$ oraz $t \in \mathbb{R}$ mamy*

$$B_t(\nu_p) \sim \{x : f_p(|x|) \leqslant t\}, \text{ oraz } \Lambda_{\nu_p}^\star(t/C) \leqslant f_p(|t|) \leqslant \Lambda_{\nu_p}^\star(Ct),$$

gdzie $f_p(t) = t^2$ dla $t < 1$ oraz $f_p(t) = t^p$ dla $t \geqslant 1$.

Dowód. Będziemy używali faktów udowodnionych w części 2.3.1. Zauważmy, że miara ν_p jest log–wklęsła i symetryczna. Mamy też

$$\sigma_p^2 := \int_{\mathbb{R}} x^2 d\nu_p(x) = \frac{1}{2\gamma_p}\int_{\mathbb{R}} x^2 e^{-|x|^p}dx = \frac{\Gamma(1+\frac{3}{p})}{3\Gamma(1+\frac{1}{p})} \sim 1$$

dla $p \in [1,\infty)$. Miara $\tilde{\nu}_p$ z gęstością $\sigma_p d\nu_p(\sigma_p x)$ jest izotropowa, zatem na mocy Wniosku 2.3.12 mamy $B_t(\tilde{\nu}_p) \sim \sqrt{t}B_2^1 = [-\sqrt{t},\sqrt{t}]$ dla $t \leqslant 1$. Zatem, skoro $B_t(\nu_p) = \sigma_p B_t(\tilde{\nu}_p)$, otrzymujemy $B_t(\nu_p) \sim [-\sqrt{t},\sqrt{t}]$ dla $t \leqslant 1$.

Dla $t \geqslant 1$ mamy

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_t(\nu_p) &= \left\{u \in \mathbb{R}\colon \frac{1}{2\gamma_p}\int_{\mathbb{R}} |u|^t|x|^t e^{-|x|^p}dx \leqslant 1\right\} \\ &= \left\{u \in \mathbb{R}\colon |u| \leqslant \sqrt[t]{\frac{(t+1)\Gamma(1+\frac{1}{p})}{\Gamma(1+\frac{t+1}{p})}}\right\} \sim \{u \in \mathbb{R}\colon |u| \leqslant t^{-1/p}\}.\end{aligned}$$

Zatem $Z_t(\nu_p) \sim [-t^{1/p}, t^{1/p}]$ dla $|t| \geqslant 1$, więc na mocy Stwierdzeń 2.3.7 i 2.3.8, $B_t(\nu_p) \sim [-t^{1/p}, t^{1/p}]$. Wobec tego, dla dowolnego $t \geqslant 0$ mamy $\{x\colon f_p(|x|) \leqslant t\} \sim \{x : \Lambda^\star_{\nu_p}(x) \leqslant t\}$, czyli $\Lambda^\star_{\nu_p}(t/C) \leqslant f_p(t) \leqslant \Lambda^\star_{\nu_p}(Ct)$. Do tego $\Lambda^\star_{\nu_p}$ jest symetryczna, co kończy dowód. □

Wniosek 3.2.4. *Dla dowolnego $t > 0$ oraz $n \in \mathbb{N}$ mamy*

$$B_t(\nu_p^n) \sim \begin{cases} \sqrt{t}B_2^n + t^{1/p}B_p^n & \textit{dla } p \in [1,2] \\ \sqrt{t}B_2^n \cap t^{1/p}B_p^n & \textit{dla } p \geqslant 2. \end{cases}$$

Dowód. Na mocy Stwierdzenia 3.2.3,

$$B_t(\nu_p^n) = \{x \in \mathbb{R}^n\colon \sum \Lambda^\star_{\nu_p}(x_i) \leqslant t\} \sim \{x \in \mathbb{R}^n\colon \sum f_p(|x_i|) \leqslant t\}.$$

Proste rachunki dowodzą, że $\{x \in \mathbb{R}^n\colon \sum f_p(|x_i|) \leqslant t\} \sim t^{1/2}B_2^n + t^{1/p}B_p^n$ dla $p \in [1,2]$ oraz $\{x \in \mathbb{R}^n\colon \sum f_p(|x_i|) \leqslant t\} \sim t^{1/2}B_2^n \cap t^{1/p}B_p^n$ dla $p \geqslant 2$. □

3.3 Zmodyfikowana koncentracja Talagranda dla miary wykładniczej

W tej części pracy zajmiemy się konkretną, bardzo ważną dla nas miarą produktową, a mianowicie miarą wykładniczą. Udowodnię nierówność, która dla dostatecznie dużych t pokazuje, że w dwupoziomowej koncentracji Talagranda czynnik $\sqrt{t}B_2^n$ potrzebny jest wyłącznie dla zbiorów, które leżą blisko środka układu współrzędnych. Co prawda miara zbioru punktów odległych (w tym sensie) od środka układu współrzędnych jest niewielka (rzędu $e^{-\sqrt{n}}$), to jednak przy próbie analizy miary wykładniczej ten zbiór często okazuje się bardzo problematyczny. W szczególności, jego miara, choć mała, jest zbyt duża, byśmy mogli go swobodnie zignorować korzystając ze Stwierdzenia 2.3.25.

Docelowo nasza nierówność będzie mówiła o zbiorach, które są odległe od środka układu współrzędnych w normie euklidesowej. Zaczniemy jednak od lematu, który opisuje zachowanie zbiorów odległych od zera w jednym kierunku współrzędnościowym. Dowód będzie zastosowaniem nierówności Brunna-Minkowskiego.

Lemat 3.3.1. *Jeśli $u \geqslant t > 0$, to dla dowolnego $i \in \{1, \dots, n\}$ zachodzi*

$$\Big|\Big(A + tB_1^n\Big) \cap nB_1^n \cap \Big\{x\colon |x_i| \geqslant u - t\Big\}\Big| \geqslant e^{t/2}\Big|A \cap nB_1^n \cap \Big\{x\colon |x_i| \geqslant u\Big\}\Big|.$$

Dowód. Bez straty ogólności możemy założyć, że $i = 1$ oraz $u \leqslant n$. Niech $A_1 := A \cap nB_1^n \cap \{x\colon x_1 \geqslant u\}$, zaś $B := \{x \in B_1^n : x_1 \geqslant \sum_{i\geqslant 2} |x_i|\}$. Z definicji B oraz A_1 widzimy, że $A_1 - tB \subset nB_1^n$. Z drugiej strony $B = \{x : |x_1 - 1/2| + \sum_{i\geqslant 2} |x_i| \leqslant 1/2\}$, więc $|B| = 2^{-n}|B_1^n| = (2r_{1,n})^{-n}$. Zatem

$$|(A_1 + tB_1^n) \cap nB_1^n| \geqslant |(A_1 - tB) \cap nB_1^n| = |A_1 - tB|.$$

Rozważmy teraz

$$s := \frac{2r_{1,n}|A_1|^{1/n}}{t + 2r_{1,n}|A_1|^{1/n}}.$$

Łatwo przeliczyć, że $|tB/(1 - s)| = |A_1/s|$. Skoro $A_1 \subset \{x \in nB_1^n\colon x_1 \geqslant t\}$ to widzimy, że $r_{1,n}|A_1|^{1/n} \leqslant (n - t)$ oraz $s \leqslant 2(n - t)/(2n - t)$. Możemy teraz użyć nierówności Brunna–Minkowskiego, by dostać

$$\begin{aligned}|A_1 - tB| &= \Big|s\frac{A_1}{s} + (1 - s)\frac{-t}{1 - s}B\Big| \geqslant \Big|\frac{A_1}{s}\Big|^s \Big|\frac{-t}{1 - s}B\Big|^{1-s} = \Big|\frac{A_1}{s}\Big| = s^{-n}|A_1| \\ &\geqslant \Big(\frac{2n - t}{2n - 2t}\Big)^n |A_1| = \Big(\frac{1}{1 - \frac{t}{2n-t}}\Big)^n |A_1| \geqslant e^{\frac{tn}{2n-t}}|A_1| \geqslant e^{t/2}|A_1|.\end{aligned}$$

Zauważmy, że $A_1 + tB_1^n \subset \{x\colon x_1 \geqslant u - t\}$, więc dostajemy jednocześnie

$$\Big|\Big(A + tB_1^n\Big) \cap nB_1^n \cap \Big\{x\colon x_1 \geqslant u - t\Big\}\Big| \geqslant e^{t/2}\Big|A \cap nB_1^n \cap \Big\{x\colon x_1 \geqslant u\Big\}\Big|,$$

w ten sam sposób pokazujemy, że

$$\Big|\Big(A + tB_1^n\Big) \cap nB_1^n \cap \Big\{x\colon x_1 \leqslant -u + t\Big\}\Big| \geqslant e^{t/2}\Big|A \cap nB_1^n \cap \Big\{x\colon x_1 \leqslant -u\Big\}\Big|.$$

□

Uwaga 3.3.2. *Podobny wynik (acz ze stałą multyplikatywną) można uzyskać podobną, geometryczną metodą o istotnie większym stopniu skomplikowania dla kul $n^{1/p}B_p^n$ zamiast nB_1^n przy $p \in [1, 2]$. My jednak pójdziemy inną drogą, i dla kul B_p^n odpowiedni rezultat otrzymamy jako wynik zastosowania odpowiedniego transportu miary.*

Lemat 3.3.3. *Jeśli $u \geqslant t > 0$, to dla dowolnego $i \in \{1, \dots, n\}$ mamy*

$$\nu^n\Big(\Big(A + tB_1^n\Big) \cap \Big\{x\colon |x_i| \geqslant u - t\Big\}\Big) \geqslant e^{t/2}\nu^n\Big(A \cap \Big\{x\colon |x_i| \geqslant u\Big\}\Big).$$

Dowód. Rozważmy dowolne $k \in \mathbb{N}$. Niech $P : \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}^n$ będzie rzutem na pierwsze n współrzędnych. Niech ρ_k będzie miarą jednostajną na $(n + k)B_1^{n+k}$, zaś $\tilde{\nu}_k$ miarą zdefiniowaną jako $\tilde{\nu}_k(A) = \rho_k(P^{-1}(A))$. Rozważmy dowolny zbiór $A \subset \mathbb{R}^n$. Zauważmy, że dla $C \subset \mathbb{R}^n$ mamy

$$C \cap \{x\colon |x_i| \geqslant s\} = P\Big(P^{-1}(C) \cap \{x\colon |x_i| \geqslant s\}\Big),$$

a także $P^{-1}(A) + B_1^{n+k} \subset P^{-1}(A + B_1^n)$. Na mocy Lematu 3.3.1 otrzymujemy

$$\rho_k\Big(\Big(P^{-1}(A) + tB_1^{n+k}\Big) \cap \Big\{x\colon |x_i| \geqslant u - t\Big\}\Big) \geqslant e^{t/2}\rho_k\Big(P^{-1}(A) \cap \Big\{x\colon |x_i| \geqslant u\Big\}\Big),$$

a zatem

$$\tilde{\nu}_k\Big(\Big(A + tB_1^n\Big) \cap \Big\{x\colon |x_i| \geqslant u - t\Big\}\Big) \geqslant e^{t/2}\tilde{\nu}_k\Big(A \cap \Big\{x\colon |x_i| \geqslant u\Big\}\Big).$$

Kiedy $k \to \infty$, wiemy, że $\tilde{\nu}_k(C) \to \nu^n(C)$ dla dowolnego $C \in \mathcal{B}(R^n)$. Zatem przez przejście graniczne dostajemy tezę. □

Aby przejść od zbiorów o dużej ustalonej współrzędnej do zbiorów odległych od zera w metryce euklidesowej będziemy, zamiast miary zbioru, rozważać całkę kwadratu normy euklidesowej po tym zbiorze. Dzieląc nasz zbiór na podzbiory, na których kwadrat normy jest w przybliżeniu stały będziemy w stanie powiązać miarę z całką, zaś poprzez całkowanie przez części zdołamy oszacować całkę.

Stwierdzenie 3.3.4. *Dla dowolnego $t > 0$ oraz $n \in \mathbb{N}$ zachodzi*

$$\int_{A+tB_1^n} |x|^2 d\nu^n(x) \geqslant e^{t/2} \int_A (|x| - t\sqrt{n})_+^2 d\nu^n(x).$$

Dowód. Niech $A_t = A + tB_1^n$. Na mocy Lematu 3.3.3 dla dowolnego $s \geqslant 0$ oraz i mamy:

$$\int_{A_t} I_{\{|x_i| \geqslant s\}} d\nu^n(x) \geqslant e^{t/2} \int_A I_{\{|x_i| \geqslant s+t\}} d\nu^n(x).$$

Zatem

$$\begin{aligned}
\int_{A_t} x_i^2 d\nu^n(x) &= \int_{A_t} \int_0^\infty 2s I_{\{|x_i| \geqslant s\}} ds \; d\nu^n(x) = \int_0^\infty 2s \int_{A_t} I_{\{|x_i| \geqslant s\}} d\nu^n(x) ds \\
&\geqslant e^{t/2} \int_0^\infty 2s \int_A I_{\{|x_i| \geqslant s+t\}} d\nu^n(x) ds \\
&= e^{t/2} \int_A \int_0^\infty 2s I_{\{|x_i| \geqslant s+t\}} ds \; d\nu^n(x) = e^{t/2} \int_A \Big(|x_i| - t\Big)_+^2 d\nu^n(x).
\end{aligned}$$

Aby dostać tezę wystarczy wysumować po wszystkich i i zauważyć, że funkcja $f(y) := (\sqrt{y} - t)_+^2$ jest wypukła na $[0, \infty)$, a więc

$$\sum_{i=1}^n (|x_i| - t)_+^2 = \sum_{i=1}^n f(x_i^2) \geqslant n f\Big(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2\Big) = (|x| - t\sqrt{n})_+^2.$$

□

Lemat 3.3.5. *Załóżmy, że $A \subset \{x \in \mathbb{R}^n \colon |x| \geqslant 5t\sqrt{n}\}$. Wtedy*

$$\nu^n(A + tB_1^n) \geqslant \frac{1}{8} e^{t/2} \nu^n(A).$$

Dowód. Niech

$$A_k := A \cap \{x \colon 5t\sqrt{n} + 2t(k-1) \leqslant |x| < 5t\sqrt{n} + 2tk\}, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Wtedy $A_k + tB_1^n \subset \{x \colon 5t\sqrt{n} + t(2k-3) \leqslant |x| < 5t\sqrt{n} + t(2k+1)\}$, a zatem

$$\nu^n(A + tB_1^n) \geqslant \frac{1}{2} \sum_{k \geqslant 1} \nu(A_k + tB_1^n).$$

Na mocy Stwierdzenia 3.3.4 zastosowanego do zbioru A_k zachodzi

$$\begin{aligned}
\Big(5t\sqrt{n} + t(2k+1)\Big)^2 \nu^n(A_k + tB_1^n) &\geqslant \int_{A_k + tB_1^n} |x|^2 d\nu^n(x) \\
&\geqslant e^{t/2} \int_{A_k} \Big(|x| - t\sqrt{n}\Big)_+^2 d\nu^n(x) \geqslant e^{t/2} \Big(4t\sqrt{n} + 2t(k-1)\Big)^2 \nu^n(A_k).
\end{aligned}$$

Wobec tego

$$\nu^n(A_k + tB_1^n) \geqslant \Big(\frac{4t\sqrt{n} + 2t(k-1)}{5t\sqrt{n} + t(2k+1)}\Big)^2 e^{t/2} \nu_n(A_k) \geqslant \frac{1}{4} e^{t/2} \nu^n(A_k).$$

Zatem

$$\nu^n(A + tB_1^n) \geqslant \frac{1}{2} \sum_{k \geqslant 1} \frac{1}{4} e^{t/2} \nu^n(A_k) = \frac{1}{8} e^{t/2} \nu^n(A).$$

□

Ostatnim krokiem jest uniezależnienie odległości od zera, której wymagamy, od t. Osiągniemy to przez powiększanie naszego zbioru A „krok po kroku" — po $10B_1^n$ za jednym razem, i sprawdzając wyniki każdego powiększenia — albo duża część naszego zbioru zostanie wepchnięta blisko środka (gdzie poradzimy sobie z nią innymi metodami), albo większość masy pozostanie na zewnątrz, zwiększając swoją objętość. Warto podkreślić, że w tej części silnie wykorzystujemy to, że rozważamy wyłącznie powiększenia o tB_1^n, a nie o standardowe $tB_1^n + \sqrt{t}B_2^n$, jako, że ten drugi zbiór nie rośnie liniowo wraz z t (a zatem złożenie dwóch powiększeń o współczynniku t nie daje powiększenia o współczynniku $2t$).

Twierdzenie 3.3.6. *Dla dowolnego $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ oraz $t \geqslant 10$, albo*

$$\nu^n\Big((A + tB_1^n) \cap 50\sqrt{n}B_2^n\Big) \geqslant \frac{1}{2}\nu^n(A) \tag{3.3.1}$$

albo

$$\nu^n(A + tB_1^n) \geqslant e^{t/10}\nu^n(A). \tag{3.3.2}$$

W szczególności (3.3.2) zachodzi, jeżeli $A \cap (50\sqrt{n}B_2^n + tB_1^n) = \emptyset$.

Dowód. Niech A_k oznacza $A + 10kB_1^n$ dla $k = 0, 1, \ldots$. Jeśli dla dowolnego $0 \leqslant k \leqslant t/10$ mamy $\nu^n(A_k \cap 50\sqrt{n}B_2^n) \geqslant \nu^n(A)/2$, zachodzi warunek (3.3.1), co kończy dowód. Załóżmy zatem, że jest przeciwnie. Niech $A'_k := A_k \setminus 50\sqrt{n}B_2^n$. Z Lematu 3.3.5 wnioskujemy, że

$$\nu^n(A_{k+1}) \geqslant \nu^n(A'_k + 10B_1^n) \geqslant \frac{1}{8}e^5\nu^n(A'_k) \geqslant \frac{1}{16}e^5\nu^n(A_k) \geqslant e^2\nu^n(A_k).$$

Przez prostą indukcję możemy udowodnić, że $\nu^n(A_k) \geqslant e^{2k}\nu^n(A)$ dla dowolnego $k \leqslant t/10$. Zatem otrzymujemy, że

$$\nu^n(A + tB_1^n) \geqslant \nu^n\Big(A_{\lfloor t/10 \rfloor}\Big) \geqslant e^{2\lfloor t/10 \rfloor}\nu^n(A) \geqslant e^{t/10}\nu^n(A).$$

□

Tego Twierdzenia będę używać w dalszej części pracy, jednak wyszczególniam je tutaj jako nową i nieznaną wcześniej formę koncentracji dla miary wykładniczej, w moim odczuciu wartą chwili uwagi samą w sobie.

Rozdział 4

Kule B_p^n

4.1 Wprowadzenie

Kule B_p^n to najbardziej podstawowy przykład klasy ciał wypukłych. Dlatego też były przedmiotem wielu prac — w szczególności to dla kul B_p^n pojawił się pierwszy dowód Centralnego Twierdzenia Granicznego [2]. Jeśli oczekujemy, że jakaś własność będzie zachodzić dla jakiejkolwiek rozsądnej klasy ciał wypukłych, wypada przede wszystkim sprawdzić ją dla kul B_p^n. To właśnie uczynimy w tym rozdziale — po przypomnieniu kilku wyników innych autorów dotyczących tej klasy, udowodnimy dla kul B_p^n zarówno ujemną stowarzyszoność modułów, jak i własność CI.

4.2 Dotychczasowe wyniki

4.2.1 Podniezależność cięć współrzędnościowych i Centralne Twierdzenie Graniczne

Z punktu widzenia badania Centralnego Twierdzenia Granicznego, przełomowymi były prace [4] i [2]. W pracy [4] autorzy dowodzą tzw. podniezależności cięć współrzędnościowych dla kul B_p^n:

Twierdzenie 4.2.1. *Niech X będzie wektorem o rozkładzie jednostajnym na B_p^n. Wtedy dla dowolnych $s_1, \ldots, s_n > 0$ zachodzi*

$$\mathbb{P}\Big(\forall_{i\in 1,\ldots,n}\ |X_i| \geqslant s_i\Big) \leqslant \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}\Big(|X_i| \geqslant s_i\Big).$$

Własność ta jest oczywiście silniejsza niż bardzo słaba ujemna stowarzyszoność modułów, a zatem w szczególności implikuje koncentrację normy euklidesowej i Centralne Twierdzenia Graniczne tak, jak w części 5.2 niniejszej rozprawy. Jest też oczywiście słabsza niż ujemna stowarzyszoność modułów.

Oprócz wykorzystania przy pierwszych dowodach Centralnego Twierdzenia Granicznego (patrz [2]) własność ta była używana także do badania nierówności koncentracyjnych, jak np. w pracy [39]. Doczekała się też szeregu uogólnień, między innymi na miarę stożkową na sferze B_p^n (patrz [39]) oraz szersze klasy miar o gęstości zależnej od p–tej normy x (patrz [6]). Większość z tych wyników uogólniają Twierdzenia 4.3.1 i 5.3.17.

4.2.2 Transport losowy i konsekwencje

W pracy [6] autorzy analizują podejście probabilistyczne do kul B_p^n. Kluczem do ich pracy jest następujące spostrzeżenie:

Twierdzenie 4.2.2. *Niech $g_1, \ldots, g_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie z gęstością ν_p, zaś niech Z będzie wykładniczą zmienną losową niezależną od $g_1, \ldots, g_n$ (tj. gęstość Z to e^{-t} dla $t \geqslant 0$). Rozważmy $G = (g_1, \ldots, g_n) \in \mathbb{R}^n$ i wektor losowy*

$$V = \frac{G}{\sum_{i=1}^n |g_i|^p + Z)^{1/p}}.$$

Wtedy V generuje znormalizowaną miarę jednostajną na B_p^n, tj. dla każdego mierzalnego zbioru $A \subset \mathbb{R}^n$ mamy

$$\mathbb{P}(V \in A) = \frac{|A \cap B_p^n|}{|B_p^n|}.$$

W tej pracy do opisania podobnej sytuacji będziemy używać bardziej języka transportu miary niż rozkładu zmiennej losowej, zatem warto też podać następujące sformułowanie powyższego wyniku:

Wniosek 4.2.3. *Rozważmy miarę produktową ξ na $\mathbb{R}^{n+1}$ o gęstości*

$$v(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}) = (2\gamma_p)^{-n} e^{-|x_1|^p - \ldots - |x_n|^p - x_{n+1}} \mathbf{1}_{x_{n+1} \geqslant 0}.$$

Niech $x = (x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})$, zaś $\tilde{x} = (x_1, \ldots, x_n)$. Wtedy $\mu_{p,n} = \xi \circ T^{-1}$, gdzie

$$T(x) = x/(\|\tilde{x}\|_p^p + x_{n+1})^{1/p}.$$

Zauważmy, że do otrzymania z miary ν_p^n miary $\mu_{p,n}$ powyższy transport używa pomocniczej zmiennej wykładniczej. Można o tym myśleć tak, że miara ν_p^n jednego punktu jest przez T rozmywana nierównomiernie po całym promieniu kuli B_p^n zawierającym ten punkt (albo, probabilistycznie, że punkt jest przenoszony w losowe miejsce na tym samym promieniu). Dlatego też ten transport będę nazywał „losowym", w przeciwieństwie do wprowadzonego później „nielosowego" transportu, który po prostu na każdym promieniu zadany jest przez funkcję przenoszącą półprosta w siebie. Transport losowy ma przewagę jawności sformułowania — wzór na przekształcenie T jest łatwy do analizy. Transport nielosowy okaże się jednak lepszy do naszych zastosowań.

Autorzy [6] przy pomocy transportu losowego są w stanie rozwiązać szereg problemów dotyczących kul B_p^n. Dla nas istotne będzie uzyskane porównanie momentów zmiennych $\mu_{p,n}$ oraz ν_p^n:

Twierdzenie 4.2.4. *Dla każdych $p, t \geqslant 1$ oraz $a \in \mathbb{R}^n$ zachodzi*

$$\Big(\int |\langle a, x\rangle|^t d\mu_{p,n}(x)\Big)^{1/t} \sim \frac{r_{p,n}}{(\max\{n,t\})^{1/p}} \Big(\int |\langle a, x\rangle|^t d\nu_p^n(x)\Big)^{1/t} \tag{4.2.1}$$

Z tego możemy wyciągnąć następujący wniosek:

Stwierdzenie 4.2.5. *Dla dowolnych $t \in [0, n]$, $p \geqslant 1$ oraz $n \in \mathbb{N}$ zachodzi $B_t(\mu_{p,n}) \sim B_t(\nu_p^n)$.*

Dowód. Dla $t < 1$ użyjemy Stwierdzeń 2.3.9 i 2.3.10. Zarówno $\mu_{p,n}$ jak i ν_p^n to symetryczne miary log–wklęsłe, i obydwie da się przeskalować tak, jak w dowodzie Stwierdzenia 3.2.3 by były izotropowe, zatem $B_t(\mu_{p,n}) \sim \sqrt{t} B_2^n \sim B_t(\nu_p^n)$.

Dla $t > 1$ użyjemy Twierdzenia 4.2.4. Zauważmy, że skoro $r_{p,n} \sim n^{1/p}$, to dla $t \in [0, n]$ Twierdzenie to oznacza po prostu porównywalność t–tych momentów $\mu_{p,n}$ i $\nu_{p,n}$. Zatem $\mathcal{M}_t(\mu_{p,n}) \sim \mathcal{M}_t(\nu_{p,n})$ dla $t \leqslant n$, a wobec tego na mocy Wniosku 2.3.12 $B_t(\mu_{p,n}) \sim B_t(\nu_{p,n})$. $\square$

Uwaga 4.2.6. *Łatwo zauważyć, że dla dowolnego ciała wypukłego K mamy $B_t(\mu_{p,n}) \sim r_{p,n} B_p^n$ dla $t \geqslant n$.*

Dodajmy też, że autorzy pracy [6] przy pomocy transportu losowego odzyskują Twierdzenie 4.2.1. Nie wiadomo mi natomiast, aby przy pomocy tego transportu dało się odzyskać ujemne stowarzyszenie modułów — do tego będzie nam potrzebny .

4.2.3 Nierówności izoperymetryczne

Ostatnią klasą wyników, o której warto przypomnieć są nierówności izoperymetryczne. Do bardzo niedawna dla kul B_p^n nie była znana nawet nierówność Cheegera. W 2007 roku ukazała się praca S. Sodina [45], w której dowodzi on następującego twierdzenia:

Twierdzenie 4.2.7. *Niech $p \in [1, 2]$. Niech $V_{p,n}$ będzie znormalizowaną miarą jednostajną na B_p^n, czyli $V_{p,n}(A) = |A \cap B_p^n|/|B_p^n|$. Wtedy istnieje stała uniwersalna c taka, że dla dowolnego zbioru A zachodzi*

$$V_{p,n}^+(A) \geqslant cn^{1/p} \bar{a} \log^{1-1/p}(1/\bar{a}), \tag{4.2.2}$$

gdzie $\bar{a} = \min\{V_{p,n}(A), 1 - V_{p,n}(A)\}$, zaś $V_{p,n}^+$ oznacza miarę brzegu zdefiniowaną tak, jak w (2.3.5).

Czynnik $n^{1/p}$ w tym twierdzeniu wynika z przyjętej normalizacji. Jeżeliby zmienić normalizację na używaną w tym doktoracie, tj. kulę B_p^n normalizować tak, by to nie promień, a objętość była jednością, to otrzymalibyśmy odpowiednią nierówność bez tego czynnika.

Metodami [45] da się również uzyskać nierówność (4.2.2) z wykładnikiem $1/2$ zamiast $1/p$ dla kul B_p^n przy $p > 2$, natomiast ze stałą zależną od p. W dalszej części pracy pokażę, jak poprawić ten wynik, aby uzyskać stałą niezależną od p (na mocy Centralnego Twierdzenia Granicznego nie można się spodziewać wykładnika lepszego niż dla zmiennej gaussowskiej). Istotną częścią dowodu S. Sodina jest skorzystanie z transportu losowego z pracy [6], zysk, który otrzymamy będzie wynikał z zastąpienia go przez transport nielosowy.

4.3 Ujemne stowarzyszenie modułów

Pokażę stosunkowo prosty dowód ujemnej stowarzyszoności modułów dla wektora losowego X rozłożonego jednostajnie na kuli B_p^n. Później, w rozdziale 5, udowodnię ogólniejsze twierdzenie, dające tę własność dla dowolnej uogólnionej kuli Orlicza, jednak o ile tamto twierdzenie ma przewagę ogólności, to poniższe twierdzenie ma miażdżącą przewagę prostoty dowodu. Przy okazji zobaczymy, że nasze podejście radzi sobie nie tylko z miarą jednostajną na kuli B_p^n, ale również z szeregiem innych miar o gęstości zależnej od $\|x\|_p$.

Twierdzenie 4.3.1. *Weźmy dowolne liczby $p \in [1, \infty)$ i $n \in \mathbb{N}$. Niech $m : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ będzie dowolną funkcją log–wklęsłą, zaś μ niech będzie miarą na $\mathbb{R}^n$ o gęstości $c_m m(\|x\|_p^p)$ dla $x \in \mathbb{R}^n$, gdzie stała c_m jest dobrana tak, by μ była miarą probabilistyczną. Niech $I = \{i_1, \ldots, i_k\}$, $J = \{j_1, \ldots, j_l\}$ będą dwoma rozłącznymi podzbiorami zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$, i niech $f : \mathbb{R}_+^k \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}_+^l \to \mathbb{R}$ będą dowolnymi rosnącymi po promieniach funkcjami ograniczonymi na $\operatorname{supp} \mu$. Niech $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ będzie wektorem losowym o rozkładzie μ. Wtedy*

$$\operatorname{Cov}(f(|X_{i_1}|, |X_{i_2}|, \ldots, |X_{i_k}|), g(|X_{j_1}|, |X_{j_2}|, \ldots, |X_{j_l}|)) \leqslant 0.$$

Powyższe twierdzenie uogólnia własność ujemnej stowarzyszoności modułów, bo dowolna funkcja na $\mathbb{R}_+^n$ rosnąca po współrzędnych rośnie też po promieniach:

Wniosek 4.3.2. *Dowolna miara μ, zdefiniowana jak wyżej, ma własność ujemnej stowarzyszoności modułów.*

W szczególności można zauważyć, że dla m ustalonego jako $\mathbf{1}_{[0,r]}$ otrzymamy ujemną stowarzyszoność modułów dla miary jednostajnej na B_p^n. Poprzez proste przejście graniczne możemy również dostać tezę dla miary stożkowej na sferze w normie $\|\cdot\|_p$.

Dowód. Niech $M(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|)$ i niech $\tilde{\mu}$ będzie zdefiniowane przez $\tilde{\mu}(A) = \mu(M^{-1}(A))$. Zauważmy, że $\tilde{\mu}$ to rozkład wektora $(|X_1|, |X_2|, \ldots, |X_n|)$. Jako, że μ jest 1–symetryczna, możemy równoważnie zdefiniować $\tilde{\mu}$ jako 2^n razy obcięcie μ do $\mathbb{R}_+^n$.

Przypomnijmy, że miara stożkowa na ∂B_p^n (tj. brzegu B_p^n), którą będziemy oznaczać przez ξ_n, jest dla $A \subset \partial B_p^n$ zdefiniowana przez

$$\xi_n(A) = \frac{\lambda_n(ta : t \in \mathbb{R}, a \in A, ta \in B_p^n)}{\lambda_n(B_p^n)}.$$

Dla tej miary mamy następujący wzór na całkowanie biegunowe:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = n\lambda_n(B_p^n) \int_{R_+} r^{n-1} \int_{\partial B_p^n} f(r\theta)d\xi_n(\theta)dr.$$

Niech $C_n = n\lambda_n(B_p^n)$.

Na mocy Lematu 2.2.1 wystarczy dowieść nierówności $\tilde{\mu}(A\times B)\tilde{\mu}(\bar{A}\times\bar{B}) \leqslant \tilde{\mu}(A\times\bar{B})\tilde{\mu}(\bar{A}\times B)$ dla dowolnych p–zbiorów $A \subset \mathbb{R}_+^k$, $B \subset \mathbb{R}_+^{n-k}$, co jest równoważne dowodzeniu $\mu(A \times B)\mu(\bar{A} \times \bar{B}) \leqslant \mu(A\times\bar{B})\mu(\bar{A}\times B)$, gdzie $\bar{A}$ i $\bar{B}$ oznaczają dopełnienia odpowiednich zbiorów odpowiednio w $\mathbb{R}^k$ i $\mathbb{R}^{n-k}$. Mamy:

$$\begin{aligned}
\mu(A \times B) &= \int_{\mathbb{R}^k} \int_{\mathbb{R}^{n-k}} \mathbf{1}_A(x)\mathbf{1}_B(y)m(\|x\|_p^p + \|y\|_p^p)dydx = \\
&= \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\partial B_p^k} \int_{\mathbb{R}^{n-k}} C_k r^{k-1}\mathbf{1}_A(r\theta)\mathbf{1}_B(y)m(r^p + \|y\|_p^p)dyd\xi_k(\theta)dr \\
&= \int_{\mathbb{R}_+} \left[\int_{\mathbb{R}^{n-k}} \mathbf{1}_B(y)m(r^p + \|y\|_p^p)dy\right]\left[\int_{\partial B_p^k} \mathbf{1}_A(r\theta)d\xi_k(\theta)\right]C_k r^{k-1}dr.
\end{aligned}$$

Oznaczmy $f_B(r) = \int_{\mathbb{R}^{n-k}} \mathbf{1}_B(y)m(r^p + \|y\|_p^p)dy$ i $g_A(r) = \int_{\partial B_p^k} \mathbf{1}_A(r\theta)d\xi_k(\theta)$. Niech σ_1 będzie miarą na $\mathbb{R}_+$ o gęstości $C_k r^{k-1}$. Wykonajmy analogiczne przekształcenia na pozostałych trzech wyrażeniach nierówności (2.2.1). Otrzymujemy do udowodnienia następującą nierówność:

$$\int_{\mathbb{R}_+} f_B(r)g_A(r)d\sigma_1(r) \int_{\mathbb{R}_+} f_{\bar{B}}(r)g_{\bar{A}}(r)d\sigma_1(r) \leqslant \int_{\mathbb{R}_+} f_{\bar{B}}(r)g_A(r)d\sigma_1(r) \int_{\mathbb{R}_+} f_B(r)g_{\bar{A}}(r)d\sigma_1(r).$$

Na mocy Lematu 2.2.4 wystarczy udowodnić dwie nierówności:

$$f_B(r_1)f_{\bar{B}}(r_2) \geqslant f_B(r_2)f_{\bar{B}}(r_1) \text{ dla } r_1 \geqslant r_2, \tag{4.3.1}$$

$$g_A(r_1)g_{\bar{A}}(r_2) \leqslant g_A(r_2)g_{\bar{A}}(r_1) \text{ dla } r_1 \geqslant r_2. \tag{4.3.2}$$

Nierówność (4.3.2) jest stosunkowo prosta — $\mathbf{1}_A(r\theta)$ jest malejąca jako funkcja r dla dowolnego ustalonego θ, podczas gdy $\mathbf{1}_{\bar{A}}(r\theta)$ jest rosnąca, jako że A jest p–zbiorem. Zatem $g_A(r)$ jest malejąca, $g_{\bar{A}}$ jest rosnąca, więc $g_A(r_1) \leqslant g_A(r_2)$ i $g_{\bar{A}}(r_2) \leqslant g_{\bar{A}}(r_1)$.

Nierówność (4.3.1) będzie wymagała ciut więcej pracy. Mamy:

$$
\begin{aligned}
f_B(r_1) &= \int_{\mathbb{R}^{n-k}} \mathbf{1}_B(y) m(r_1^p + \|y\|_p^p) dy \\
&= \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\partial B_p^{n-k}} C_{n-k} s^{n-k-1} \mathbf{1}_B(s\xi) m(r_1^p + s^p) d\xi_{n-k}(\xi) dr \\
&= \int_{\mathbb{R}_+} \left[m(r_1^p + s^p) \right] \left[\int_{\partial B_p^{n-k}} \mathbf{1}_B(s\xi) d\xi_{n-k}(\xi) \right] C_{n-k} s^{n-k-1} ds.
\end{aligned}
$$

Będziemy ponownie chcieli użyć Lematu 2.2.4. Niech

$$
p_{r_1}(s) = m(r_1^p + s^p), \quad q_B(s) = \int_{\partial B_p^{n-k}} \mathbf{1}_B(s\xi) d\xi_{n-k}(\xi),
$$

zaś σ_2 niech będzie miarą z gęstością $C_{n-k}s^{n-k-1}$. Wykonujemy analogiczne rachunki dla pozostałych trzech wyrażeń w nierówności (4.3.1), i otrzymujemy równoważną postać (4.3.1):

$$
\int_{\mathbb{R}_+} p_{r_1}(s) q_B(s) d\sigma_2(s) \int_{\mathbb{R}_+} p_{r_2}(s) q_{\bar{B}}(s) d\sigma_2(s) \geqslant \int_{\mathbb{R}_+} p_{r_2}(s) q_B(s) d\sigma_2(s) \int_{\mathbb{R}_+} p_{r_1}(s) q_{\bar{B}}(s) d\sigma_2(s).
$$

Aby zastosować Lemat 2.2.4, musimy dowieść

$$
p_{r_1}(s_1) p_{r_2}(s_2) \leqslant p_{r_2}(s_1) p_{r_1}(s_2) \text{ dla } s_1 \geqslant s_2, \tag{4.3.3}
$$

$$
q_B(s_1) q_{\bar{B}}(s_2) \leqslant q_{\bar{B}}(s_1) q_B(s_2) \text{ dla } s_1 \geqslant s_2. \tag{4.3.4}
$$

Nierówności (4.3.4) dowodzimy tak samo, jak nierówności (4.3.2) — q_B jest malejąca, zaś $q_{\bar{B}}$ jest rosnąca. Nierówność (4.3.3) oznacza

$$
m(r_1^p + s_1^p) m(r_2^p + s_2^p) \leqslant m(r_2^p + s_1^p) m(r_1^p + s_2^p),
$$

co wynika z log–wklęsłości m, bo dla funkcji wklęsłej f zachodzi $f(a) + f(d) \leqslant f(b) + f(c)$, jeśli $a + d = b + c$ i $a \leqslant b \leqslant c \leqslant d$. □

Jak widzieliśmy, ten dowód był dość prosty. Niefortunnie, wykorzystywał fakt, że funkcja Younga kuli B_p^n dobrze skaluje się przy zmianie promienia, tj. że $f_i(tx_i) = \phi(t) f_i(x_i)$ dla pewnej funkcji ϕ. Niestety, spośród wszystkich kul Orlicza jedynie kule B_p^n mają tę własność, co uniemożliwia nam rozszerzenie tego dowodu na przypadek orliczowski. Wyciągniemy jednakże z tego dowodu pomysły, które potem zastosujemy.

4.4 Transport nielosowy i optymalna koncentracja

Naszym celem w tej części pracy będzie dowód własności CI dla miary jednostajnej na kuli B_p^n. Podstawowym narzędziem, którego do tego użyjemy będzie transport miary. Konkretniej, przetransportujemy miarę wykładniczą, poprzez miarę ν_p^n na miarę $\mu_{p,n}$. Niefortunnie precyzyjne szacowania tego, że transporty, których będziemy używać spełniają konieczne warunki jest dość żmudne rachunkowo i techniczne, natomiast wynik końcowy wydaje się być na tyle ładny, że usprawiedliwia pewne niedogodności, które musimy przecierpieć po drodze.

4.4.1 Transporty miary

Zaczniemy od zdefiniowania transportów, których będziemy używać. Transportem miary μ zdefiniowanej na X na miarę ν zdefiniowaną na Y nazywamy po prostu takie przekształcenie $f : X \to Y$, że $\mu \circ f^{-1}(B) = \mu(f^{-1}(B))$ dla $B \subset Y$. Oczywiście nie interesuje nas byle jaki transport — chcemy, żeby przetransportowana miara w jakiś sposób korzystała z własności koncentracyjnych miary transportowanej. W naszym przypadku będziemy transportować miary ν_p^n, dla których już wiemy, że zachodzi CI (są to bowiem miary produktowe) na miary $\mu_{p,n}$, dla których CI chcemy udowodnić. Jako, że zarówno dla $\mu_{p,n}$ jak i dla ν_p^n kule $\mathcal{Z}_t$ są, z dokładnością do stałej multyplikatywnej, kombinacjami (tj. albo sumami Minkowskiego, albo przecięciami) kul B_p^n, to będzie nas przede wszystkim interesować, jak przenosi się koncentracja z kulami B_p^n. Okazuje się, że w tym przypadku kluczowa jest lipszycowskość przekształcenia transportującego jako przekształcenia z normy q–tej w p–tą:

Uwaga 4.4.1. *Niech $U : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ będzie przekształceniem spełniającym*

$$\|U(x) - U(y)\|_p^p \geqslant \delta \|x - y\|_q^q \text{ dla każdego } x \in \mathbb{R}^n, y \in A.$$

Wtedy

$$U\Big(A + t^{1/q} B_q^n\Big) \supset U\Big(\mathbb{R}^n\Big) \cap \Big(U(A) + \delta^{1/p} t^{1/p} B_p^n\Big).$$

Analogicznie, jeśli

$$\|U(x) - U(y)\|_p^p \leqslant \delta \|x - y\|_q^q \text{ dla każdego } x \in \mathbb{R}^n, y \in A$$

to

$$U\Big(A + t^{1/q} B_q^n\Big) \subset U(A) + \delta^{1/p} t^{1/p} B_p^n.$$

Dowód. Udowodnijmy pierwsze ze stwierdzeń, dowód drugiego jest całkowicie analogiczny. Niech $U(x) \in U(A) + \delta^{1/p} t^{1/p} B_p^n$. Wtedy istnieje takie $y \in A$, że $\|U(x) - U(y)\|_p^p \leqslant \delta t$. Z założeń o U mamy $t \geqslant \|x - y\|_q^q$, co oznacza $x \in A + t^{1/q} B_q^n$, a więc $U(x) \in U(A + t^{1/q} B_q^n)$. □

Pierwszy transport, który wprowadzimy, jest transportem „po promieniach". Będzie on przekształcał miarę produktową ν_p^n na miarę $\mu_{p,n}$ — miarę jednostajną na $r_{p,n} B_p^n$, przy czym obraz każdego punktu będzie leżał na tej samej półprostej zaczepionej w zerze, co sam punkt. Do tego kule $r B_p^n$ będą przekształcane na kule $r' B_p^n$. Pokażemy, że ten transport jest lipszycowski względem normy ℓ_p oraz lipszycowski blisko zera względem normy ℓ_2 dla $p \leqslant 2$.

Definicja 4.4.2. *Dla $p \in [1, \infty)$ i $n \in \mathbb{N}$ niech $f_{p,n} : [0, \infty) \to [0, \infty)$ będzie zadane wzorem*

$$\int_0^s e^{-r^p} r^{n-1} dr = (2\gamma_p)^n \int_0^{f_{p,n}(s)} r^{n-1} dr \tag{4.4.1}$$

i niech $T_{p,n}(x) := x f_{p,n}(\|x\|_p)/\|x\|_p$ dla $x \in \mathbb{R}^n$.

Wpierw pokażmy następujące proste oszacowanie

Lemat 4.4.3. *Dla dowolnego $q > 0$ oraz $0 \leqslant u \leqslant q/2$,*

$$q \int_0^u e^{-t} t^{q-1} dt \leqslant e^{-u} u^q \Big(1 + 2\frac{u}{q}\Big).$$

Dowód. Niech

$$f(u) := e^{-u} u^q \Big(1 + 2\frac{u}{q}\Big) - q \int_0^u e^{-t} t^{q-1} dt.$$

Wtedy $f(0) = 0$, zaś $f'(u) = e^{-u} u^q (1 - 2u/q + 2/q) \geqslant 0$ dla $0 \leqslant u \leqslant q/2$. □

Teraz możemy badać własności transportu $T_{p,n}$.

Stwierdzenie 4.4.4. *1. Przekształcenie $T_{p,n}$ transportuje miarę ν_p^n na miarę $\mu_{p,n}$.*

2. Dla $t > 0$ zachodzi $e^{-t^p/n}t \leqslant 2\gamma_p f_{p,n}(t) \leqslant t$ i $f'_{p,n}(t) \leqslant (2\gamma_p)^{-1} \leqslant 1$.

3. Dla $t > 0$ zachodzi również $0 \leqslant f_{p,n}(t)/t - f'_{p,n}(t) \leqslant \min\{1, 2pt^p/n\}$.

4. Funkcja $t \mapsto f_{p,n}(t)/t$ jest malejąca na $(0, \infty)$ i dla dowolnych $s, t > 0$ zachodzi

$$|t^{-1}f_{p,n}(t) - s^{-1}f_{p,n}(s)| \leqslant (st)^{-1}|s-t|f_{p,n}(s \wedge t) \leqslant \frac{|s-t|}{\max\{s,t\}}.$$

W oczywisty sposób własności $T_{p,n}$ są silnie związane z własnościami $f_{p,n}$. Szacowane 2 oznacza, że do punktu $t = n^{1/p}$ przekształcenie $T_{p,n}$ jest w zasadzie jednokładnością. Oszacowania 3 oraz 4 będą użyte do badania własności lipszycowskich $T_{p,n}$. To, że $f_{p,n}(t)/t$ jest malejąca oznacza, że punkty dalsze od zera będą ściągane bardziej. Zatem będziemy mogli rozłożyć $T_{p,n}(x) - T_{p,n}(y)$ poprzez wpierw ściągnięcie obu punktów przez jednokładność o skali $f_{p,n}(\|x\|)/\|x\|$, a potem szacując błąd przybliżenia przez drugą część punktu 4.

Dowód. Punkt 1 wynika wprost z definicji $T_{p,n}$. Różniczkując tożsamość (4.4.1) otrzymujemy

$$e^{-s^p}s^{n-1} = (2\gamma_p)^n f_{p,n}^{n-1}(s)f'_{p,n}(s). \tag{4.4.2}$$

Na mocy (4.4.1),

$$e^{-t^p}t^n \leqslant n\int_0^t e^{-r^p}r^{n-1}dr = (2\gamma_p)^n f_{p,n}^n(t) \leqslant n\int_0^t r^{n-1}dr = t^n,$$

co po podniesieniu do potęgi $1/n$ da nam pierwszą część 2.

Aby udowodnić drugą część użyjemy (4.4.2) oraz powyższego oszacowania, by dostać

$$\begin{aligned} f'_{p,n}(s) &= e^{-s^p}(2\gamma_p)^{-n}\Big(\frac{s}{f_{p,n}(s)}\Big)^{n-1} \leqslant e^{-s^p}(2\gamma_p)^{-n}\Big(e^{s^p/n}2\gamma_p\Big)^{n-1} \\ &= e^{-s^p/n}(2\gamma_p)^{-1} \leqslant (2\gamma_p)^{-1} \leqslant 1. \end{aligned}$$

Dowód części 3 zacznijmy od zauważenia, że na mocy (4.4.2) oraz punktu 2 zachodzi

$$\frac{tf'_{p,n}(t)}{f_{p,n}(t)} = \Big(\frac{t}{f_{p,n}(t)}\Big)^n e^{-t^p}(2\gamma_p)^{-n} \leqslant \Big(e^{t^p/n}2\gamma_p\Big)^n e^{-t^p}(2\gamma_p)^{-n} = 1,$$

zatem $f_{p,n}(t)/t - f'_{p,n}(t) \geqslant 0$. Do tego na mocy punktu 2, $f_{p,n}(t)/t - f'_{p,n}(t) \leqslant f_{p,n}(t)/t \leqslant 1$, więc by udowodnić drugą nierówność możemy założyć, że $2pt^p/n \leqslant 1$. Na mocy (4.4.1) oraz Lematu 4.4.3 otrzymujemy, że

$$(2\gamma_p)^n f_{p,n}^n(t) = \frac{n}{p}\int_0^{t^p} e^{-u}u^{n/p-1}du \leqslant e^{-t^p}t^n\Big(1 + 2\frac{pt^p}{n}\Big).$$

Zatem używając ponownie (4.4.2) oraz punktu 2 otrzymamy

$$\frac{f_{p,n}(t)}{t} - f'_{p,n}(t) = \frac{f_{p,n}(t)}{t}\bigg(1 - \frac{e^{-t^p}t^n}{(2\gamma_p)^n f_{p,n}^n(t)}\bigg) \leqslant 1 - \Big(1 + 2\frac{pt^p}{n}\Big)^{-1} \leqslant \frac{2pt^p}{n}.$$

Na mocy punktu 3 otrzymujemy w szczególności $(f_{p,n}(t)/t)' \leqslant 0$, co dowodzi pierwszej części 4. Aby udowodnić drugą część, załóżmy bez straty ogólności, że $s > t > 0$. Wtedy

$$0 \leqslant \frac{f_{p,n}(t)}{t} - \frac{f_{p,n}(s)}{s} \leqslant \frac{f_{p,n}(t)}{t} - \frac{f_{p,n}(t)}{s} = \frac{s-t}{st}f_{p,n}(t) \leqslant \frac{s-t}{s}.$$

□

Następne dwa Stwierdzenia wcielają w życie idee przedstawione powyżej — używamy oszacowań na $f_{p,n}$ by udowodnić lipszycowskie własności $T_{p,n}$. Pierwsze z poniższych stwierdzeń wynika również (z inną stałą) ze znacznie bardziej ogólnego faktu udowodnionego w [37].

Stwierdzenie 4.4.5. *Dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}^n$ zachodzi $\|T_{p,n}x - T_{p,n}y\|_p \leqslant 2\|x - y\|_p$.*

Dowód. Niech $s := \|x\|_p \geqslant t := \|y\|_p$, używamy Stwierdzenia 4.4.4, by otrzymać

$$\begin{aligned}
\|T_{p,n}x - T_{p,n}y\|_p &= \Big(\sum_i \Big|(T_{p,n}x)_i - (T_{p,n}y)_i\Big|^p\Big)^{1/p} \\
&= \Big(\sum_i \Big|\frac{f_{p,n}(t)}{t}(x_i - y_i) + \Big(\frac{f_{p,n}(s)}{s} - \frac{f_{p,n}(t)}{t}\Big)x_i\Big|^p\Big)^{1/p} \\
&\leqslant \Big(\sum_i \Big(|x_i - y_i| + \frac{|s-t|}{s}|x_i|\Big)^p\Big)^{1/p} \\
&\leqslant \Big(\sum_i |x_i - y_i|^p\Big)^{1/p} + \frac{|s-t|}{s}\Big(\sum_i |x_i|^p\Big)^{1/p} \\
&= \|x - y\|_p + \frac{\big|\|x\|_p - \|y\|_p\big|}{\|x\|_p}\|x\|_p \leqslant 2\|x - y\|_p.
\end{aligned}$$

□

Stwierdzenie 4.4.6. *Niech $u \geqslant 0$, $p \in [1, 2]$ i $x \in \mathbb{R}^n$ będą takie, że $\|x\|_2 n^{-1/2} \leqslant u\|x\|_p n^{-1/p}$. Wtedy*

$$\|T_{p,n}x - T_{p,n}y\|_2 \leqslant (1 + u)\|x - y\|_2 \text{ dla każdego } y \in \mathbb{R}^n.$$

Dowód. Podobnie jak poprzednio, niech $s = \|x\|_p$ i $t = \|y\|_p$. Będziemy tak samo używać Stwierdzenia 4.4.4, a na koniec dodamy nierówność Höldera:

$$\begin{aligned}
\|T_{p,n}x - T_{p,n}y\|_2 &\leqslant \Big(\sum_i \Big(|x_i - y_i| + \frac{|s-t|}{s}|x_i|\Big)^2\Big)^{1/2} \\
&\leqslant \|x - y\|_2 + \frac{|s-t|}{s}\|x\|_2 \leqslant \|x - y\|_2 + \frac{\|x - y\|_p}{\|x\|_p}\|x\|_2 \\
&\leqslant \|x - y\|_2 + \frac{\|x\|_2}{\|x\|_p} n^{\frac{1}{p} - \frac{1}{2}}\|x - y\|_2 \leqslant (1 + u)\|x - y\|_2.
\end{aligned}$$

□

Drugi transport, który przyjdzie nam zdefiniować, to proste przekształcenie produktowe, które przenosi miarę ν_p^n na ν_q^n. Będziemy używali właściwie tylko przypadków $p = 1$ i $p = 2$, natomiast uzyskane oszacowania wydają się być dość pożyteczne, więc w trosce o ewentualne późniejsze zastosowania w innym kontekście formułuję je w bardziej ogólnej wersji.

Definicja 4.4.7. *Dla $1 \leqslant p, q < \infty$ definiuję przekształcenie $w_{p,q} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wzorem*

$$\frac{1}{\gamma_p}\int_x^\infty e^{-t^p}dt = \frac{1}{\gamma_q}\int_{w_{p,q}(x)}^\infty e^{-t^q}dt. \tag{4.4.3}$$

Przez v_p oznaczmy $w_{p,1}$. Zdefiniujmy też $W_{p,q}^n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ wzorem

$$W_{p,q}^n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (w_{p,q}(x_1), w_{p,q}(x_2), \ldots, w_{p,q}(x_n)).$$

Zauważmy, że $w_{p,q}^{-1} = w_{q,p}$ i $(W_{p,q}^n)^{-1} = W_{q,p}^n$. Różniczkując tożsamość (4.4.3) otrzymujemy

$$w_{p,q}'(x) = \frac{\gamma_q}{\gamma_p} e^{-x^p + w_{p,q}^q(x)}. \tag{4.4.4}$$

Jako, że $W_{p,q}$ jest transportem produktowym, większość czasu spędzimy badając własności jego jednowymiarowej wersji $w_{p,q}$. Udowodnimy, że $w_{p,q}$ zachowuje się podobnie do $x^{p/q}$ dla dużych x, zaś dla małych $|x|$ jest w przybliżeniu liniowe. Zaczniemy od zbadania przypadku $q = 1$.

Lemat 4.4.8. *Dla $p \geqslant 1$ zachodzą następujące fakty:*

1. $v_p(x) \geqslant x^p + \ln(p\gamma_p x^{p-1})$ *i* $v_p'(x) \geqslant px^{p-1}$ *dla dowolnego* $x \geqslant 0$,
2. $v_p(x) \leqslant e + x^p + \ln(p\gamma_p x^{p-1})$ *i* $v_p'(x) \leqslant e^e px^{p-1}$ *dla dowolnego* $x \geqslant 1$,
3. $|v_p(x) - v_p(y)| \geqslant 2^{1-p}|x-y|^p$ *dla dowolnych* $x, y \in \mathbb{R}$.

Dowód. Zauważmy, że $\gamma_1 = 1$. Mamy zatem dla $x \geqslant 0$ następujące szacowanie:

$$e^{-v_p(x)} = \frac{1}{\gamma_p}\int_x^\infty e^{-t^p} dt \leqslant \frac{1}{p\gamma_p x^{p-1}} \int_x^\infty pt^{p-1}e^{-t^p} dt = \frac{e^{-x^p}}{p\gamma_p x^{p-1}} \tag{4.4.5}$$

zaś dla $x \geqslant 1$, jako że $(1 + r/p)^p \leqslant e^r \leqslant 1 + er$ dla $r \in [0, 1]$, otrzymujemy

$$e^{-v_p(x)} \geqslant \frac{1}{\gamma_p}\int_x^{x+x^{1-p}/p} e^{-t^p} \geqslant \frac{1}{p\gamma_p x^{p-1}} e^{-(x+x^{1-p}/p)^p} \geqslant e^{-e}\frac{e^{-x^p}}{p\gamma_p x^{p-1}}.$$

Zauważmy, że na mocy (4.4.4), $v_p'(x) = e^{-x^p+v_p(x)}/\gamma_p$, zatem możemy oszacować v_p' używając świeżo wyprowadzonego oszacowania na v_p.

Dolne ograniczenie v_p' daje w szczególności $|v_p(x) - v_p(y)| \geqslant |x-y|^p$ dla $x, y \geqslant 0$. To samo oszacowanie działa dla $x, y \leqslant 0$, jako że v_p jest nieparzyste. Dla $x \geqslant 0 \geqslant y$ mamy natomiast

$$|v_p(x) - v_p(y)| = |v_p(x)| + |v_p(y)| \geqslant |x|^p + |y|^p \geqslant 2^{1-p}|x-y|^p.$$

□

Poprzedni lemat pokazuje, że dla $x \geqslant 1$ funkcje v_p i x^p mają porównywalne pochodne. Mogłoby się wydawać, że $w_{p,q}$ i $x^{p/q}$ powinny podobnie się porównywać (np. autorowi niniejszej rozprawy przez pewien czas tak się wydawało). Niestety, np. w wypadku $q = 2$ sprawy mają się inaczej — choć jest prawdą, że $w_{p,2}$ jest większe od $x^{p/2}$, to przy badaniu pochodnej sprawy zaczynają się komplikować w okolicach $x = 1$. Poniższe oszacowania nie są optymalne, ale dostatecznie silne dla naszych potrzeb.

Lemat 4.4.9. 1. *Dla $p \geqslant q \geqslant 1$ zachodzi $|w_{p,q}(x)| \geqslant |x|^{p/q}$ i $w_{p,q}'(x) \geqslant \frac{\gamma_q}{\gamma_p} \geqslant \frac{1}{2}$.*

2. *Dla $p \geqslant 2$, $w_{p,2}'(x) \geqslant \frac{1}{8}\sqrt{p}|x|^{p/2-1}$.*

Dowód. Jako, że funkcja $w_{p,q}$ jest nieparzysta, będziemy zakładać, że $x \geqslant 0$.

1. Na mocy monotoniczności funkcji $u^{p/q-1}$ na $[0, \infty)$ otrzymujemy

$$\begin{aligned}\frac{1}{\gamma_p}\int_x^\infty e^{-t^p}dt &= \frac{1}{\gamma_q}\int_{w_{p,q}(x)}^\infty e^{-t^q}dt = \frac{\int_{w_{p,q}(x)}^\infty e^{-t^q}dt}{\int_0^\infty e^{-t^q}dt} = \frac{\int_{w_{p,q}(x)^{q/p}}^\infty u^{p/q-1}e^{-u^p}du}{\int_0^\infty u^{p/q-1}e^{-u^p}du} \\ &\geqslant \frac{\int_{w_{p,q}(x)^{q/p}}^\infty e^{-u^p}du}{\int_0^\infty e^{-u^p}du} = \frac{1}{\gamma_p}\int_{w_{p,q}(x)^{q/p}}^\infty e^{-u^p}du,\end{aligned}$$

zatem $w_{p,q}(x)^{q/p} \geqslant x$ i $w_{p,q}(x) \geqslant x^{p/q}$. Ze wzoru (4.4.4) dostajemy zatem $w_{p,q}'(x) \geqslant \gamma_q/\gamma_p \geqslant 1/2$.

2. Zaczniemy od przywołania następującego oszacowania ogonów zmiennej gaussowskiej dla $z > 0$:
$$\int_z^\infty e^{-t^2} dt \geqslant \frac{1}{2\sqrt{z^2+1}} e^{-z^2}. \tag{4.4.6}$$
Gdy $z \to \infty$, zachodzi równość, a proste rachunki pokazują, że pochodna lewej strony jest nie większa od pochodnej prawej strony.

Niech $\kappa := 4\sqrt{\pi}$, udowodnimy, że dla $x > 0$ oraz $p \geqslant 2$ zachodzi
$$w_{p,2}(x) \geqslant u_p(x) := \max\left\{\frac{\sqrt{\pi}}{2}x, \sqrt{\left(x^p + \ln(\sqrt{p}x^{p/2-1}/\kappa)\right)_+}\right\}. \tag{4.4.7}$$
Załóżmy przeciwnie, że $w_{p,2}(x) < u_p(x)$ dla pewnego $p \geqslant 2$ oraz $x > 0$. Na mocy punktu 1 zachodzi $w'_{p,2} \geqslant \gamma_2/\gamma_p \geqslant \gamma_2 = \sqrt{\pi}/2$. Zatem $u_p(x)$ musi być równe drugiej części maksimum. W szczególności wynika z tego, że $x \geqslant 2/3$, bo dla $x < 2/3$ mamy
$$x^p + \ln(\sqrt{p}x^{p/2-1}/\kappa) \leqslant \frac{4}{9} + \left(\frac{p}{2} - 1\right)\ln\frac{2}{3} + \frac{\sqrt{p}}{\kappa} - 1 \leqslant 0.$$
Zatem $u_p(x) \geqslant \sqrt{\pi}x/2 \geqslant 1/\sqrt{3}$. Na mocy (4.4.5), (4.4.3) oraz (4.4.6) mamy
$$\begin{aligned}\sqrt{\pi}\frac{1}{px^{p-1}}e^{-x^p} &\geqslant \frac{\gamma_2}{\gamma_p}\frac{1}{px^{p-1}}e^{-x^p} \geqslant \frac{\gamma_2}{\gamma_p}\int_x^\infty e^{-t^p}dt = \int_{w_{p,2}(x)}^\infty e^{-t^2}dt \\ &> \int_{u_p(x)}^\infty e^{-t^2}dt \geqslant \frac{1}{2\sqrt{u_p^2(x)+1}}e^{-u_p^2(x)} \geqslant \frac{1}{4u_p(x)}e^{-u_p^2(x)} \\ &= \frac{1}{4u_p(x)}e^{-(x^p+\ln(\sqrt{p}x^{p/2-1}/\kappa))} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{p}u_p(x)}x^{1-p/2}e^{-x^p}.\end{aligned}$$
Po uproszczeniu otrzymujemy z tego $u_p(x) > \sqrt{p}x^{p/2}$. Wobec tego
$$px^p < u_p^2(x) = x^p + \frac{1}{2}\ln(px^p) + \ln\frac{1}{\kappa x} \leqslant \frac{p}{2}x^p + \frac{1}{2}px^p = px^p,$$
a zatem sprzeczność, która dowodzi oszacowania (4.4.7).

Mamy zatem $w_{p,2}(x) \geqslant u_p(x)$ i na mocy (4.4.4) otrzymujemy
$$w'_{p,2}(x) \geqslant \frac{\gamma_2}{\gamma_p}e^{-x^p+u_p^2(x)} \geqslant \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{1}{\kappa}\sqrt{p}x^{p/2-1} = \frac{1}{8}\sqrt{p}x^{p/2-1}.$$

□

Uwaga 4.4.10. *Gdybyśmy wzięli* $u_p(x) = \max\{\sqrt{\pi}x/2, \sqrt{(x^p + \ln(px^{p/2-1}/(\kappa\ln p)))_+}\}$ *dla dostatecznie dużego* κ *i szacowali ciut ostrożniej, doszlibyśmy do szacowania* $w'_{p,2}(x) \geqslant C^{-1}px^{p/2-1}/\ln p$. *Nie da się, jednakże, otrzymać szacowania rzędu* $px^{p/2-1}$.

Stwierdzenie 4.4.11. *Dla* $p \geqslant q \geqslant 1$ *zachodzą następujące fakty:*

1. $\nu_p^n(W_{q,p}^n(A)) = \nu_q^n(A)$ *dla* $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$,
2. $|w_{q,p}(x) - w_{q,p}(y)| \leqslant 2|x-y|$ *dla* $x \in \mathbb{R}$,
3. *dla każdych* $x, y \in \mathbb{R}^n$ *oraz* $r \geqslant 1$ *zachodzi*
$$\|W_{q,p}^n(x) - W_{q,p}^n(y)\|_r \leqslant 2\|x-y\|_r,$$

4. dla każdych $x, y \in \mathbb{R}$ zachodzi

$$\Big|w_{1,p}(x) - w_{1,p}(y)\Big| \leqslant 2\min(|x-y|, |x-y|^{1/p}) \leqslant 2|x-y|^{1/q},$$

5. $\|W^n_{1,p}(x) - W^n_{1,p}(y)\|_q^q \leqslant 2^q\|x-y\|_1$ dla $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Dowód. Własność 1 wynika z definicji $w_{q,p}$ oraz $W^n_{q,p}$. Jako, że $w_{q,p} = w^{-1}_{p,q}$ dostajemy 2 na mocy punktu 1 Lematu 4.4.9. Własność 3 jest bezpośrednim wnioskiem z 2.

Na mocy punktu 3 Lematu 4.4.8 dostajemy

$$|w_{1,p}(x) - w_{1,p}(y)| = |v_p^{-1}(x) - v_p^{-1}(y)| \leqslant 2^{1-1/p}|x-y|^{1/p}.$$

Powyższa nierówność wraz z 2 daje 4, zaś z tego z kolei wynika 5. $\square$

Podsumujmy to, czego dotychczas się dowiedzieliśmy. Udowodniłem (w poprzednim rozdziale) nierówność CI dla miary ν_p^n dla dowolnego p. Zatem, gdyby transport $T_{p,n}$ był Lipszycowski w drugiej oraz p–tej normie, moglibyśmy przetransportować CI na $\mu_{p,n}$. Jednakże $T_{p,n}$, choć jest Lipszycowski w normie p–tej, w normie drugiej jest Lipszycowski tylko dla punktów niezbyt odległych od zera (Stwierdzenie 4.4.6 pokazuje to dla $p \leqslant 2$, dla $p \geqslant 2$ pojawia się podobny, choć nie identyczny problem). Zatem musimy poradzić sobie z punktami odległymi od zera oddzielnie.

Dla $p \leqslant 2$ użyjemy nierówności udowodnionej w części 3.3. Te wyniki bez problemu przetransportujemy z ν na ν_p^n, bo transport $W^n_{1,p}$ jest Lipszycowski w drugiej normie, oraz ściąga pierwszą normę do p–tej.

Dla większych p okaże się, że wystarczy połączyć już zbadane transporty. Jakkolwiek $T_{p,n}$ samo w sobie nie jest Lipszycowskie w drugiej normie daleko od zera, to $W^n_{1,p}$ na tyle silnie ściąga punkty odległe od zera, aby to skompensować, i ich złożenie okaże się dzięki temu Lipszycowskie. Aby to sprawdzić będziemy musieli oszacować normę macierzy pochodnej, używając udowodnionych powyżej oszacowań na pochodne.

Zdefiniujmy zatem następujące transport miary wykładniczej ν na miarę $\mu_{p,n}$ dla $p \geqslant 2$:

Definicja 4.4.12. *Dla $n \in \mathbb{N}$ oraz $2 \leqslant p < \infty$ definiuję przekształcenie $S_{p,n}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ wzorem $S_{p,n}(x) := T_{p,n}(W^n_{1,p}(x))$.*

Transport ten spełnia następujące oszacowanie:

Stwierdzenie 4.4.13. *Dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}^n$ oraz $p \geqslant 2$ zachodzi $\|S_{p,n}(x) - S_{p,n}(y)\|_2 \leqslant 4\|x-y\|_2$.*

Dowód. Wystarczy wykazać, że $\|DS_{p,n}(x)\| \leqslant 4$ prawie wszędzie, gdzie $DS_{p,n}$ oznacza macierz pochodnej $S_{p,n}$, a norma to norma operatorowa z ℓ_2^n w ℓ_2^n.

Niech $s = \|W^n_{1,p}(x)\|_p$. Bezpośrednim rachunkiem otrzymujemy

$$\frac{(\partial S_{p,n})_j}{\partial x_i}(x) = \frac{\delta_{ij} f_{p,n}(s) w'_{1,p}(x_i)}{s} + \alpha(s) w_{1,p}(x_j)\beta(x_i) \tag{4.4.8}$$

gdzie

$$\alpha(s) := s^{-p-1}\Big(sf'_{p,n}(s) - f_{p,n}(s)\Big) \text{ oraz } \beta(t) := |w_{1,p}(t)|^{p-1}\mathrm{sgn}(w_{1,p}(t))w'_{1,p}(t).$$

Możemy zatem ograniczyć

$$\|DS_{p,n}(x)\| \leqslant \frac{f_{p,n}(s)}{s}\max_i |w'_{1,p}(x_i)| + |\alpha(s)|\Big\|W^n_{1,p}(x)\Big\|_2\Big(\sum_{i=1}^n \beta^2(x_i)\Big)^{1/2}.$$

Jako, że $w_{1,p} = w_{p,1}^{-1}$, ze Stwierdzenia 4.4.9, 1. wynika $|w'_{1,p}(x_j)| \leqslant 2$, podczas gdy na mocy Stwierdzenia 4.4.4 mamy $f_{p,n}(s)/s \leqslant 1$. Możemy zatem ograniczyć pierwszy składnik sumy przez 2.

Aby oszacować drugi składnik sumy, zauważmy, że na mocy Stwierdzenia 4.4.4, 3. mamy

$$|\alpha(s)| = s^{-p}\left|f'_{p,n}(s) - \frac{f_{p,n}(s)}{s}\right| \leqslant s^{-p}\min\left\{1, \frac{2ps^p}{n}\right\}. \tag{4.4.9}$$

Co więcej, $\|W_{1,p}^n(x)\|_2 \leqslant n^{1/2-1/p}s$ na mocy nierówności Höldera i

$$|\beta(t)| = |w_{1,p}(t)|^{p-1}|w'_{1,p}(t)| = \frac{|w_{1,p}(t)|^{p-1}}{v'_p(w_{1,p}(t))} \leqslant \frac{1}{p}$$

na mocy Lematu 4.4.8. Zatem

$$\begin{aligned}\|DS_{p,n}(x)\| &\leqslant 2 + s^{-p}\min\left\{1, \frac{2ps^p}{n}\right\}n^{1/2-1/p}s\frac{n^{1/2}}{p}\\ &\leqslant 2 + 2sn^{-1/p}\min\{ns^{-p}, 1\} \leqslant 4.\end{aligned}$$

□

Spójrzmy uważnie, co dokładnie chcemy przetransportować dla $p \geqslant 2$. Chcemy udowodnić, że powiększenie o $tB_1^n + \sqrt{t}B_2^n$ transportuje się do wnętrza powiększenia o $t^{1/p}B_p^n \cap \sqrt{t}B_2^n$. Chcemy zatem, by dowolny punkt wewnątrz którejkolwiek z kul tB_1^n oraz $\sqrt{t}B_2^n$ był przez $S_{p,n}$ przekształcany do wnętrza zarówno kuli $\sqrt{t}B_2^n$, jak i $t^{1/p}B_p^n$. Powyższe stwierdzenie dowodzi, że kula B_2^n przechodzi na kulę B_2^n. Zarówno B_2^n jak i B_1^n przechodzi do wnętrza B_p^n przy transporcie W_p^n, zaś $T_{p,n}$ jest Lipszycowskie w p–tej normie, czyli przenosi B_p^n do B_p^n. Ostatnią rzeczą, którą trzeba sprawdzić jest to, co się staje z wektorami z tB_1^n w drugiej normie. Tu bezpośrednie różniczkowanie byłoby mniej przyjemnie, zatem będziemy zmieniać po jednej współrzędnej na raz i naliczać zmiany drugiej normy:

Stwierdzenie 4.4.14. *Dla dowolnych $y, z \in \mathbb{R}^n$ oraz $p \geqslant 2$ zachodzi*

$$\|S_{p,n}(y) - S_{p,n}(z)\|_2 \leqslant \|W_{1,p}^n(y) - W_{1,p}^n(z)\|_2 + 2n^{-1/2}\|y - z\|_1.$$

Dowód. Niech $u_i(t) = (y_1, y_2, \ldots, y_{i-1}, t, z_{i+1}, z_{i+2}, \ldots, z_n)$ dla $i \in \{1, \ldots, n\}$. Zauważmy, że $u_i(y_i) = u_{i+1}(z_{i+1})$, $u_1(z_1) = z$, zaś $u_n(y_n) = y$, zatem

$$S_{p,n}(z) - S_{p,n}(y) = \sum_{i=1}^{n}\Big(S_{p,n}(u_i(z_i)) - S_{p,n}(u_i(y_i))\Big).$$

Niech $s_i(t) := \|w_{1,p}(u_i(t))\|_p$. Całkując pochodną cząstkową $S_{p,n}$, obliczoną we wzorze (4.4.8) otrzymujemy

$$S_{p,n}\Big(u_i(z_i)\Big) - S_{p,n}\Big(u_i(y_i)\Big) = \int_{y_i}^{z_i}\frac{\partial S_{p,n}}{\partial x_i}(u_i(t))dt = a_i + b_i,$$

gdzie

$$a_i := \int_{y_i}^{z_i}\frac{f_{p,n}(s_i(t))}{s_i(t)}w'_{1,p}(t)e_i dt$$

zaś

$$b_i := \int_{y_i}^{z_i}\alpha(s_i(t))\beta(t)W_{1,p}^n(u_i(t))dt.$$

Tak jak w dowodzie Stwierdzenia 4.4.13 dowodzimy, że

$$\left\|\alpha(s_i(t))\beta(t)W^n_{1,p}(u_i(t))\right\|_2 \leqslant 2n^{-1/2}s_i(t)n^{-1/p}\min\{ns_i(t)^{-p},1\} \leqslant 2n^{-1/2},$$

a wobec tego

$$\Big\|\sum_{i=1}^n b_i\Big\|_2 \leqslant \sum_{i=1}^n \|b_i\|_2 \leqslant 2n^{-1/2}\sum_{i=1}^n |y_i - z_i| = 2n^{-1/2}\|y-z\|_1.$$

Aby poradzić sobie z sumą a_i zauważmy, że skoro $f_{p,n}(s)/s \leqslant 1$ and $w'_{1,p}(x) \geqslant 0$, to

$$\begin{aligned}\Big|\Big\langle \sum_j a_j, e_i\Big\rangle\Big| = |\langle a_i, e_i\rangle| &= \Big|\int_{y_i}^{z_i}\frac{f_{p,n}(s_i(t))}{s_i(t)}w'_{1,p}(t)dt\Big| \\ &\leqslant \Big|\int_{y_i}^{z_i} w'_{1,p}(t)dt\Big| = \Big|w_{1,p}(z_i) - w_{1,p}(y_i)\Big|.\end{aligned}$$

Wobec tego

$$\|\sum_i a_i\|_2 \leqslant \|\sum_i \Big(w_{1,p}(z_i) - w_{1,p}(y_i)\Big)e_i\|_2 = \|W^n_{1,p}(z) - W^n_{1,p}(y)\|_2.$$

□

Zebrawszy powyższe fakty możemy je połączyć w następującym wniosku:

Wniosek 4.4.15. *Jeśli $x - y \in tB_1^n + t^{1/2}B_2^n$ dla pewnego $t > 0$, to dla dowolnego $p \geqslant 2$ zachodzi $S_{p,n}(x) - S_{p,n}(y) \in 8(t^{1/2}B_2^n \cap t^{1/p}B_p^n)$.*

Dowód. Ustalmy x, y spełniające $x - y \in tB_1^n + t^{1/2}B_2^n$. Na mocy Stwierdzenia 4.4.11, 4.,

$$\begin{aligned}\|W^n_{1,p}(x) - W^n_{1,p}(y)\|_p^p &= \sum_i |w_{1,p}(x_i) - w_{1,p}(y_i)|^p \\ &\leqslant 2^p \sum_i \min\{|x_i - y_i|^p, |x_i - y_i|\} \\ &\leqslant 2^p \sum_i \min\{|x_i - y_i|^2, |x_i - y_i|\} \leqslant 2^{p+2}t.\end{aligned}$$

Zatem na mocy Stwierdzenia 4.4.5,

$$\|S_{p,n}(x) - S_{p,n}(y)\|_p \leqslant 2\|W^n_{1,p}(x) - W^n_{1,p}(y)\|_p \leqslant 8t^{1/p}.$$

Z nierówności Höldera wynika, że $\|S_{p,n}(x) - S_{p,n}(y)\|_2 \leqslant n^{1/2-1/p}\|S_{p,n}(x) - S_{p,n}(y)\|_p \leqslant 8t^{1/2}$, o ile $t \geqslant n$.

Załóżmy zatem, że $t \leqslant n$. Niech z będzie takim punktem, że $x - z \in t^{1/2}B_2^n$, zaś $z - y \in tB_1^n$. W takim razie $S_{p,n}(x) - S_{p,n}(z) \in 4t^{1/2}B_2^n$ na mocy Stwierdzenia 4.4.13, zaś $\|W^n_{1,p}(z) - W^n_{1,p}(y)\|_2 \leqslant 2\sqrt{t}$ na mocy Stwierdzenia 4.4.11, 5. Zatem ze Stwierdzenia 4.4.14 wynika nierówność

$$\|S_{p,n}(y) - S_{p,n}(z)\|_2 \leqslant 2t^{1/2} + 2n^{-1/2}t \leqslant 4t^{1/2}.$$

Wobec tego $S_{p,n}(x) - S_{p,n}(y) \in 8t^{1/2}B_2^n$. □

Ostatnim przekształceniem, które będziemy rozważać jest transport miary gaussowskiej ν_2^n na $\mu_{p,n}$ dla $p \geqslant 2$.

Definicja 4.4.16. *Niech n będzie liczbą naturalną, zaś p liczbą rzeczywistą, spełniającą $2 \leqslant p < \infty$. Przekształcenie $\tilde{S}_{p,n} \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definiujemy wzorem $\tilde{S}_{p,n}(x) := T_{p,n}(W^n_{2,p}(x))$.*

Będziemy teraz rozumować podobnie jak w Stwierdzeniu 4.4.13 – poprzez oszacowanie macierzy pochodnej.

Stwierdzenie 4.4.17. *Dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}^n$ oraz $p \geqslant 2$ zachodzi $\|\tilde{S}_{p,n}(x) - \tilde{S}_{p,n}(y)\|_2 \leqslant 14\|x-y\|_2$.*

Dowód. Musimy pokazać, że $\|D\tilde{S}_{p,n}(x)\| \leqslant 14$. Bezpośrednio przeliczając otrzymujemy

$$\frac{(\partial \tilde{S}_{p,n})_j}{\partial x_i}(x) = \frac{\delta_{ij} f_{p,n}(\tilde{s}) w_{2,p}'(x_i)}{\tilde{s}} + \alpha(\tilde{s}) w_{2,p}(x_j)\tilde{\beta}(x_i) \tag{4.4.10}$$

gdzie $\tilde{s} = \|W_{2,p}^n(x)\|_p$,

$$\alpha(s) := s^{-p-1}\Big(s f_{p,n}'(s) - f_{p,n}(s)\Big) \text{ oraz } \tilde{\beta}(t) := |w_{2,p}(t)|^{p-1}\mathrm{sgn}(w_{2,p}(t)) w_{2,p}'(t).$$

Możemy zatem oszacować

$$\|D\tilde{S}_{p,n}(x)\| \leqslant \frac{f_{p,n}(\tilde{s})}{\tilde{s}} \max_i |w_{2,p}'(x_i)| + |\alpha(\tilde{s})| \Big\| W_{2,p}^n(x) \Big\|_2 \Big(\sum_{i=1}^n \tilde{\beta}^2(x_i) \Big)^{1/2}. \tag{4.4.11}$$

Pierwszy składnik możemy oszacować z góry przez 2 tak samo jak w dowodzie Stwierdzenia 4.4.13. Jako, że $w_{2,p} = w_{p,2}^{-1}$ na mocy Lematu 4.4.9, 2 widzimy, że

$$|\tilde{\beta}(x)| = |w_{2,p}(x)|^{p-1} |w_{2,p}'(x)| = \frac{|w_{2,p}(x)|^{p-1}}{w_{p,2}'(w_{2,p}(x))} \leqslant \frac{8}{\sqrt{p}} |w_{2,p}(x)|^{p/2},$$

a zatem

$$\Big(\sum_{i=1}^n \tilde{\beta}^2(x_i) \Big)^{1/2} \leqslant \frac{8}{\sqrt{p}} \tilde{s}^{p/2}.$$

Używając oszacowania (4.4.9) oraz $\|W_{2,p}^n(x)\|_2 \leqslant n^{1/2-1/p}\tilde{s}$ możemy drugi składnik sumy (4.4.11) oszacować następująco:

$$\tilde{s}^{-p} \min\Big\{1, \frac{2p\tilde{s}^p}{n}\Big\} n^{1/2-1/p} \tilde{s} \frac{8}{\sqrt{p}} \tilde{s}^{p/2} = 8p^{-1/p} \min\{u^{-1/2}, 2u^{1/2}\} u^{1/p} \leqslant 8\sqrt{2} \leqslant 12,$$

gdzie $u := p\tilde{s}^p/n$. □

4.4.2 CI dla $p \leqslant 2$

Aby uzyskać nierówność CI dla B_p^n, $p \leqslant 2$, musimy wpierw przenieść Twierdzenie 3.3.6 na miarę ν_p^n przy pomocy transportu $W_{1,p}^n$. Uzyskany Lemat 4.4.18 następnie trzeba uważnie połączyć z transportem $T_{p,n}$. Lemat 4.4.18 pozwali nam dla zbioru odległego od zera bądź powiększyć jego masę, bądź przepchnąć ją bliżej środka przez dodanie kuli $t^{1/p}B_p^n$. Transport $T_{p,n}$ jest Lipszycowski blisko zera, a zatem pozwoli nam przenieść nierówności koncentracyjne z ν_p^n na $\mu_{p,n}$ dla zbiorów położonych blisko zera.

Zaczniemy od pierwszej części tego planu, czyli przeniesienie Twierdzenia 3.3.6 na ν_p.

Lemat 4.4.18. *Dla dowolnego $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, $p \in [1,2]$ i $t \geqslant 1$ zachodzi przynajmniej jeden z następujących dwóch warunków:*

- $\nu_p^n(A + 20t^{1/p}B_p^n) \geqslant e^t \nu_p^n(A)$ *lub*

- $\nu_p^n\Big((A+20t^{1/p}B_p^n)\cap 100\sqrt{n}B_2^n\Big) \geqslant \frac{1}{2}\nu_p^n(A)$.

Dowód. Dzięki Stwierdzeniu 4.4.11, 5 wiemy, że $\|W_{1,p}^n(x)-W_{1,p}^n(y)\|_p^p \leqslant 2^p\|x-y\|_1$. Na mocy Uwagi 4.4.1 oznacza to, że $A+2(10t)^{1/p}B_p^n \supset W_{1,p}^n(W_{p,1}^n(A)+10tB_1^n)$. Ustalmy $t \geqslant 1$ i zastosujmy Twierdzenie 3.3.6 do zbioru $W_{p,1}^n(A)$ i parametru $10t$. Jeśli zachodzi drugi przypadek tezy Twierdzenia, mamy

$$\begin{aligned}\nu_p^n(A+20t^{1/p}B_p^n) &\geqslant \nu_p^n\Big(W_{1,p}^n(W_{p,1}^n(A)+10tB_1^n)\Big) = \nu^n(W_{p,1}^n(A)+10tB_1^n)\\ &\geqslant e^t\nu^n(W_{p,1}^n(A)) = e^t\nu_p^n(A).\end{aligned}$$

Jeśli zachodzi pierwszy przypadek, to na mocy Stwierdzenia 4.4.11, 3. mamy $\|W_{1,p}^n(x)\|_2 \leqslant 2\|x\|_2$, a zatem $2\alpha B_2^n \supset W_{1,p}^n(\alpha B_2^n)$ dla dowolnego $\alpha > 0$. Wobec tego

$$\begin{aligned}\nu_p^n\Big((A+20t^{1/p}B_p^n)\cap 100\sqrt{n}B_2^n\Big) &\geqslant \nu_p^n\Big(W_{1,p}^n(W_{p,1}^n(A)+10tB_1^n)\cap 100\sqrt{n}B_2^n\Big)\\ &= \nu_p^n\Big(W_{1,p}^n\Big((W_{p,1}^n(A)+10tB_1^n)\cap W_{p,1}^n(100\sqrt{n}B_2^n)\Big)\Big)\\ &\geqslant \nu_p^n\Big(W_{1,p}^n\Big((W_{p,1}^n(A)+10tB_1^n)\cap 50\sqrt{n}B_2^n\Big)\Big)\\ &= \nu^n\Big(\Big(W_{p,1}^n(A)+10tB_1^n\Big)\cap 50\sqrt{n}B_2^n\Big)\\ &\geqslant \frac{1}{2}\nu^n(W_{p,1}^n(A)) = \frac{1}{2}\nu_p^n(A).\end{aligned}$$

□

Przypomnijmy, że dla miary ν_p^n udowodniliśmy już CI (Wniosek 3.2.2 i Twierdzenie 2.3.21), a także zbadaliśmy kształt kul $\mathcal{Z}_p$ (Wniosek 3.2.4 i Wniosek 2.3.12). Możemy wyciągnąć z tego stąd następujący

Wniosek 4.4.19. *Istnieje taka stała C, że dla dowolnego $p \in [1,2]$, $t > 0$ oraz $n \in \mathbb{N}$ zachodzi*

$$\nu_p^n\Big(A + C(t^{1/p}B_p^n + t^{1/2}B_2^n)\Big) \geqslant \min\Big\{\frac{1}{2}, e^t\nu_p^n(A)\Big\}.$$

Z powodów technicznych będziemy musieli odrzucić z rozważań zbiór tych punktów, gdzie p–ta norma jest mała, aby użyć Stwierdzenia 4.4.6. Przypomnijmy, że dzięki Stwierdzeniu 2.3.25 będziemy umieli odrzucić z rozważań zbiory o mierze rzędu e^{-cn}. Poniższe proste Stwierdzenie pokazuje, że odrzucany zbiór jest właśnie takiej miary.

Stwierdzenie 4.4.20. *Dla dowolnego $\alpha > 1$ istnieje taka stała $c(\alpha)$, że dla każdych $n \in \mathbb{N}$ oraz $p \geqslant 1$ zachodzi*

$$\nu_p^n(\{x : \|x\|_p < c(\alpha)n^{1/p}\}) < \alpha^{-n}.$$

Dowód. Mamy

$$\begin{aligned}\nu_p^n(\{x : \|x\|_p < c(\alpha)n^{1/p}\}) =& \frac{n}{\Gamma(1+\frac{n}{p})}\int_0^{c(\alpha)n^{1/p}} e^{-r^p}r^{n-1}dr\\ \leqslant& \frac{n}{\Gamma(1+\frac{n}{p})}\int_0^{c(\alpha)n^{1/p}} r^{n-1}dr = \frac{c(\alpha)^n n^{n/p}}{\Gamma(1+\frac{n}{p})} \leqslant (Cc(\alpha))^n,\end{aligned}$$

gdzie w ostatnim kroku używamy przybliżenia Stirlinga, zaś C, jak zawsze, oznacza stałą liczbową. Wystarczy zatem w tezie przyjąć $c(\alpha) < (C\alpha)^{-1}$. □

Twierdzenie 4.4.21. *Istnieje taka stała liczbowa C, że miara $\mu_{p,n}$ spełnia własności* CI(C) *oraz* IC(C) *dla dowolnego $p \in [1,2]$ i $n \in \mathbb{N}$.*

Dowód. Na mocy Stwierdzeń 2.3.25 i 4.2.5 oraz Twierdzenia 2.3.21 wystarczy pokazać

$$\mu_{p,n}\Big(A + C\Big(t^{1/p}B_p^n + t^{1/2}B_2^n\Big)\Big) \geqslant \min\{1/2, e^t\mu_{p,n}(A)\}. \tag{4.4.12}$$

dla $1 \leqslant t \leqslant n$ i $\mu_{p,n}(A) \geqslant e^{-n}$.

Przypomnijmy, że $T_{p,n}$ oznacza przekształcenie transportujące ν_p^n na $\mu_{p,n}$. Zastosujmy Lemat 4.4.18 do zbioru $T_{p,n}^{-1}(A)$ i parametru t. Jeśli zajdzie pierwszy przypadek tezy lematu, otrzymamy

$$\nu_p^n\Big(T_{p,n}^{-1}(A) + 20t^{1/p}B_p^n\Big) \geqslant e^t\nu_p^n\Big(T_{p,n}^{-1}(A)\Big) = e^t\mu_{p,n}(A).$$

Na mocy Stwierdzenia 4.4.5 $\|T_{p,n}x - T_{p,n}y\|_p \leqslant 2\|x-y\|_p$, zatem z Uwagi 4.4.1 wynika

$$\begin{aligned}\mu_{p,n}\Big(A + 40t^{1/p}B_p^n\Big) &= \nu_p^n\Big(T_{p,n}^{-1}\Big(A + 40t^{1/p}B_p^n\Big)\Big)\\ &\geqslant \nu_p^n\Big(T_{p,n}^{-1}(A) + 20t^{1/p}B_p^n\Big) \geqslant e^t\mu_{p,n}(A)\end{aligned}$$

i otrzymujemy nierówność (4.4.12).

Możemy zatem założyć, że zachodzi drugi przypadek w tezie Lematu 4.4.18, to znaczy, że

$$\nu_p^n(A') \geqslant \frac{1}{2}\nu_p^n(T_{p,n}^{-1}(A)) = \frac{1}{2}\mu_{p,n}(A),$$

gdzie

$$A' := \Big(T_{p,n}^{-1}(A) + 20t^{1/p}B_p^n\Big) \cap 100\sqrt{n}B_2^n.$$

W szczególności $\nu_p^n(A') \geqslant e^{-n}/2$. Niech

$$A'' := A' \cap \{x : \|x\|_p \geqslant \tilde{c}n^{1/p}\},$$

gdzie $\tilde{c} = c(4e)$ jest stałą pochodzącą ze Stwierdzenia 4.4.20 dla $\alpha = 4e$. Wtedy

$$\nu_p^n(A'') \geqslant \nu_p^n(A') - (4e)^{-n} \geqslant \frac{1}{2}\nu_p^n(A') \geqslant \frac{1}{4}\mu_{p,n}(A).$$

Stosujemy Wniosek 4.4.19 dla zbioru A'' i parametru $4t$, otrzymując

$$\begin{aligned}\mu_{p,n}\Big(T_{p,n}\Big(A'' + 4C\Big(t^{1/p}B_p^n + t^{1/2}B_2^n\Big)\Big)\Big) &\geqslant \nu_p^n\Big(A'' + C\Big((4t)^{1/p}B_p^n + (4t)^{1/2}B_2^n\Big)\Big)\\ &\geqslant \min\left\{\frac{1}{2}, e^{4t}\nu_p^n(A'')\right\} \geqslant \min\left\{\frac{1}{2}, e^{4t}\frac{\mu_{p,n}(A)}{4}\right\} \geqslant \min\left\{\frac{1}{2}, e^t\mu_{p,n}(A)\right\}.\end{aligned}$$

Następnym krokiem jest skorzystanie ze Stwierdzenia 4.4.5 oraz Uwagi 4.4.1, by otrzymać

$$T_{p,n}\Big(A'' + 4Ct^{1/2}B_2^n + 4Ct^{1/p}B_p^n\Big) \subset T_{p,n}\Big(A'' + 4Ct^{1/2}B_2^n\Big) + 8Ct^{1/p}B_p^n.$$

Co więcej, dla $x \in A''$ zachodzi $\|x\|_2 \leqslant 100\sqrt{n}$ i $\|x\|_p \geqslant \tilde{c}n^{1/p}$. Zatem $n^{-1/2}\|x\|_2 \leqslant 100\tilde{c}^{-1}n^{-1/p}\|x\|_p$, a więc możemy użyć Stwierdzenia 4.4.6 wraz z Uwagą 4.4.1 i otrzymać

$$T_{p,n}(A'' + 4Ct^{1/2}B_2^n) \subset T_{p,n}(A'') + \tilde{C}t^{1/2}B_2^n.$$

Na mocy Stwierdzenia 4.4.5, Uwagi 4.4.1 oraz definicji A' i A'' prawdą jest, że

$$T_{p,n}(A'') \subset T_{p,n}(A') \subset T_{p,n}\Big(T_{p,n}^{-1}(A) + 20t^{1/p}B_p^n\Big) \subset A + 40t^{1/p}B_p^n.$$

Składając te oszacowania w jedną całość widzimy, że

$$\begin{aligned}\mu_{p,n}\Big(A+&(40+8C)t^{1/p}B_p^n+\tilde{C}t^{1/2}B_2^n\Big)\\&\geqslant \mu_{p,n}\Big(T_{p,n}(A'')+\tilde{C}t^{1/2}B_2^n+8Ct^{1/p}B_p^n\Big)\\&\geqslant \mu_{p,n}\Big(T_{p,n}\Big(A''+4Ct^{1/2}B_2^n\Big)+8Ct^{1/p}B_p^n\Big)\\&\geqslant \mu_{p,n}\Big(T_{p,n}\Big(A''+4C\Big(t^{1/p}B_p^n+t^{1/2}B_2^n\Big)\Big)\Big)\geqslant \min\Big\{\frac{1}{2},e^t\mu_{p,n}(A)\Big\},\end{aligned}$$

co daje nam oszacowanie (4.4.12) w drugim przypadku i kończy dowód CI. Własność IC wynika bezpośrednio z Twierdzenia 2.3.21. □

4.4.3 Prostszy przypadek — $p \geqslant 2$

Ten przypadek wyniknie bezpośrednio z CI dla zmiennej wykładniczej oraz faktów udowodnionych w części 4.4.1. Co prawda, gdyby złożyć w całość wszystkie używane w tej części fakty, mogłyby one okazać się dłuższe i żmudniejsze w dowodzie, niż te, których użyliśmy w części 4.4.2, ale jednak wyniki takie, jak Stwierdzenie 4.4.13 wydają się bardziej standardowe i mniej nowatorskie niż Twierdzenie 3.3.6. Do tego, mając wyniki części 4.4.1 będziemy musieli napracować się o wiele mniej, niż w części 4.4.2.

Twierdzenie 4.4.22. *Istnieje taka stała liczbowa C, że miara $\mu_{p,n}$ spełnia własności* CI(C) *oraz* IC(C) *dla dowolnego $p \in [1,\infty]$ i $n \in \mathbb{N}$.*

Dowód. Przypadek $p \leqslant 2$ jest rozpatrzony w Twierdzeniu 4.4.21. Przypadek $p = \infty$, czyli kostka, jest produktowy, a zatem rozpatrzony we Wniosku 3.2.2. W przypadku $p \in [2,\infty)$ użyjemy transportu $S_{p,n}$. Załóżmy, że $A \subset r_{p,n}B_p^n$, niech $\tilde{A} := S_{p,n}^{-1}(A)$, zaś $t \leqslant n$. Na mocy dwupoziomowej koncentracji Talagranda (2.3.1), znanej w tej pracy jako CI dla ν, otrzymujemy $\nu^n(\tilde{A}+CtB_1^n+\sqrt{Ct}B_2^n) \geqslant \min\{e^t\nu^n(\tilde{A}),1/2\}$. Jednakże na mocy Wniosku 4.4.15 mamy

$$S_{p,n}\Big(\tilde{A}+CtB_1^n+\sqrt{Ct}B_2^n\Big)\Big) \subset S_{p,n}(\tilde{A})+8\sqrt{C}\Big(\sqrt{t}B_2^n\cap t^{1/p}B_p^n\Big).$$

Zatem, jako że $S_{p,n}(\tilde{A}) = A$ oraz $S_{p,n}$ transportuje miarę ν^n na $\mu_{p,n}$, otrzymujemy

$$\mu_{p,n}\Big(A+8\sqrt{C}\Big(t^{1/p}B_p^n\cap t^{1/2}B_2^n\Big)\Big) \geqslant \min\{1/2,e^t\mu_{p,n}(A)\}.$$

To, na mocy Stwierdzeń 2.3.25 oraz 4.2.5 daje nam CI dla $\mu_{p,n}$. Własność IC otrzymujemy na mocy Twierdzenia 2.3.21. □

Na mocy Twierdzenia 2.3.21 udaje nam się udowodnić nierówność izoperytmetyczną Cheegera dla $\mu_{p,n}$. Jednakże ten tok rozumowania nie pozwala nam na rozsądne oszacowanie stałej. Możemy otrzymać precyzyjniejszy wynik używając — jak poprzednio — transportu miary wykładniczej.

Stwierdzenie 4.4.23. *Dla dowolnego $p \geqslant 2$ oraz $n \geqslant 1$ miara $\mu_{p,n}$ spełnia nierówność Cheegera (2.3.16) ze stałą* $1/20$.

Dowód. Na mocy [8] nierówność Cheegera dla ν^n zachodzi ze stałą $\kappa = 1/(2\sqrt{6})$, zatem na mocy Stwierdzenia 4.4.13, $\mu_{p,n}$ spełnia (2.3.16) ze stałą $\kappa/4 \geqslant 1/20$. □

Możemy również dowieść silniejszego wyniku — koncentracji typu gaussowskiego dla $\mu_{p,n}$ przy $p \geqslant 2$. Przypomnijmy, że wyniki izoperymetryczne dla $p \leqslant 2$ udowodnił S. Sodin w pracy [45], korzystając z wyników [6].

Twierdzenie 4.4.24. *Niech* $\Phi(x) = (2\pi)^{-1/2} \int_x^\infty \exp(-y^2/2)$ *będzie dystrybuantą rozkład gaussowskiego,* $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ *i* $p \geqslant 2$. *Wtedy*

$$\mu_{p,n}(A) = \Phi(x) \;\Rightarrow\; \mu_{p,n}(A + 20tB_2^n) \geqslant \Phi(x+t) \text{ dla każdego } t > 0.$$

W szczególności istnieja taka stała liczbowa C, *że*

$$\mu_{p,n}{}^{+}(A) \geqslant \frac{1}{C} \min\left\{\mu_{p,n}(A)\sqrt{\ln\frac{1}{\mu_{p,n}(A)}}, (1-\mu_{p,n}(A))\sqrt{\ln\frac{1}{1-\mu_{p,n}(A)}}\right\}.$$

Dowód. Na mocy Stwierdzenia 4.4.17, $\tilde{S}_{p,n}(\sqrt{2}\cdot)$ jest Lipszycowska ze stałą $14\sqrt{2}$ i transportuje miarę gaussowska na $\mathbb{R}^n$ na $\mu_{p,n}$. Zatem pierwsza część Twierdzenia wynika z gaussowskiej nierówności izoperymetrycznej Borella [13] oraz Sudakowa i Tsirelsona [46]. Drugie oszacowanie wynika natychmiast ze standardowego oszacowania gaussowskiej funkcji izoperymetycznej:

$$I(x) = \Phi' \circ \Phi^{-1}(x) \geqslant c \min\{x\sqrt{-\ln x}, (1-x)\sqrt{-\ln(1-x)}\}$$

dla $x \in [0,1]$. $\square$

Rozdział 5

Uogólnione kule Orlicza

5.1 Wprowadzenie i motywacja

Naturalnym uogólnieniem kul B_p^n są kule Orlicza, a dalej uogólnione kule Orlicza. Choć nie mają one tak samo prostej budowy, jak kule B_p^n, wciąż mają wystarczająco dużo struktury, by można było dla nich udowodnić fakty trudne, czy nawet nieprawdziwe dla ogólnych ciał 1–symetrycznych. Są, z drugiej strony, dużo szerszą klasą ciał wypukłych — przykładowo każde dwuwymiarowe, 1–symetryczne ciało wypukłe jest uogólnioną kula Orlicza.

Czytelnikowi mniej obeznanemu z kulami Orlicza warto też przypomnieć, że jeśli rozważymy kulę K zadaną funkcjami f_i, to zbiór $\sum f_i(|x_i|) \leqslant t$ nie jest koniecznie sferą w normie zadanej przez kulę K. To zjawisko zachodziło dla kul B_p^n (i umożliwiało przeprowadzenie dowodu Twierdzenia 4.3.1), natomiast nie zachodzi przykładowo dla kuli zadanej funkcjami $f_1(x) = x$, $f_2(x) = x^2$.

Kule Orlicza stanowią naturalny krok pośredni pomiędzy kulami B_p^n a kulami 1–symetrycznymi — tak jest np. w nieopublikowanych dotychczas wynikach B. Fleury'ego [17] dotyczących odwrotnej nierówności Höldera, gdzie wynik, który intuicyjnie powinien zachodzić dla ogólnych kul 1–symetrycznych jest przy pomocy Twierdzenia 5.3.17 udowodniony dla uogólnionych kul Orlicza.

Poniżej przedstawimy dowód ujemnej stowarzyszoności modułów dla kul Orlicza. Niestety, pomimo pewnej ilości pracy nie udało się nam (tj. Rafałowi Latale i mnie) uzyskać nierówności CI dla kuli Orlicza.

Wszystkie miary rozważane w tym rozdziale są miarami skończonymi.

5.2 Ujemna korelacja kwadratów i Centralne Twierdzenie Graniczne

Wpierw skoncentrujemy się na dowodzie bardzo słabej ujemnej stowarzyszoności modułów. Co prawda dalej udowodnimy silniejsze Twierdzenie 5.3.17 — ujemną stowarzyszoność modułów bez żadnych przymiotników — ale dowód będzie dużo bardziej techniczny. Tymczasem dowód bardzo słabej ujemnej stowarzyszoności jest łatwo zrozumiały, i zawiera idee, które będą jądrem dowodu również ogólnego przypadku, ale tam będą dużo mniej widoczne.

Do dowodu bardzo słabej ujemnej stowarzyszoności wystarczy dowieść następującej nierówności (2.2.3):

Twierdzenie 5.2.1. *Niech K będzie uogólnioną kulą Orlicza w $\mathbb{R}^n$. Wtedy dla dowolnych $y >$*

$\bar{y} > 0$ *oraz* $z > \bar{z} > 0$ *mamy*

$$u(y, \bar{z})u(\bar{y}, z) \geqslant u(y, z)u(\bar{y}, \bar{z}), \tag{5.2.1}$$

gdzie $u(x, y)$ *oznacza* $\int_{\mathbb{R}_+^{n-2}} \mathbf{1}_K(x, y, v)d\lambda_{n-2}(v)$

Z tego Twierdzenia natychmiast wynika nierówność (2.2.2), która jest równoważna bardzo słabej ujemnej stowarzyszoności modułów:

Wniosek 5.2.2. *Jeśli* K *jest uogólnioną kulą Orlicza w* $\mathbb{R}^n$, *zaś* X *wektorem losowym o rozkładzie jednostajnym na* K, *to* X *ma własność bardzo słabego ujemnego stowarzyszenia modułów: dla rosnących funkcji* f *i* g *oraz dowolnych* i, j *zachodzi*

$$\mathbb{E}f(|X_i|)g(|X_j|) \leqslant \mathbb{E}f(|X_i|)\mathbb{E}g(|X_j|). \tag{5.2.2}$$

Pozostaje więc dowieść nierówności (5.2.1).

Dowód Tw. 5.2.1. Niech (f_i) będzie dowolnym zestawem funkcji Younga dla K. Rozważmy kulę $K' \subset \mathbb{R}^{n-1}$, która jest uogólnioną kulą Orlicza zadaną przez funkcje $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_{n-1}$, gdzie $\Phi_i(t) = f_{i+1}(t)$ dla $i > 1$ oraz $\Phi_1(t) = t$ — innymi słowy zamieniamy pierwsze dwie funkcje Younga K przez jedną funkcję identycznościową.

Dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ niech P_x oznacza zbiór $(\{x\} \times \mathbb{R}^{n-2}) \cap K'$, oraz niech $|P_x|$ będzie jego $n-2$–wymiarową miarą Lebesgue'a. K' jest zbiorem wypukłym, zatem na mocy nierówności Brunna-Minkowskiego (patrz np. [18]) funkcja $x \mapsto |P_x|$ jest logarytmicznie wklęsła, co oznacza, że dla dowolnego $t \in [0, 1]$ zachodzi

$$|P_{tx+(1-t)y}| \geqslant |P_x|^t \cdot |P_y|^{1-t},$$

a w szczególności dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c zachodzi

$$|P_{a+c}| \geqslant |P_a|^{b/(b+c)}|P_{a+b+c}|^{c/(b+c)},$$

$$|P_{a+b}| \geqslant |P_a|^{c/(b+c)}|P_{a+b+c}|^{b/(b+c)}.$$

Po pomnożeniu tych dwóch nierówności stronami otrzymujemy

$$|P_{a+b}| \cdot |P_{a+c}| \geqslant |P_a| \cdot |P_{a+b+c}|. \tag{5.2.3}$$

Powróćmy teraz do kuli K. Weźmy dowolne $y > \bar{y} > 0$ oraz $z > \bar{z} > 0$. Niech $a = f_1(\bar{y}) + f_2(\bar{z})$, $b = f_1(y) - f_1(\bar{y})$, i $c = f_2(z) - f_2(\bar{z})$. Z założeń o $y, z, \bar{y}$ i $\bar{z}$ liczby a, b i c są dodatnie. Zatem $u(\bar{y}, \bar{z})$ jest równe mierze zbioru

$$\{(x_3, x_4, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}_+^{n-2} : f_1(\bar{y}) + f_2(\bar{z}) + \sum_{i=3}^n f_i(x_i) \leqslant 1\}$$
$$= \{(x_3, x_4, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}_+^{n-2} : a + \sum_{i=2}^n \Phi_i(x_i) \leqslant 1\} = P_a.$$

Podobnie $u(y, \bar{z}) = |P_{a+b}|$, $u(\bar{y}, z) = |P_{a+c}|$ i $u(y, z) = |P_{a+b+c}|$.

Wstawiając te wartości do nierówności (5.2.3) otrzymamy tezę. □

Warto zauważyć, że nawet ten wynik daje nam pewną wersję koncentracji normy euklidesowej, a zatem w szczególności uogólnia wyniki [2] i daje Centralne Twierdzenie Graniczne. Wstawiając do nierówności (5.2.2) $f(t) = g(t) = t^2$ otrzymamy własność zwaną *ujemną korelacją kwadratów.* Poniżej powtórzymy tu za [2] rozumowanie, które na tej podstawie dowodzi koncentracji normy euklidesowej.

Wniosek 5.2.3. *Dla każdej uogólnionej kuli Orlicza $K \subset \mathbb{R}^n$ w położeniu izotropowym zachodzi*

$$\frac{\mathrm{Var}(|X|^2)}{nL_K^4} \leqslant 5,$$

gdzie X jest wektorem jednostajnie rozłożonym na K.

Dowód. Z nierówności Szwarca widzimy, że

$$n^2 L_K^4 = \left(\sum_{i=1}^n \mathbb{E}_K X_i^2\right)^2 = \left(\mathbb{E}_K|X|^2\right)^2 \leqslant \mathbb{E}_K|X|^4.$$

Z drugiej strony z Wniosku 5.2.2 mamy

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_K|X|^4 &= \mathbb{E}_K\left(\sum_{i=1}^n X_i^2\right)^2 = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}_K X_i^4 + \sum_{i\neq j} \mathbb{E}_K X_i^2 X_j^2 \\
&\leqslant \sum_{i=1}^n \mathbb{E}_K X_i^4 + \sum_{i\neq j} \mathbb{E}_K X_i^2 \mathbb{E}_K X_j^2 \\
&= \sum_{i=1}^n \mathbb{E}_K X_i^4 + n(n-1)L_K^4.
\end{aligned}$$

Jako, że gęstość X_i jest symetryczna i log–wklęsła, wiemy (patrz np. [27], Sekcja 2, Uwaga 5, daje się to też odczytać z wyników [5], zaś ze stałą 8 wynika to z Lematu 2.1.2)

$$\mathbb{E}_K X_i^4 \leqslant 6\left(\mathbb{E}_K X_i^2\right)^2 = 6L_K^4,$$

a zatem

$$n^2 L_K^4 \leqslant \mathbb{E}_K|X|^4 \leqslant (n^2+5n)L_K^4.$$

To daje nam

$$\mathrm{Var}(|X|^2) = \mathbb{E}_K|X|^4 - n^2 L_K^4 \leqslant 5nL_K^4,$$

czyli

$$\frac{\mathrm{Var}(|X|)^2}{nL_K^4} \leqslant 5.$$

□

Wniosek 5.2.4. *Dla dowolnej uogólnionej kuli Orlicza $K \subset \mathbb{R}^n$ oraz dowolnego $t > 0$ mamy*

$$\mathbb{P}_K\left(\left|\frac{|X|^2}{n} - L_K^2\right| \geqslant t\right) \leqslant \frac{5L_K^4}{nt^2}$$

oraz

$$\mathbb{P}_K\left(\left|\frac{|X|}{\sqrt{n}} - L_K\right| \geqslant t\right) \leqslant \frac{5L_K^2}{nt^2}$$

Dowód. Z oszacowania wariancji $|X|^2$ i nierówności Czebyszewa otrzymujemy

$$t^2\mathbb{P}_K\left(\left|\frac{|X|^2}{n} - L_K^2\right| \geqslant t\right) \leqslant \mathbb{E}_K\left(\frac{|X|^2}{n} - L_K^2\right)^2 = \frac{1}{n^2}\mathrm{Var}(|X|^2) \leqslant \frac{5}{n}L_K^4.$$

Aby udowodnić drugą część zauważmy, że

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_K\Big(\Big||X| - \sqrt{n}L_K\Big| \geqslant t\sqrt{n}\Big) &\leqslant \mathbb{P}_K\Big(\Big||X|^2 - nL_K^2\Big| \geqslant tnL_K\Big) \\ &\leqslant \frac{5L_K^4}{t^2 nL_K^2} = \frac{5L_K^2}{t^2 n}.\end{aligned}$$

□

Obecnie znane są silniejsze rezultaty (np. [25], patrz też Twierdzenie 2.2.9). Warto jednak wiedzieć, że tak prostymi środkami da się osiągnąć koncentrację normy euklidesowej, a zatem również Centralne Twierdzenie Graniczne dla kul Orlicza.

5.3 Ujemne stowarzyszenie modułów

5.3.1 Idee zawarte w dowodzie

Ta część pracy w zamierzeniu autora ma być swoistym przewodnikiem po jej dalszej części. Przedstawiony niżej dowód jest dość techniczny, a jednak — w moim odczuciu — zawiera kilka pomysłów, na które warto zwrócić uwagę. Postaram się zatem tutaj pokazać, w jaki sposób czerpie on z idei dowodów Twierdzeń 4.3.1 i 5.2.1, by dać w następnych częściach czytelnikowi szansę zorientowania się, po co konkretny techniczny lemat jest dowodzony i do czego prowadzi.

Zaczniemy od dokładniejszej analizy dowodów Twierdzeń 5.2.1 oraz 4.3.1. Dowód Twierdzenia 4.3.1, tak, jak go przedstawiłem, ma zaletę zwięzłości i zgrabności, natomiast niezbyt widać, o co w nim chodzi. Tu postaram się go rozpisać nieco bardziej.

Udowodnić mamy nierówność $\mu(A\times B)\mu(\bar{A}\times\bar{B}) \leqslant \mu(A\times\bar{B})\mu(\bar{A}\times B)$. Faktycznie rachunki prowadzi się prościej na takim zapisie, natomiast myśleć będzie nam łatwiej, jeżeli zapiszemy to jako porównanie proporcji:

$$\frac{\mu(A\times B)}{\mu(A\times\bar{B})} \leqslant \frac{\mu(\bar{A}\times B)}{\mu(\bar{A}\times\bar{B})}. \tag{5.3.1}$$

Aby poradzić sobie z miarami zbiorów, zmieniamy je spowrotem na całki. Pierwszą równość dowodu można równoważnie zapisać wzorem

$$\mu(A\times B) = \int_A \left(\int_{\mathbb{R}^{n-k}} \mathbf{1}_B(y) m(\|x\|_p^p + \|y\|_p^p)dy\right)dx = \int_A f_B(x)dx.$$

Po postawieniu całek za wszystkie cztery miary zadanie przyjmuje postać następującą: mamy dwie funkcje, oraz p–zbiór A. Chcemy udowodnić, że $\int f_B/\int f_{\bar{B}}$ (wg oznaczeń z dowodu Twierdzenia 4.3.1) jest większe, gdy całkować będziemy po A, aniżeli jeśli całkować będzie po dopełnieniu.

Opiszę teraz ogólną strategię dowodową takiego faktu. Strategia ta będzie kluczem również do dowodu ogólnego Twierdzenia dla kul Orlicza, więc zrobię to dokładnie. Strategia opiera się na olbrzymiej dozie optymizmu: będziemy po prostu próbowali udowodnić, że ułamek f/g jest malejący po promieniach. Następnie zauważmy, że dla ustalonego promienia $\mathcal{P}$ zbiór $\mathcal{P}\cap A$ jest odcinkiem o jednym końcu w zerze, zaś $\mathcal{P}\cap\bar{A}$ — półprostą o początku w drugim końcu $r_{\mathcal{P}}$ tego odcinka. Zatem na $\mathcal{P}$ wyrażenie $\int_{\mathcal{P}\cap A} f/\int_{\mathcal{P}\cap A} g$ będzie większe niż iloraz odpowiednich całek po $\mathcal{P}\cap\bar{A}$, bo lewą stronę możemy oszacować z dołu, a prawą z góry przez $f(r_{\mathcal{P}})/g(r_{\mathcal{P}})$. Oczywiście sytuacja się nie zmieni, jeśli zamiast całkować po promieniu względem miary Lebesgue'a będziemy całkować względem dowolnej miarą z dodatnią gęstością.

Ostatnim fragmentem rozumowania jest przejście od promieni do całej kuli. Oczywiście całkę po zbiorze, poprzez całkowanie biegunowe, możemy wyskładać z całek po promieniach (z miarą nr^{n-1}). Niestety to nie wystarcza: z ciągu nierówności $a_i/b_i > c_i/d_i$ nie wynika jeszcze $\sum a_i/\sum b_i > \sum c_i/\sum d_i$ (np. $(3+2)/(1+3) < (5+1)/(2+2)$. Zauważmy jednak następujący kluczowy fakt: iloraz $\int_{\mathcal{P}} f/\int_{\mathcal{P}} g$ jest niezależny od $\mathcal{P}$. W naszych nierównościach mamy wobec tego

$$\frac{\int_{\mathcal{P}\cap A} f}{\int_{\mathcal{P}\cap A} g} \geqslant \frac{\int_{\mathcal{P}} f}{\int_{\mathcal{P}} g} \geqslant \frac{\int_{\mathcal{P}\cap \bar{A}} f}{\int_{\mathcal{P}\cap \bar{A}} g},$$

a zatem odpowiednie nierówności będą prawdziwe też po całkowaniu biegunowym. Aby iloraz był niezależny od całek wystarczy oczywiście, by f i g nie zależały od konkretnego punktu, w $\mathbb{R}^k$, ale wyłącznie od p–tej normy tego punktu — wtedy na każdym promieniu f i g będą wyglądały identycznie.

Jak tę strategię zastosować do naszego problemu? Chcemy udowodnić nierówność (5.3.1). Sprowadziliśmy ją do nierówności całek z $f_B(x) = \int_{\mathbb{R}^{n-k}} \mathbf{1}_B(y) m(\|x\|_p^p + \|y\|_p^p)dy$. Faktycznie ta funkcja zależy tylko od p–tej normy x, zatem wystarczy udowodnić malejącość po promieniach funkcji $f_B/f_{\bar{B}}$ (nierówność (4.3.1) w dowodzie Twierdzenia 4.3.1). Aby to zrobić, spróbujemy znowu zastosować naszą strategię. Zamieńmy miejscami licznik prawej strony z mianownikiem lewej — chcemy zatem udowodnić, że $\int_B m(r_1^p + \|y\|_p^p)dy/\int_B m(r_2^p + \|y\|_p^p)dy$ jest większe od analogicznej proporcji całek dla $\bar{B}$. Funkcja podcałkowa zależy tylko od $\|y\|_p$, zatem, na mocy naszej ogólnej strategii wystarczy udowodnić malejącość po promieniach funkcji $m(r_1^p + \|y\|_p^p)/m(r_2^p + \|y\|_p^p)$, czyli nierówność (4.3.3).

Zastanówmy się, co z tego schematu dowodu uda się przenieść bezpośrednio na przypadek kul Orlicza. Rozważmy dowolną uogólnioną kulę Orlicza K. Postawowym problemem jest brak analogu kluczowego faktu — o ile przecięcia kuli B_p^n z promieniami na części współrzędnych (tj. zbiorami $\{(tx, y) : t \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^{n-k}\}$) były przystające, o tyle dla kuli Orlicza tak nie jest, a więc nie ma powodu, dla którego iloraz $\int_{\mathcal{P}} f/\int_{\mathcal{P}} g$ miałby być niezależny od $\mathcal{P}$ (i często nie jest). Będziemy ten problem omijać zastępując promienie innymi zbiorami tak, by odzyskać tę własność. O ile dla promieni całkowanie biegunowe dostarczało nam prostego sposobu, jak z nieprzeliczalnej liczby promieni poskładać całkę dla całej kuli, o tyle w momencie, w którym zaczniemy zastępować promienie innymi zbiorami, pojawiają się problemy techniczne. W pracy [41] radziliśmy sobie z tym przez podział na zbiory o dodatniej (choć małej mierze), o których możemy myśleć jako o odpowiednikach przybliżeń promieni przez stożki o wierzchołku w zerze i podstawie na sferze. Oczywiście takie podejście powodowało, że bardzo dużo rzeczy musieliśmy aproksymować, przez co dowód stawał się przerażająco techniczny. Poniżej podam nowy dowód, który zamiast dyskretyzacji wykorzystuje podejście podobne do lematu lokalizacyjnego Kannana–Lovasza–Simonovitsa [22].

5.3.2 Lemat lokalizacyjny

Pomysł podany poniżej wydaje się być dość podobny do tzw. Lematu Lokalizacyjnego udowodnionego w pracy [22]. Koncept polega na tym, żeby — zamiast próbować wyrazić całą miarę, którą rozważamy, jako całkę po pewnej rodzinie odcinków z pewną miarą (jak dzieje się to przy całkowaniu biegunowym), to będziemy usiłowali uzyskać tylko jeden odcinek z własnościami, których potrzebujemy. Będziemy to robić przez systematyczne dzielenie całego zbioru na coraz mniejsze części (zbiegające do odcinka), na których potrzebne własności ciągle są spełnione. Ta mglista idea przekłada się na konkrety w poniższych trzech lematach. Rozpoczniemy od wprowadzenia oznaczeń.

Definicja 5.3.1. Miarą ułożoną *nazywamy trójkę* $(\mu, V, \mathcal{E})$*, gdzie* V *to przestrzeń liniowa skończonego wymiaru nad* $\mathbb{R}$*,* μ *jest miarą absolutnie ciągłą względem miary Lebesgue'a na* V*, zaś*

$\mathcal{E}$ *to baza przestrzeni* V*. Gdy przestrzeń i miara będą oczywiste (np. utożsamimy* V *z* $\mathbb{R}^n$ *i* $\mathcal{E}$ *z bazą standardową), to będziemy po prostu mówili o ułożonej mierze* μ*. Mówiąc o gęstości, nośniku, etc. miary ułożonej mamy na myśli gęstość, nośnik, etc. miary* μ*.* V *będziemy nazywać* przestrzenią M*, zaś* $\mathcal{E}$ — bazą M*.*

Dla $x, y \in V$, gdzie w V mamy wyróżnioną bazę $(e_1, \dots, e_n)$, będziemy pisać $x \leqslant y$ jeśli $\langle x, e_i\rangle \leqslant \langle y, e_i\rangle$ dla każdego $i \in \{1, \dots, n\}$. Przez x_i będziemy oznaczać $\langle x, e_i\rangle$.

Miary, którymi będziemy się zajmować, nazwiemy dobrymi:

Definicja 5.3.2. *Ułożoną miarę* $(\mu, \mathbb{R}^n, \mathcal{E})$ *nzaywamy* dobrą*, jeśli ma gęstość postaci* $m(\sum f_i(x_i)) \prod_{i=1}^n w_i(x_i)$ *na* $\mathbb{R}_+^n$ *oraz znika poza* $\mathbb{R}_+^n$*, gdzie* $(f_i)_{i=1}^n$ *są funkcjami Younga,* $(w_i)_{i=1}^n$ *są funkcjami log–wklęsłymi, zaś* $m : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *to funkcja log–wklęsła o zwartym nośniku, osiągająca maksimum w zerze.*

Kluczowa jest tu zamkniętość tej klasy miar na domnażanie „po współrzędnych” przez funkcję log–wklęsłe oraz na przecinanie „dodatnio nachylonymi” podprzestrzeniami:

Definicja 5.3.3. *Niech* $M = (\mu, V, \mathcal{E})$ *będzie miarą ułożoną z gęstością* s*. Wtedy* synów M *definiujemy następująco:*

- *dla* $i \in \{1, 2, \dots, \dim V\}$ *oraz funkcji log–wklęsłej* $w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ *trójka* $(\tilde{\mu}, V, \mathcal{E})$ *jest synem* M*, gdzie* $\tilde{\mu}$ *to miara na* V *o gęstości* $s(x)w(x_i)$*,*
- *jeśli* H *to hiperpłaszczyzna afiniczna w* V *zadana równaniem* $x_i = ax_j + b$ *dla pewnych liczb nieujemnych* a, b *oraz* $i, j \in \{1, 2, \dots, \dim V\}$*, to trójka* $(\tilde{\mu}, \tilde{H}, \tilde{\mathcal{E}})$ *jest synem* M*, gdzie* $\tilde{H}$ *to* H *ze strukturą liniową zadaną przez ustalenie środka układu współrzędnych w punkcie* x *spełniającym* $x_i = b, x_k = 0$ *dla* $k \neq i$*,* $\tilde{\mu}$ *to miara na* $\tilde{H}$ *z gęstością* s*, zaś* $\tilde{\mathcal{E}}$ *powstaje z* $\mathcal{E}$ *przez zastąpienie* e_i *i* e_j *przez* $ae_i + e_j$*.*

Relację bycia potomkiem *miary ułożonej* M *definiujemy jako najmniejsze przechodnie i zwrotne rozszerzenie relacji bycia synem.*

Uwaga 5.3.4. *Jeśli* M' *jest synem* M *drugiego z powyższych typów, to naturalne teoriomnogościowe włożenie* V' *w* V *jako zbiorów nie musi być przekształceniem liniowym przestrzeni liniowych gdy* $b > 0$*. Mimo to, gdy będziemy mówili np. o obcinaniu funkcji z* V *do* V' *(lub szerzej, dla potomka* M'' *miary ułożonej* M *o obcinaniu funkcji z przestrzeni* M *do przestrzeni* M''*), to mamy na myśli obcinanie w sensie teoriomnogościowego zawierania* $V'' \subset V$*. W szczególności obcięcie funkcji liniowej może okazać się funkcją afiniczną, ale nie liniową.*

Lemat 5.3.5. *Niech* $M = (\mu, V, \mathcal{E})$ *będzie dobrą miarą. Wtedy dowolny potomek* M *również jest dobrą miarą.*

Dowód. Oczywiście wystarczy udowodnić, że syn dobrej miary jest dobrą miarą. W pierwszym wypadku iloczyn funkcji log–wklęsłych jest log–wklęsły, zatem można odpowiednie w_i zastąpić przez $w \cdot w_i$. W przypadku drugim wystarczy zastąpić funkcje Younga odpowiadające współrzędnym x_i i x_j zastąpić przez jedną funkcję $f_i(ax+b) + f_j(x) - f_i(b)$, zastąpić m przez funkcję $m(x + f_1(b))$ oraz analogicznie zastąpić w_i i w_j przez jedną w aby otrzymać przedstawienie M jako dobrej miary. □

Definicja 5.3.6. *Dla przestrzeni liniowej* V *z bazą* $\mathcal{E}$ *przez* rozbicie V *względem* $\mathcal{E}$ *rozumiemy taki rozkład* $V = V_1 \oplus V_2$ *i* $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2$*, że* $\mathcal{E}_i$ *jest bazą* V_i*.*

Rozważmy dobrą miarę $M = (\mu, V, \mathcal{E})$ z gęstością s oraz funkcje $f, g : V \to \mathbb{R}$. Powiemy, że M, f i g spełniają warunek Θ, *jesli dla każdego rozbicia $V = V_1 \oplus V_2$ względem $\mathcal{E}$ i każdego $0_{V_1} \leqslant x \leqslant y$ zachodzi*

$$\frac{\int_{V_2} f(x,z)s(z)d\lambda_{n-k}(z)}{\int_{V_2} g(x,z)s(z)d\lambda_{n-k}(z)} \geqslant \frac{\int_{\mathbb{R}^{n-k}} f(y,z)s(z)d\lambda_{n-k}(z)}{\int_{\mathbb{R}^{n-k}} g(y,z)s(z)d\lambda_{n-k}(z)}, \tag{5.3.2}$$

o ile obydwie strony są dobrze określone, gdzie przez n oznaczam $\dim V$, *zaś przez k* — $\dim V_1$.

Powiemy, że miara ułożona M oraz funkcje f, g spełniają dziedziczny warunek Θ, *jeśli dowolny potomek M' miary ułożonej M oraz funkcje f, g obcięte do przestrzeni M' również spełniają warunek Θ.*

Na początek udowodnimy dwa lematy pomocnicze:

Lemat 5.3.7. *Niech K będzie zwartym zbiorem wypukłym w $\mathbb{R}^n$, K' jego zwartym, niepustym podzbiorem wypukłym wymiaru $k < n$, zaś l — podprzestrzenią afiniczną wymiaru k rozpięta przez K'. Niech K_m będzie zstępującą rodziną zwartych wypukłych podzbiorów K o niepustym wnętrzu spełniających $K' = \bigcap_{m=1}^{\infty} K_m$. Niech $g_m(x) = \lambda_{n-k}(K_m \cap P^{-1}(x))/\lambda_n(K_m)$ dla $x \in l$, gdzie P jest rzutem prostopadłym na l. Wtedy istnieje taki podciąg K_{m_i} ciągu K_m oraz taka funkcja log–wklęsła g o nośniku K', że g_{m_i} zbiega do g niemal jednostajnie na* $\mathrm{Int}_l K'$ *oraz $\int_{K'} g = 1$. Ponadto g_m są jednostajnie ograniczone na l.*

Dowód. Funkcja g_m to gęstość rzutu miary jednostajnej na n–wymiarowym zbiorze wypukłym na przestrzeń k–wymiarową, zatem na mocy nierówności Brunna–Minkowskiego pierwiastek $n-k$–tego stopnia z tej gęstości jest wklęsły na jej nośniku. Niech T_m oznacza maksimum tej gęstości na l, załóżmy, że jest ono przyjmowane w punkcie O. Niech ϕ_m będzie funkcjonałem Minkowskiego zadanym na l przez $\operatorname{supp} g_m$, gdzie O uznajemy za środek układu współrzędnych (czyli $\phi_m(x) = \sup\{\lambda : O + (x-O)/\lambda \in \operatorname{supp} g_m\}$). Z wklęsłości $n-k$–tego pierwiastka g_m na nośniku mamy, że jeśli $\phi_m(x) \leqslant 1$, to $g_m(x) \geqslant T_m(1-\phi_m(x))^{n-k}$. Określmy

$$\nu_m(A) = \int_A g_m(x) d\lambda_k(x)$$

dla $A \subset l$. Wtedy

$$\begin{aligned}
1 = \nu_m(l) &= \int_l g_m(x) d\lambda_k(x) = \int_0^{T_m} \lambda_k\{x : g_m(x) \geqslant t\} dt \geqslant \int_0^{T_m} \lambda_k\{x : T_m(1-\phi_m(x))^{n-k} \geqslant t\} \\
&= \int_0^{T_m} \lambda_k \left\{ x : \phi_m(x) \leqslant 1 - \left(\frac{t}{T_m}\right)^{1/(n-k)} \right\} dt = \int_0^{T_m} \lambda_k \left(\left(1 - \left(\frac{t}{T_m}\right)^{1/(n-k)}\right) \operatorname{supp} g_m \right) dt \\
&= \int_0^{T_m} \left(1 - \left(\frac{t}{T_m}\right)^{1/(n-k)}\right)^k \lambda_k(\operatorname{supp} g_m) dt = T_m \lambda_k(\operatorname{supp} g_m) \int_0^1 (1 - s^{1/(n-k)})^k ds \\
&= T_m \lambda_k(\operatorname{supp} g_m) c_{n,k} \geqslant T_m \lambda_k(K') c_{n,k}.
\end{aligned}$$

Stąd $1 \geqslant T_m \lambda_k(K') c_{n,k}$, czyli $T_m \leqslant 1/(c_{n,k}\lambda_k(K'))$, czyli funkcje g_m są wspólnie ograniczone. Z drugiej strony $\bigcap \operatorname{supp} g_m = K'$, więc $\lambda_k(\operatorname{supp} g_m) \to \lambda_k(K')$, a zatem $1 = \nu_m(\operatorname{supp} g_m) \leqslant T_m \lambda_k(\operatorname{supp} g_m) \leqslant 2T_m \lambda_k(K')$ dla dostatecznie dużych m, czyli $T_m \geqslant 1/2\lambda(K')$ dla dostatecznie dużych m. Przechodząc do podciągu możemy założyć, że nierówność ta zachodzi dla wszystkich m.

Naszym celem jest zastosowanie Tw. Arzeli–Ascoliego, zatem chcemy udowodnić niemal jednostajną jednakową ciągłość, tj. jednakową jednostajną ciągłość na dowolnym zwartym podzbiorze $\mathrm{Int}_l K'$. Rozważmy zatem zwarty podzbiór L zbioru $\mathrm{Int}_l K'$, ze zwartości istnieje takie δ, że dla dowolnego $x \in L$ i $z \notin K'$ mamy $|x - z| > \delta$.

Ustalmy $\Gamma > 1$. Dla dowolnych dwóch punktów $x, y \in L$ odległych o mniej niż δ/Γ możemy dobrać taki $z \in K'$, że $(\Gamma+1)y = \Gamma x + z$. Wtedy

$$g_m(x)^{\frac{1}{n-k}} - \frac{T_m^{\frac{1}{n-k}}}{\Gamma+1} \leqslant \frac{\Gamma}{\Gamma+1} g_m(x)^{\frac{1}{n-k}} \leqslant \frac{\Gamma}{\Gamma+1} g_m(x)^{\frac{1}{n-k}} + \frac{1}{\Gamma+1} g_m(z)^{\frac{1}{n-k}} \leqslant g_m(y)^{\frac{1}{n-k}},$$

a zatem

$$\begin{aligned} g_m(y) - g_m(x) &\leqslant \frac{T_m^{\frac{1}{n-k}}}{\Gamma+1}\Big(g_m(y)^{\frac{n-k-1}{n-k}} + g_m(y)^{\frac{n-k-2}{n-k}} g_m(x) + \ldots + g_m(x)^{\frac{n-k-1}{n-k}} \Big) \\ &\leqslant \frac{(n-k)T_m}{\Gamma+1} \leqslant \frac{n-k}{(\Gamma+1)c_{n,k}\lambda_k(K')}. \end{aligned}$$

Wyrażenie to nie zależy od m, x ani y, zaś dobierając odpowiednio duże Γ jesteśmy w stanie uczynić je dowolnie małym, zatem faktycznie rodzina (g_m) na L jest jednakowo jednostajnie ciągła. Zatem z tw. Arzeli–Ascoliego z (g_m) można wybrać podciąg zbieżny jednostajnie na L. Dobierając coraz większe L, sumujące się do $\operatorname{Int} K'$, możemy metodą przekątniową skonstruować podciąg (g_{m_i}) zbieżny niemal jednostajnie na K'. Niech granicą tego podciągu będzie g, zaś przez ν oznaczmy miarę z gęstością g. Skoro g_m są wspólnie ograniczone, a ich nośniki zawarte są w zbiorze zwartym, to z tw. Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej $\int_l g_m(x)dx \to \int_l g(x)dx$, czyli ν jest miarą probabilistyczną.

Wszystkie funkcje g_m są log–wklęsłe, więc przez proste przejście graniczne g też jest log–wklęsła na $\operatorname{Int} K'$. Uzupełniając g przez 0 poza wnętrzem K' otrzymujemy tezę.

$\square$

Lemat 5.3.8. *Niech K będzie zbiorem wypukłym zwartym w $\mathbb{R}^n$, zaś $K' \subset \mathbb{R}^k$ jego wypukłym, zwartym podzbiorem, zawierającym punkt z wnętrza K. Niech K_m będzie takim ciągiem zstępującym wypukłych, zwartych podzbiorów $\mathbb{R}^k \cap K$ wymiaru k, że $\bigcap K_m = K'$. Wtedy istnieje taka miara log–wklęsła ν na K' i taki podciąg K_{m_i} ciągu K_m, że dla każdej funkcji ciągłej f na K zachodzi*

$$\frac{\int_{(K_{m_i}\times\mathbb{R}^{n-k})\cap K} f(x)d\lambda_n(x)}{\lambda_n\big((K_{m_i}\times\mathbb{R}^{n-k})\cap K\big)} \to_{m\to\infty} \frac{\int_{(K'\times\mathbb{R}^{n-k})\cap K} f(x)d\nu\otimes d\lambda_{n-k}(x)}{\nu\otimes\lambda_{n-k}\big((K'\times\mathbb{R}^{n-k})\cap K\big)}.$$

Dowód. Niech l będzie podprzestrzenią afiniczną rozpiętą przez K', oznaczmy $p = k - \dim l$. Niech P oznacza rzut prostopadły z $\mathbb{R}^n$ na $l \times \mathbb{R}^{n-k}$ i niech $g_m(x) = \lambda_p(K_m \cap P^{-1}(x))/\lambda_k(K_m)$ dla $x \in l$. Wybierzmy ciąg m_i oraz funkcję g na K' według Lematu 5.3.7 tak, by g_{m_i} zbiegało do g niemal jednostajnie na $\operatorname{Int}_l K'$. Dla uproszczenia zapisu przejdźmy od razu do tego podciągu i załóżmy, że g_m zbiega niemal jednostajnie do g na $\operatorname{Int}_l K'$.

Niech $A_\delta = \{v \in \mathbb{R}^n : \rho(v, \mathbb{R}^n \setminus K) \leqslant \delta\}$. Zauważmy, że jeśli $\mathbf{1}_K(v) \neq \mathbf{1}_K(P(v))$, to $v \in A_{|v-P(v)|}$ oraz $v \in K + |v - P(v)|B_2^n$. Niech $O \in K' \cap \operatorname{Int} K$. Ustalmy $\varepsilon > 0$. Rozważmy zbiór $K_\varepsilon^- = (1+\varepsilon)^{-1}\big(K - \{O\}\big) + \{O\}$, czyli jednokładny obraz K o skali $1/(1+\varepsilon)$ i środku w O. Jest to zbiór zwarty, zawarty we wnętrzu K, zatem dla pewnego $\delta_- > 0$ mamy $K_\varepsilon^- \cap A_{2\delta_-} = \emptyset$. Analogicznie jeśli rozważymy $K_\varepsilon^+ = (1+\varepsilon)\big(K - \{O\}\big) + \{O\}$, to dla pewnego $\delta_+ > 0$ mamy $K_\varepsilon^+ \supset K + 2\delta_+ B_2^n$. Niech $\delta = \min\{\delta_-, \delta_+\}$, zatem jeśli $\mathbf{1}_K(v) \neq \mathbf{1}_K(P(v))$ i $|P(v) - v| < \delta$, to $v \in K_\varepsilon^+ \setminus K_\varepsilon^-$.

Weźmy m na tyle duże, że dla dowolnego $x \in K_m$ mamy $|x - P(x)| < \delta$. Rozważmy $\tilde{K} = (K_m \times \mathbb{R}^{n-k}) \cap K_\varepsilon^-$. Dla dowolnego punktu tego zbioru $\mathbf{1}_K(v) = \mathbf{1}_K(P(v)) = 1$. Z drugiej strony zbiór tych punktów w $K_m \times \mathbb{R}^{n-k}$, dla których $\mathbf{1}_K(v) \neq \mathbf{1}_K(P(v))$ jest zawarty w $K_\varepsilon^+ \setminus K_\varepsilon^-$, a zatem w szczególności zawiera się w $\Big((1+\varepsilon)^2(\tilde{K} - \{O\}) + \{O\}\Big) \setminus \tilde{K}$ (korzystam z tego, że $\tilde{K}$

jest wypukły i zawiera O), czyli zachodzi

$$\frac{\lambda_n\{x \in K_m \times \mathbb{R}^{n-k} : \mathbf{1}_K(x) \neq \mathbf{1}_K(P(x))\}}{\lambda_n((K_m \times \mathbb{R}^{n-k}) \cap K)} \leqslant (1+\varepsilon)^2 - 1,$$

a zatem ten iloraz jest dowolnie mały dla dostatecznie dużych m. Wobec tego

$$\begin{aligned}\frac{\int_{(K_m \times \mathbb{R}^{n-k}) \cap K} f(x) d\lambda_n(x)}{\lambda_n((K_m \times \mathbb{R}^{n-k}) \cap K)} &= \frac{\int_{K_m \times \mathbb{R}^{n-k}} f(x) \mathbf{1}_K(x) d\lambda_n(x)}{\lambda_n((K_m \times \mathbb{R}^{n-k}) \cap K)} \\ &= \frac{\int_{K_m \times \mathbb{R}^{n-k}} f(x) \mathbf{1}_K(P(x)) d\lambda_n(x)}{\lambda_n((K_m \times \mathbb{R}^{n-k}) \cap K)} + \frac{\int_{K_m \times \mathbb{R}^{n-k}} f(x)(\mathbf{1}_K(x) - \mathbf{1}_K(P(x))) d\lambda_n(x)}{\lambda_n((K_m \times \mathbb{R}^{n-k}) \cap K)}.\end{aligned}$$

Drugi składnik mogę oszacować przez $\sup f$ razy $\lambda_n\{x \in K_m \times \mathbb{R}^{n-k} : \mathbf{1}_K(x) \neq \mathbf{1}_K(P(x))\}/\lambda_n((K_m \times \mathbb{R}^{n-k}) \cap K)$, a zatem dąży on do zera. Muszę teraz rozważyć pierwszy składnik. Niech

$$\begin{aligned}I_m &:= \frac{\int_{K_m \times \mathbb{R}^{n-k}} f(v) \mathbf{1}_K(P(v)) d\lambda_n(v)}{\lambda_n((K_m \times \mathbb{R}^{n-k}) \cap K)} \\ &= \frac{\int_{\mathbb{R}^{n-k}} \int_l \mathbf{1}_K(x,y,0) \lambda_p(P^{-1}(y) \cap K_m) \Big[\int_{P^{-1}(y) \cap K_m} \frac{f(x,y,z)}{\lambda_p(P^{-1}(y) \cap K_m)} d\lambda_p(z) \Big] d\lambda_{k-p}(y) d\lambda_{n-k}(x)}{\lambda_n((K_m \times \mathbb{R}^{n-k}) \cap K)},\end{aligned}$$

gdzie przez $P^{-1}(y)$ rozumiem przeciwobraz punktu $y \in l \subset \mathbb{R}^n$ względem rzutu P. Przyjmijmy

$$f_m(x,y) = \int_{P^{-1}(y) \cap K_m} \frac{f(x,y,z)}{\lambda_p(P^{-1}(y) \cap K_m)} d\lambda_p(z).$$

Funkcja f_m to uśrednienie f po zbiorze $P^{-1}(y) \cap K_m$. Funkcja f jest ciągła na K, a więc jednostajnie ciągła, zaś średnica zbioru $P^{-1}(y) \cap K_m$ dąży jednostajnie po y do zera przy $m \to \infty$, zatem $f_m(x,y)$ dąży jednostajnie do $f(x,y,0)$. Po przypomnieniu sobie definicji g_m otrzymujemy

$$I_m = \frac{\lambda_k(K_m)}{\lambda_n((K_m \times \mathbb{R}^{n-k}) \cap K)} \int_{\mathbb{R}^{n-k}} \int_l \mathbf{1}_K(x,y,0) g_m(y) f_m(x,y) d\lambda_{k-p}(y) d\lambda_{n-k}(x).$$

Funkcje f_m i g_m są jednostajnie ograniczone, zaś $\lambda_{k-p}(\operatorname{supp} g_m \setminus K') \to 0$, więc

$$\int_{\mathbb{R}^{n-k}} \int_{l \setminus K'} \mathbf{1}_K(x,y,0) g_m(y) f_m(x,y) d\lambda_{k-p}(y) d\lambda_{n-k}(x)$$

zbiega do zera, zatem do policzenia pozostało

$$\frac{\lambda_k(K_m)}{\lambda_n((K_m \times \mathbb{R}^{n-k}) \cap K)} \int_{(K' \times \mathbb{R}^{n-k}) \cap K} g_m(y) f_m(x,y) d\lambda_{k-p}(y) d\lambda_{n-k}(x).$$

Zarówno g_m jak i f_m są jednostajnie ograniczone oraz niemal jednostajnie zbieżne, zatem $g_m(y) f_m(x,y)$ zbiega niemal jednostajnie do $g(y) f(x,y,0)$ na $K' \times \mathbb{R}^{n-k}$. Niech ν oznacza miarę na l o gęstości $g\mathbf{1}_{K'}$. Wtedy

$$\begin{aligned}\int_{(K' \times \mathbb{R}^{n-k}) \cap K} g_m(y) f_m(x,y) d\lambda_{k-p}(y) d\lambda_{n-k}(x) \to_{m \to \infty} &\int_{(K' \times \mathbb{R}^{n-k}) \cap K} g(y) f(x,y,0) d\lambda_{k-p}(y) d\lambda_{n-k}(x) \\ = &\int_{(K' \times \mathbb{R}^{n-k}) \cap K} f(x,y) d\lambda_{n-k}(x) \otimes d\nu(y).\end{aligned}$$

Ponadto

$$\frac{\lambda_n((K_m\times\mathbb{R}^{n-k})\cap K)}{\lambda_k(K_m)}=\frac{\int_{K_m\times\mathbb{R}^{n-k}}\mathbf{1}_K(v)d\lambda_n(v)}{\lambda_k(K_m)}$$
$$=\frac{\int_{K_m\times\mathbb{R}^{n-k}}\mathbf{1}_K(P(v))d\lambda_n(v)}{\lambda_k(K_m)}+\frac{\int_{K_m\times\mathbb{R}^{n-k}}\mathbf{1}_K(v)-\mathbf{1}_K(P(v))d\lambda_n(v)}{\lambda_n((K_m\times\mathbb{R}^{n-k})\cap K)}\frac{\lambda_n((K_m\times\mathbb{R}^{n-k})\cap K)}{\lambda_k(K_m)} \tag{5.3.3}$$

Zauważmy, że

$$\frac{\lambda_n((K_m\times\mathbb{R}^{n-k})\cap K)}{\lambda_k(K_m)}\leqslant\frac{\lambda_n(K_m\times P_{n-k}(K))}{\lambda_k(K_m)}=\lambda_{n-k}(P_{n-k}(K)),$$

gdzie P_{n-k} to rzut prostopadły na $\mathbb{R}^{n-k}$. Zatem w drugim składniku (5.3.3) drugi ułamek jest ograniczony, zaś pierwszy zbiega do zera, czego już dowodziliśmy. Co do pierwszego składnika, natomiast,

$$\frac{\int_{K_m\times\mathbb{R}^{n-k}}\mathbf{1}_K(P(v))d\lambda_n(v)}{\lambda_k(K_m)}=\int_{l\times\mathbb{R}^{n-k}}g_m(x)\mathbf{1}_K(x,y,0)d\lambda_{k-p}(x)d\lambda_{n-k}(y)$$
$$\to_{m\to\infty}\int_{l\times\mathbb{R}^{n-k}}g(x)\mathbf{1}_K(x,y,0)d\lambda_{k-p}(x)d\lambda_{n-k}(y)=\nu\otimes\lambda_{n-k}((K'\times\mathbb{R}^{n-k})\cap K),$$

gdzie zbieżność wynika z niemal jednostajnej zbieżności funkcji podcałkowej, co kończy dowód lematu. □

Lemat 5.3.9. *Rozważmy dobrą miarę $M=(\mu,\mathbb{R}^n,\mathcal{S})$, gdzie μ jest probabilistyczna, zaś $\mathcal{S}$ to baza standardowa $\mathbb{R}^n$, oraz trzy funkcje ciągłe — $f,g:\mathbb{R}^n\to[0,M]$ oraz $h:\mathbb{R}^n\to[\varepsilon,M]$ dla pewnych $M>\varepsilon>0$, przy czym $\{f>0\}\subset\{g>0\}$ i $\operatorname{supp}\mu\subset\operatorname{supp}g$. Załóżmy, że M,f i g spełniają dziedziczny warunek Θ. Załóżmy jeszcze, że*

$$\frac{\int_{\mathbb{R}^n_+}f(z)h(z)d\mu(z)}{\int_{\mathbb{R}^n_+}g(z)h(z)d\mu(z)}<\frac{\int_{\mathbb{R}^n_+}f(z)d\mu(z)}{\int_{\mathbb{R}^n_+}g(z)d\mu(z)}. \tag{5.3.4}$$

Wtedy istnieją takie punkty $a\leqslant b\in\mathbb{R}^n$ oraz miara log–wklęsła ν na odcinku $I=[a,b]$, że

$$\frac{\int_{\mathbb{R}^n_+}f(x)d\mu(x)}{\int_{\mathbb{R}^n_+}g(x)d\mu(x)}=\frac{\int_I f(x)d\nu(x)}{\int_I g(x)d\nu(x)}>\frac{\int_I f(x)h(x)d\nu(x)}{\int_I g(x)h(x)d\nu(x)}.$$

W szczególności h nie może być malejąca (również nieostro) po współrzędnych.

Do dowodu przyda nam się następująca definicja:

Definicja 5.3.10. *Zbiór $K\subset\mathbb{R}^2$ nazywamy* rozpiętym *na punktach a,b, jeśli K jest wypukły, zwarty, $a,b\in K$, oraz dla każdego $x\in K$ zachodzi $a\leqslant x\leqslant b$. Zbiór nazywamy rozpiętym, jeśli jest rozpięty na pewnych punktach a,b.*

Geometrycznie ta definicja mówi tyle, że K jest wypukły i jeśli na K opiszemy prostokąt o bokach równoległych do osi współrzędnych, to jego lewy dolny oraz prawy górny róg należą do K.

Dowód. Będziemy prowadzić indukcję po wymiarze. Dla $n = 0$ wszystkie funkcje są określone w jednym punkcie, i warunek (5.3.4) nie może być spełniony, czyli teza zachodzi w próżni. Dla $n = 1$ nie są nam potrzebne żadne założenia, odcinek $\operatorname{supp}\mu$ z miarą μ spełnia założenia lematu. Rozważmy wyższe n. Będę konstruował zstępujący ciąg zbiorów rozpiętych $K_0 \supset K_1 \supset \ldots$ w $\operatorname{span}\{e_1, e_2\}$ spełniających następujące cztery warunki:

$$\frac{\int_{K_i \times \mathbb{R}_+^{n-2}} f(x)d\mu(x)}{\int_{K_i \times \mathbb{R}_+^{n-2}} g(x)d\mu(x)} = \frac{\int_{\mathbb{R}_+^n} f(x)d\mu(x)}{\int_{\mathbb{R}_+^n} g(x)d\mu(x)} \tag{5.3.5}$$

$$\frac{\int_{K_i \times \mathbb{R}_+^{n-2}} \tilde{f}(x)h(x)d\mu(x)}{\int_{K_i \times \mathbb{R}_+^{n-2}} g(x)h(x)d\mu(x)} \leqslant \frac{\int_{\mathbb{R}_+^n} \tilde{f}(x)h(x)d\mu(x)}{\int_{\mathbb{R}_+^n} g(x)h(x)d\mu(x)} < \frac{\int_{\mathbb{R}_+^n} f(x)d\mu(x)}{\int_{\mathbb{R}_+^n} g(x)d\mu(x)}, \tag{5.3.6}$$

$$\bigcap_{m=0}^{\infty} K_m \text{ jest odcinkiem lub punktem,} \tag{5.3.7}$$

$$\mu(K_m \times \mathbb{R}_+^{n-2}) > 0. \tag{5.3.8}$$

Funkcja $\tilde{f}$ to drobna modyfikacja funkcji f, służąca temu, by nasz zstępujący ciąg zbiorów nie zbliżał się nadmiernie do brzegu $\operatorname{supp}\mu$. Wybierzmy M' tak, że

$$\frac{M'}{M} > \frac{\int_{\mathbb{R}_+^n} f(x)d\mu(x)}{\int_{\mathbb{R}_+^n} g(x)d\mu(x)} \tag{5.3.9}$$

oraz $\tilde{c} > 0$ tak, że

$$\frac{\tilde{c}M'M + \int_{\mathbb{R}_+^n} f(x)h(x)d\mu(x)}{\int_{\mathbb{R}_+^n} g(x)h(x)d\mu(x)} < \frac{\int_{\mathbb{R}_+^n} f(x)d\mu(x)}{\int_{\mathbb{R}_+^n} g(x)d\mu(x)}. \tag{5.3.10}$$

Niech $A_t := (\mathbb{R}_+^n \setminus \operatorname{supp}\mu) + t \operatorname{Int} B_2^n$, czyli zbiór punktów, które o mniej niż t są odległe od brzegu $\operatorname{supp}\mu$. Dobierzmy teraz $\varepsilon > 0$ tak, żeby $\mu(A_\varepsilon) < \tilde{c}$. Niech Δf będzie taką funkcją ciągłą, która na $A_{\varepsilon/2}$ jest równa M', na $\mathbb{R}_+^n \setminus A_\varepsilon$ jest równa zero i jest ograniczona z dołu przez zero, a z góry przez M' (taka funkcja istnieje np. z Lematu Urysohna). Wtedy $\tilde{f} := f + \Delta f$. Zauważmy, że druga nierówność warunku (5.3.6) jest spełniona na mocy (5.3.10), oraz że jeśli zbiór L jest zawarty w $A_{\varepsilon/2}$ to na mocy (5.3.9) spełniona jest nierówność

$$\frac{\int_L \tilde{f}(x)h(x)d\mu(x)}{\int_L g(x)h(x)d\mu(x)} > \frac{\int_{\mathbb{R}_+^n} \tilde{f}(x)h(x)d\mu(x)}{\int_{\mathbb{R}_+^n} g(x)h(x)d\mu(x)}.$$

Jako K_0 możemy przyjąć dowolny prostokąt $\operatorname{span}\{e_1, e_2\}$ o bokach równoległych do osi współrzędnych (tj. e_1 i e_2) zawierający rzut $\operatorname{supp}\mu$ na $\operatorname{span}\{e_1, e_2\}$. Ustawmy wszystkie punkty o obydwu współrzędnych wymiernych w ciąg $(q_i)_{i=1}^\infty$. Mając K_m będziemy chcieli skonstruować K_{m+1}. Niech O_m będzie pierwszym punktem z ciągu (q_i), który jest zawarty we wnętrzu K_m (na mocy (5.3.8) K_m jest zbiorem wypukłym o dodatniej mierze, a zatem ma niepuste wnętrze i zawiera jakiś punkt o współrzędnych wymiernych we wnętrzu). Poprowadźmy przez O_m prostą pionową (tj. równoległą do e_2), przez K_E oznaczmy część K_m leżącą na prawo od tej prostej, zaś przez K_W — część leżącą na lewo. Udowodnimy dalej Lemat 5.3.11, który pokaże, że przy założeniach lematu zachodzi

$$\frac{\int_{K_W \times \mathbb{R}_+^{n-2}} f(x)d\mu(x)}{\int_{K_W \times \mathbb{R}_+^{n-2}} g(x)d\mu(x)} \geqslant \frac{\int_{K_E \times \mathbb{R}_+^{n-2}} f(x)d\mu(x)}{\int_{K_E \times \mathbb{R}_+^{n-2}} g(x)d\mu(x)},$$

jeśli obie strony są określone. Jeśli któraś nie jest (powiedzmy K_E), to $(K_E \times \mathbb{R}_+^{n-2}) \cap \operatorname{supp} \mu$ jest miary zero, zatem przyjmujemy $K_{m+1} = K_W$ — wszystkie całki po $K_W \times \mathbb{R}_+^{n-2}$ będą równe całkom po $K_m \times \mathbb{R}_+^{n-2}$, więc skoro K_m spełniał (5.3.5), (5.3.6) i (5.3.8), to i K_W spełnia. Warunek (5.3.7) sprawdzimy na samym końcu. Załóżmy zatem, że obie strony są określone. Z tego (Fakt 2.2.2) wynika, że

$$\frac{\int_{K_E \times \mathbb{R}_+^{n-2}} f(x) d\mu(x)}{\int_{K_E \times \mathbb{R}_+^{n-2}} g(x) d\mu(x)} \leqslant \frac{\int_{K_m \times \mathbb{R}_+^{n-2}} f(x) d\mu(x)}{\int_{K_m \times \mathbb{R}_+^{n-2}} g(x) d\mu(x)} = \frac{\int_{\mathbb{R}_+^n} f(x) d\mu(x)}{\int_{\mathbb{R}_+^n} g(x) d\mu(x)}.$$

Analogicznie, po poprowadzeniu przez O_m prostej poziomej, dzielącej K_m na część górną K_N oraz dolną K_S z Lematu 5.3.11 dostaniemy

$$\frac{\int_{K_S \times \mathbb{R}_+^{n-2}} f(x) d\mu(x)}{\int_{K_S \times \mathbb{R}_+^{n-2}} g(x) d\mu(x)} \geqslant \frac{\int_{\mathbb{R}_+^n} f(x) d\mu(x)}{\int_{\mathbb{R}_+^n} g(x) d\mu(x)},$$

znowu mogę założyć, że lewa strona jest określona.

Jeśli w sposób ciągły będziemy obracać prostą przechodzącą przez O_m od pozycji pionowej do poziomej zgodnie z ruchem wskazówek zegara i dzielić K_m na dwie części K_+ i K_-, to całki $\int_{K_+ \times \mathbb{R}_+^{n-2}} f(x) d\mu(x)$ oraz $\int_{K_+ \times \mathbb{R}_+^{n-2}} g(x) d\mu(x)$ będą zmieniały się w sposób ciągły. Jeśli dla jakiejkolwiek pośredniej pozycji prostej druga z tych całek będzie zerem, to przyjmujemy $K_{m+1} = K_-$. Jeśli nie, to ich iloraz zmienia się w sposób ciągły. Dla prostej pionowej $K_+ = K_E$, czyli iloraz jest nie większy niż dla całego K_m. Dla prostej poziomej $K_+ = K_S$, czyli iloraz jest nie mniejszy niż dla całego K_m. Zatem z własności Darboux istnieje podział K_m na dwa zbiory K_+ i K_-, z których obydwa spełniają (5.3.5) i (5.3.8). Obydwa te zbiory są zbiorami rozpiętymi.

Zauważmy, że jeden z tych zbiorów musi spełniać warunek (5.3.6) — gdyby obydwa nie spełniały, to ich suma, czyli zbiór K_m, też by go nie spełniał. Niech K_{m+1} będzie takim zbiorem (oczywiście może tu istnieć spora dowolność wyboru).

Oczywiście $K_{m+1} \subset K_m$ oraz K_{m+1} jest zbiorem rozpiętym.

Teraz zajmijmy się warunkiem (5.3.7). Zauważmy, że jeśli jakiś punkt q wykorzystamy jako punkt O_m, to będzie on leżał na brzegu zbioru K_{m+1}, a zatem nie będzie należał do wnętrza żadnego K_l dla $l > m$, czyli nie będzie ponownie wykorzystany jako O_l dla $l > m$. Będziemy dowodzić, że we wnętrzu $K_\infty := \bigcap_{m=0}^{\infty} K_m$ nie leży żaden punkt o obydwu współrzędnych wymiernych. Załóżmy przeciwnie. Wtedy istnieje punkt o obydwu współrzędnych wymiernych, który w szczególności należy do wnętrza każdego ze zbiorów K_m. Niech q_{i_0} będzie pierwszym takim punktem w ciągu (q_i), zaś niech m_0 będzie takie, że we wnętrzu K_{m_0} nie znajdują się punkty $q_1, q_2, \ldots, q_{i_0-1}$. Wtedy jednak O_{m_0+1} będzie równe q_{i_0}, co przeczy definicji q_{i_0}. Zatem we wnętrzu K_∞ nie znajduje się żaden punkt o współrzędnych wymiernych. Do tego K_∞ jest zbiorem wypukłym, jako przecięcie rodziny zbiorów wypukłych, a zatem jest odcinkiem lub punktem (gdyby zawierało trzy punkty afinicznie niezależne, to zawierałoby też ich uwypuklenie, a w nim punkt o współrzędnych wymiernych).

Rozważmy zbiór $(K_\infty \times \mathbb{R}^{n-2}) \cap \operatorname{supp} \mu$. Zauważmy, że wszystkie K_m spełniały w szczególności warunek (5.3.6), a zatem na mocy definicji $\tilde{f}$ żadne z nich nie było zawarte w $A_{\varepsilon/2}$, a zatem K_∞ nie może zawierać się w $A_{\varepsilon/2}$ — istnieje w nim więc punkt leżący we wnętrzu $\operatorname{supp} \mu$. Niech H będzie minimalną podprzestrzenią afiniczną zawierającą $K_\infty \times \mathbb{R}^{n-2}$. Niech l będzie podprzestrzenią afiniczną rozpiętą przez K_∞ (a zatem prostą lub punktem). Zastosujmy Lemat 5.3.8 przyjmując $K' = K_\infty$ i $k = 2$. Otrzymujemy pewien podciąg m_i oraz miarę log–wklęsłą ν na l o nośniku K_∞. Funkcje f, g, h i gęstość μ są ciągłe na $\operatorname{supp} \mu$, zatem wszystkie całki po $K_{m_i} \times \mathbb{R}^{n-2}$ w warunku (5.3.4) zbiegają do odpowiednich całek po $K_\infty \times \mathbb{R}^{n-2}$, a zatem (na mocy (5.3.6)) warunek (5.3.4) zachodzi dla H. Miara na H powstała przez obcięcie gęstości μ

do H i przemnożenie jej przez gęstość ν jest potomkiem miary μ (H możemy zadać równaniem $e_1 = ae_2 + b$ lub $e_2 = ae_1 + b$, bo K_∞ jest zbiorem rozpiętym), a zatem jest dobrą miarą i dziedziczny warunek Θ dla obcięć f i g do H jest spełniony trywialnie. Zatem, na mocy założenia indukcyjnego, w H istnieje odcinek I i miara ν jak w tezie lematu — ale ten odcinek i miara w trywialny sposób również spełniają tezę lematu dla $\mathbb{R}^n$, co na mocy indukcji kończy dowód w ogólnym przypadku.

Gdyby h była malejąca po współrzędnych, to obcinając f, g i h do I otrzymalibyśmy sprzeczność z Lematem 2.2.3 – f/g jest funkcją malejącą na I (to warunek Θ), h jest malejąca na I, zatem nierówność (5.3.4) nie może zachodzić. $\square$

Do zakończenia dowodu potrzebujemy jeszcze Lematu 5.3.11, który opisuje, jak zachowuje się proporcja całek f i g przy założeniu dziedzicznej własności Θ, gdy rozpięty zbiór podzielimy na pół poziomą lub pionową linią:

Lemat 5.3.11. *Niech M, f i g będą jak w założeniach Lematu 5.3.9. Niech s będzie gęstością μ. Niech K będzie zbiorem rozpiętym w $\operatorname{span}\{e_1, e_2\}$ i takim, że $\mu(K \times \mathbb{R}^{n-2}) > 0$. Niech $K_x = K \cap \{v : \langle e_1, v\rangle = x\}$ będzie przecięciem zbioru K z pionową prostą. Niech*

$$\Theta(x) = \frac{\int_{K_x \times \mathbb{R}^{n-2}} f(v)s(v)d\lambda_{n-1}(v)}{\int_{K_x \times \mathbb{R}^{n-2}} g(v)s(v)d\lambda_{n-1}(v)}.$$

Wtedy $\Theta(x)$ jest malejąca na swojej dziedzinie. W szczególności, jeśli prosta $\langle e_1, v\rangle = x_0$ dzieli K na dwie części, $K_- = \{v \in K : \langle e_1, v\rangle \leqslant x_0\}$ i $K_+ = \{v \in K : \langle e_1, v\rangle \geqslant x_0\}$, to

$$\frac{\int_{K_- \times \mathbb{R}^{n-2}} f(v)d\mu(v)}{\int_{K_- \times \mathbb{R}^{n-2}} g(v)d\mu(v)} \geqslant \frac{\int_{K_+ \times \mathbb{R}^{n-2}} f(v)d\mu(v)}{\int_{K_+ \times \mathbb{R}^{n-2}} g(v)d\mu(v)},$$

o ile obie strony są określone.

Dowód. Z własności Θ dla dowolnego y_0 funkcja

$$x \mapsto \frac{\int_{\{x\}\times\{y_0\}\times\mathbb{R}^{n-2}} f(v)s(v)d\lambda_{n-2}(v)}{\int_{\{x\}\times\{y_0\}\times\mathbb{R}^{n-2}} g(v)s(v)d\lambda_{n-2}(v)}$$

jest malejąca tam, gdzie jest dobrze określona. Nośnik s jest wypukły, K również jest wypukły, $\operatorname{supp} g \supset \operatorname{supp} s$, a zatem dziedziną tej funkcji jest odcinek. Zatem na mocy Lematu 2.2.3, 2a, otrzymujemy

$$\frac{\int_{\{x\}\times[y_a,y_b]\times\mathbb{R}^{n-2}} f(v)s(v)d\lambda_{n-1}(v)}{\int_{\{x\}\times[y_a,y_b]\times\mathbb{R}^{n-2}} g(v)s(v)d\lambda_{n-1}(v)} \geqslant \frac{\int_{\{x\}\times[y_c,y_d]\times\mathbb{R}^{n-2}} f(v)s(v)d\lambda_{n-1}(v)}{\int_{\{x\}\times[y_c,y_d]\times\mathbb{R}^{n-2}} g(v)s(v)d\lambda_{n-1}(v)},$$

o ile $y_a < y_b < y_d$ i $y_a < y_c < y_d$ i obydwie strony są dobrze określone.

Drugą potrzebną nam własnością jest to, że

$$\frac{\int_{\{x_1\}\times[y_a,y_b]\times\mathbb{R}^{n-2}} f(v)s(v)d\lambda_{n-1}(v)}{\int_{\{x_1\}\times[y_a,y_b]\times\mathbb{R}^{n-2}} g(v)s(v)d\lambda_{n-1}(v)} \geqslant \frac{\int_{\{x_2\}\times[y_a,y_b]\times\mathbb{R}^{n-2}} f(v)s(v)d\lambda_{n-1}(v)}{\int_{\{x_2\}\times[y_a,y_b]\times\mathbb{R}^{n-2}} g(v)s(v)d\lambda_{n-1}(v)},$$

o ile $x_2 > x_1$ i obydwie strony są dobrze określone. Aby to otrzymać, pomnóżmy s przez funkcję $m(x, y, v_3, v_4, \ldots, v_n) = \mathbf{1}_{y\in[y_a,y_b]}$. Miara o otrzymanej gęstości jest potomkiem μ, a zatem dziedziczny warunek Θ gwarantuje nam w szczególności

$$\frac{\int_{\{x_1\}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{n-2}} f(v)m(v)s(v)d\lambda_{n-1}(v)}{\int_{\{x_1\}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{n-2}} g(v)m(v)s(v)d\lambda_{n-1}(v)} \geqslant \frac{\int_{\{x_2\}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{n-2}} f(v)m(v)s(v)d\lambda_{n-1}(v)}{\int_{\{x_2\}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{n-2}} g(v)m(v)s(v)d\lambda_{n-1}(v)},$$

co daje tezę.

Zauważmy teraz, że skoro K jest zbiorem rozpiętym, to dla $x_2 > x_1$ mamy $K_{x_1} = \{x_1\} \times [y_a, y_b]$, $K_{x_2} = \{x_2\} \times [y_c, y_d]$ i $y_a < y_b < y_d$ i $y_a < y_c < y_d$, co daje pierwszą część tezy. Druga wynika z Lematu 2.2.3. $\square$

5.3.3 Ujemna stowarzyszoność modułów dla kul Orlicza

Pozostało nam zatem wykorzystać Lemat 5.3.9 do dowodu ujemnej stowarzyszoności modułów dla kul Orlicza. Potrzebujemy do tego pary funkcji spełniających warunek Θ.

Lemat 5.3.12. *Niech $M = (\mu, V, \mathcal{E})$ będzie dobrą miarą z gęstością s, i niech $V = W \times \mathbb{R}$, $\mathcal{E} = \mathcal{E}' \cup \{e_n\}$ będzie rozbiciem V względem $\mathcal{E}$. Niech $f(x) = s(x, z_2)$ i $g(x) = s(x, z_1)$ dla pewnych liczb $z_1 < z_2$ i $x \in W$, przy czym $\operatorname{supp} g$ jest niepusty. Niech $N = (\nu, W, \mathcal{E}')$ będzie ułożoną miarą, gdzie gęstość ν jest postaci*

$$t(x) := \mathbf{1}_{\operatorname{supp} g}(x) \prod_{i=1}^{\dim V - 1} u_i(x_i)$$

dla pewnych log–wklęsłych funkcji u_i. Wtedy N jest dobrą miarą oraz N, f i g spełniają warunek Θ.

Dowód. Niech $n = \dim V$. Wpierw sprawdźmy, że N jest dobrą miarą. Niech $(w_i)_{i=1}^n$, $(f_i)_{i=1}^n$ i m będą funkcjami potwierdzającymi, że M jest dobrą miarą. Rozważmy na W funkcje $(u_i \phi(w_i))_{i=1}^{n-1}$, $(f_i)_{i=1}^{n-1}$ oraz $x \mapsto \phi(m(x + f_n(z_1)))$, gdzie $\phi(x) = \mathbf{1}_{(0,\infty)}$. Te funkcje zadają N jako dobrą miarę.

Teraz rozważmy rozbicie $W = W_1 \oplus W_2$, niech $\dim W_1 = k$. Chcemy sprawdzić nierosnąsość funkcji

$$\frac{\int_{W_2} f(x, y) t(x, y) d\lambda_{n-k-1}(y)}{\int_{W_2} g(x, y) t(x, y) d\lambda_{n-k-1}(y)}$$

po współrzędnych. Oczywiście wystarczy zmieniać jedną współrzędną na raz, ustalając pozostałe. Zauważmy, że ustalenie współrzędnej x_i odpowiada przecięciu W podprzestrzenią $x_i = b$ i zastąpieniu M i N ich odpowiednimi potomkami (a co za tym idzie f i g ich odpowiednimi obcięciami), a zatem przez prostą indukcję po $\dim W_1$ wystarczy dowodzić dla $\dim W_1 = 1$. Bez straty ogólności możemy utożsamić W_2 z $\mathbb{R}^{n-2}$. Mamy zatem dowieść

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^{n-2}} s(x_1, y, z_1) t(x_1, y) d\lambda_{n-2}(y) \int_{\mathbb{R}^{n-2}} s(x_2, y, z_2) t(x_2, y) d\lambda_{n-2}(y) \\ &\qquad \leqslant \int_{\mathbb{R}^{n-2}} s(x_1, y, z_2) t(x_1, y) d\lambda_{n-2}(y) \int_{\mathbb{R}^{n-2}} s(x_2, y, z_1) t(x_2, y) d\lambda_{n-2}(y). \end{aligned} \tag{5.3.11}$$

Użyjemy tej samej sztuczki, co w dowodzie Twierdzenia 5.2.1. Zauważmy,

$$s(x_i, y, z_j) = m(f_1(x_i) + f_2(y_1) + \ldots + f_{n-1}(y_{n-2}) + f_n(z_j)) w_1(x_i) w_n(z_j) \prod_{i=2}^{n-1} w_i(y_{i-1}),$$

w nierówności (5.3.11) wyrażenia $w_1(x_i)$ oraz $w_n(z_j)$ się skracają. Analogicznie skracają się wyrażenia $u_1(x_i)$, można też usunąć składnik $\mathbf{1}_{\operatorname{supp} g}$, bo poza $\operatorname{supp} g$ wszystkie funkcje podcałkowe znikają. Rozważmy teraz miarę μ' na $\mathbb{R}_+^{n-1}$ o gęstości

$$r(y_0, y_1, \ldots, y_{n-2}) = m\Big(y_0 + f_2(y_1) + f_3(y_2) + \ldots + f_{n-1}(y_{n-2})\Big) \prod_{i=1}^{n-2} w_{i+1}(y_i) u_{i+1}(y_i).$$

Ta gęstość jest log–wklęsła, bo złożenie rosnącej funkcji wypukłej z funkcją wypukłą jest wypukłe i iloczyn funkcji log–wklęsłych jest log–wklęsły. Niech $P_x = \int_{\mathbb{R}^{n-2}} r(x, v) d\lambda_{n-2}(v)$. Z log–wklęsłości miary μ' mamy $P_x^t P_y^{1-t} \leqslant P_{tx+(1-t)y}$. Niech $a = f_1(x_1) + f_n(z_1)$, $b = f_1(x_2) - f_1(x_1)$ i $c = f_n(z_2) - f_n(z_1)$. W szczególności zatem mamy

$$P_a^{c/(b+c)} P_{a+b+c}^{b/(b+c)} \leqslant P_{a+b},$$

$$P_a^{b/(b+c)} P_{a+b+c}^{c/(b+c)} \leqslant P_{a+c},$$

a zatem

$$P_a P_{a+b+c} \leqslant P_{a+b} P_{a+c},$$

co dowodzi nierówności (5.3.11), a zatem tezy. □

Wniosek 5.3.13. *Jeśli zdefiniujemy M, N, f i g jak wyżej, to N, f i g spełniają dziedziczny warunek Θ.*

Dowód. Wystarczy sprawdzić, że jeśli M, N, f i g spełniają założenia Lematu 5.3.12, zaś N' jest synem N, to istnieje taka dobra miara M', że obcięcia f i g do przestrzeni N' powstają z M' jak w Lemacie 5.3.12. Jeśli N' jest synem powstałym przez domnożenie gęstości przez funkcję log–wklęsłą, to $M = M'$, N ciągle jest gęstością produktową log–wklęsłą, zatem M, N', f i g spełniają założenia. Jeśli N' powstaje przez przecięcie W podprzestrzenią zadaną równaniem $x_i = ax_j + b$, to za M' możemy wziąć syna M powstałego przez przecięcie V podprzestrzenią zadaną tym samym równaniem. □

Teraz będziemy dowodzić, że dobre miary spełniają własność słabej ujemnej stowarzyszoności modułów:

Lemat 5.3.14. *Niech $N = (\mu, V, \mathcal{E})$ będzie dobrą miarą z gęstością s, i niech $V = W \times \mathbb{R}$, $\mathcal{E} = \mathcal{E}' \cup \{e_n\}$ będzie rozbiciem V względem $\mathcal{E}$. Niech $A \subset W_+$ niech będzie w–zbiorem, zaś $0 < z_1 < z_2$. Niech $M = (\nu, W, \mathcal{E})$ będzie ułożoną miarą z gęstością produktową log–wklęsłą t. Wtedy zachodzi*

$$\frac{\int_W \mathbf{1}_A(x) s(x, z_2) t(x) d\lambda_{n-1}(x)}{\int_W \mathbf{1}_A(x) s(x, z_1) t(x) d\lambda_{n-1}(x)} \geqslant \frac{\int_W \mathbf{1}_{\bar{A}} s(x, z_2) t(x) d\lambda_{n-1}(x)}{\int_W \mathbf{1}_{\bar{A}} s(x, z_1) t(x) d\lambda_{n-1}(x)}$$

o ile obydwie strony są określone, i w szczególności jeśli X jest wektorem rozłożonym według miary μ, to ciąg zmiennych $X_1, X_2, \ldots, X_n$ jest słabo ujemnie stowarzyszony.

Dowód. Jeśli uda się dowieść pierwszej części tezy, to biorąc za ν miarę Lebesgue'a na W z Lematu 2.2.3 otrzymamy

$$\mu(A \times B) \mu(\bar{A} \times \bar{B}) \leqslant \mu(A \times \bar{B}) \mu(\bar{A} \times B)$$

dla dowolnego w–zbioru $B \subset \mathbb{R}$, co daje tezę.

Załóżmy zatem, że teza nie zachodzi, czyli, że (stosując Fakt 2.2.2, by zamienić $\mathbf{1}_{\bar{A}}$ na 1)

$$\frac{\int_W \mathbf{1}_A(x) s(x, z_1) t(x) d\lambda_{n-1}(x)}{\int_W \mathbf{1}_A(x) s(x, z_2) t(x) d\lambda_{n-1}(x)} < \frac{\int_W s(x, z_1) t(x) d\lambda_{n-1}(x)}{\int_W s(x, z_2) t(x) d\lambda_{n-1}(x)}. \tag{5.3.12}$$

Chcielibyśmy użyć Lematu 5.3.9. Rolę f będzie pełnić $s(x, z_2)$, rolę g — funkcja $s(x, z_1)$ zaś rolę h — funkcja $\mathbf{1}_A$. Do tego w szczególności potrzeba, aby $s(x, z_1), s(x, z_2)$ i $\mathbf{1}_A$ były ciągłe, oraz $\mathbf{1}_A$ była ograniczona jednostajnie z dołu. Skoro jednak zachodzi ostra nierówność (5.3.12), to będzie zachodzić również przy wystarczająco drobnej modyfikacji funkcji s i $\mathbf{1}_A$. Wpierw zatem przybliżmy m od góry przez malejący ciąg funkcji ciągłych, log–wklęsłych i z maksimum w zerze m_k, który zbiega punktowo do m. Wtedy $s_k(x, z_i)$ zbiega monotonicznie do $s(x, z_i)$, zatem wszystkie całki w nierówności (5.3.12) zbiegają i możemy wybrać takie k, że dla s_k nierówność (5.3.12) ciągle zachodzi. Analogicznie możemy przybliżyć f_i od dołu przez ciągłe funkcje Younga (tj. takie, które nie mają skoku do ∞). Wtedy s ciągle będzie gęstością dobrej miary, zaś f i g będą ciągłe i $\operatorname{supp} f \subset \operatorname{supp} g$ (bo $f \leqslant g$, jako, że i funkcje Younga i m są rosnące). Analogicznie przybliżamy h od góry przez ciąg funkcji ciągłych, malejących po współrzędnych, ograniczonych z dołu na przez ε, zbieżny punktowo do $\mathbf{1}_A$, i zastępujemy $\mathbf{1}_A$ przez wystarczająco daleki wyraz tego ciągu. Zakładamy, że po wszystkich modyfikacjach nierówność (5.3.12) z funkcją h zamiast $\mathbf{1}_A$ wciąż zachodzi.

Po tych modyfikacjach zachodzą założenia Lematu 5.3.9 (dziedziczny warunek Θ jest spełniony na mocy Wniosku 5.3.13, bo s po modyfikacjach wciąż jest gęstością dobrej miary, zaś warunek (5.3.4) to po prostu nierówność (5.3.12). Zatem zachodzi teza Lematu 5.3.9. Ale h jest malejąca po współrzędnych z założenia. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że nierówność (5.3.12) nie może zachodzić, zatem musi zachodzić teza naszego Lematu. □

Zauważmy, że z powyższego lematu, po przeniesieniu stronami i zamienieniu $\mathbf{1}_{\bar{A}}$ na $1 = \mathbf{1}_{\bar{A}} + \mathbf{1}_A$ dostajemy w szczególności, że funkcja

$$\frac{\int_{\mathbb{R}^k} \mathbf{1}_A(x)s(x,z)dx}{\int_{\mathbb{R}^k} s(x,z)dx}$$

jest malejąca po współrzędnych jako funkcja z dla dowolnego w–zbioru $A \subset \mathbb{R}^k$ i dobrej miary μ na $\mathbb{R}^n$. Analogicznie jak Wniosek 5.3.13 możemy zatem otrzymać

Wniosek 5.3.15. *Rozważmy M, N, i A zdefiniowane jak powyżej. Wtedy miara ułożona M oraz funkcje $\int_W \mathbf{1}_A(x)s(x,z_1)t(x)d\lambda_{n-1}(x)$ i $\int_W s(x,z_1)t(x)d\lambda_{n-1}(x)$ spełniają dziedziczny warunek Θ.*

Teraz możemy już dowieść podstawowej nierówności w pełnej ogólności:

Lemat 5.3.16. *Niech μ będzie dobrą miarą na $\mathbb{R}^n_+$, $A \subset \mathbb{R}^k_+$ i $B \subset \mathbb{R}^{n-k}_+$ niech będą w–zbiorami. Wtedy zachodzi*

$$\mu(A \times B)\mu(\bar{A} \times \bar{B}) \leqslant \mu(A \times \bar{B})\mu(\bar{A} \times B). \tag{5.3.13}$$

Dowód będzie prawie identyczny do dowodu Lematu 5.3.14:

Dowód. Niech s będzie gęstością miary μ. Chcemy dowieść nierówności (5.3.13), możemy równoważnie dowodzić

$$\frac{\int_{\mathbb{R}^{n-k}} \mathbf{1}_B(x) \int_{\mathbb{R}^k} \mathbf{1}_A(y)s(x,y)dydx}{\int_{\mathbb{R}^{n-k}} \mathbf{1}_B(x) \int_{\mathbb{R}^k} s(x,y)dydx} = \frac{\mu(A \times B)}{\mu(\mathbb{R}^k \times B)} \leqslant \frac{\mu(A \times \mathbb{R}^{n-k})}{\mu(\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k})} = \frac{\int_{\mathbb{R}^{n-k}} \int_{\mathbb{R}^k} \mathbf{1}_A(y)s(x,y)dydx}{\int_{\mathbb{R}^{n-k}} \int_{\mathbb{R}^k} s(x,y)dydx}.$$

Będziemy chcieli znowu skorzystać z Lematu 5.3.9. Załóżmy zatem, że zachodzi przeciwna nierówność. Rolę funkcji h przejmie funkcja $\mathbf{1}_B$, podobnie jak w Lemacie 5.3.14 możemy ją zastąpić przez jej ciągłe, ograniczone od dołu i malejące po współrzędnych przybliżenie. Definiujemy $f(x) = \int_{\mathbb{R}^k} \mathbf{1}_A(y)s(x,y)dy$ i $g(x) = \int_{\mathbb{R}^k} s(x,y)dy$. Aproksymując m, f_i oraz $\mathbf{1}_B$ przez funkcje ciągłe tak, jak w 5.3.14 dostaniemy ciągłe modyfikacje funkcji f i g, dla których wciąż zachodzi (5.3.4). Dziedziczny warunek Θ zachodzi na mocy Wniosku 5.3.15. Jednak nasza funkcja h jest malejąca po współrzędnych, co daje sprzeczność z Lematem 5.3.9. Otrzymana sprzeczność pokazuje, że nierówność (5.3.13) musi zachodzić, co kończy dowód. □

Z powyższego natychmiast wynika główne Twierdzenie tego rozdziału:

Twierdzenie 5.3.17. *Niech f_i będą funkcjami Younga, zaś m — dowolną funkcją log–wklęsłą z $\mathbb{R}_+$ w $\mathbb{R}$ o maksimum w zerze. Załóżmy, że miara z gęstością $m(\sum f_i(|x_i|)$ jest probabilistyczna. Niech X będzie wektorem losowym rozłożonym według tej miary. Wtedy ciąg $|X_1|, |X_2|, \ldots, |X_n|$ jest ujemnie stowarzyszony.*

W szczególności oczywiście otrzymujemy ujemną stowarzyszoność modułów dla wektora losowego rozłożonego jednostajnie na uogólnionej kuli Orlicza.

Bibliografia

[1] G. E. Andrews, R. Askey i R. Roy, *Special functions*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 71, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

[2] M. Anttila, K. Ball i I. Perissinaki, *The central limit problem for convex bodies*, Trans. Amer. Math. Soc. 355 (2003), 4723–4735.

[3] S. Artstein-Avidan, B. Klartag i V. Milman, *The Santaló point of a function, and a functional form of the Santaló inequality*, Mathematika 51 (2004), 33–48.

[4] K. Ball i I. Perissinaki, *The subindependence of coordinate slabs in ℓ_p^n balls*, Israel J. Math., 107 (1998), 289–299.

[5] R. E. Barlow, A. W. Marshall i F. Proschan, *Properties of probability distributions with monotone hazard rate*, Ann. Math. Statist. 34 (1963), 375–389.

[6] F. Barthe, O. Guedon, S. Mendelson i A. Naor, *A probabilistic approach to the geometry of the l_p^n-ball*, Ann. Probab. 33 (2005), 480–513.

[7] S. G. Bobkov, *Isoperimetric and analytic inequalities for log-concave probability measures*, Ann. Probab. 27 (1999), 1903–1921.

[8] S. G. Bobkov i C. Houdré, *Isoperimetric constants for product probability measures*, Ann. Probab. 25 (1997), 184–205.

[9] S. G. Bobkov i C. Houdré, *Some connections between isoperimetric and Sobolev-type inequalities*, Mem. Amer. Math. Soc. 129 (1997), no. 616.

[10] S. G. Bobkov i F. L. Nazarov, *On convex bodies and log-concave probability measures with unconditional basis*, Geometric aspects of functional analysis, 53–69, Lecture Notes in Math., 1807, Springer, Berlin, 2003.

[11] C. Borell, *Convex measures on locally convex spaces*, Ark. Mat. 12 (1974), 239–252.

[12] C. Borell, *Convex set functions in d-space*, Period. Math. Hungar. 6 (1975), 111–136.

[13] C. Borell, *The Brunn-Minkowski inequality in Gauss space*, Invent. Math. 30 (1975), 207–216.

[14] H. Brunn, *Über Ovale und Eiflächen*, dysertacja, Monachium (1887)

[15] J.-D. Deuschel i D. W. Stroock, *Large deviations*, Pure and Applied Mathematics, 137, Academic Press, Inc., Boston, MA, 1989.

[16] B. Fleury, O. Guedon, G. Paouris, *A stability result for mean width of L_p-centroid bodies*, Advances in Mathematics 214 (2007), 865–877.

[17] B. Fleury, *Between Paouris concentration inequality and variance conjecture*, preprint.

[18] R. J. Gardner, *The Brunn-Minkowski Inequality*, Bull. Amer. Math. Soc. 39 (2002), 355–405.

[19] A. A. Giannopoulos, *Notes on isotropic convex bodies*, Instytut Matematyki Polskiej Akademii Nauk, Warszawa, dostępne na http://users.uoa.gr/ ∼apgiannop/isotropic-bodies.ps.

[20] N. Gozlan, *Characterization of Talagrand's like transportation-cost inequalities on the real line*, J. Funct. Anal. 250 (2007), 400–425.

[21] D. Hensley, *Slicing convex bodies – bounds for slice area in terms of the body's covariance*, Proc. Amer. Math. Soc. 79 (1980), 619–625.

[22] R. Kannan, L. Lovász i M. Simonovits, *Isoperimetric problems for convex bodies and a localization lemma*, Discrete Comput. Geom. 13 (1995), 541–559.

[23] B. Klartag, *A central limit theorem for convex sets*, Invent. Math. 168 (2007), 91–131.

[24] B. Klartag, *Power-law estimates for the central limit theorem for convex sets*, J. Funct. Anal. 245 (2007), 284–310.

[25] B. Klartag, *A Berry-Esseen type inequality for convex bodies with an unconditional basis*, preprint, dostępne na arXiv:math/0705.0832, ma się ukazać w Prob. Ther. Rel. Fields.

[26] B. Klartag i V. D. Milman,*Geometry of log-concave functions and measures*, Geom. Dedicata 112 (2005), 169–182.

[27] S. Kwapień. R. Latała i K. Oleszkiewicz, *Comparison of moments of sums of independent random variables and differential inequalities*, J. Funct. Anal. 136 (1996), 258–268.

[28] S. Kwapień i W. Woyczyński, *Random series and stochastic integrals: single and multiple*, Birkhäuser, Boston, 1992.

[29] R. Latała i J. O. Wojtaszczyk, *On the infimum convolution inequality*, przyjęte do druku w Studia Mathematica, dostępne an arXiv:math/0801.4036v1.

[30] E. Lutvak i G. Zhang, *Blaschke–Santaló inequalities*, J. Differential Geom. 47 (1997), 1–16.

[31] G.G. Magaril-llyaev i V.M. Tikhomirov, *Convex analysis: theory and applications*, Translations of Mathematical Monographs, 222, American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.

[32] B. Maurey, *Some deviation inequalities,* Geom. Funct. Anal. 1 (1991), 188–197.

[33] E. Meckes i M. Meckes, *The Central Limit Problem for Random Vectors with Symmetries*, J. Theoret. Probab. 20 (2007), 697–720. H

[34] E. Milman, *On the role of Convexity in Isoperimetry, Spectral-Gap and Concentration*, dostępne na arXiv:math/0712.4092v4.

[35] E. Milman i S. Sodin, *An isoperimetric inequality for uniformly log-concave measures and uniformly convex bodies*, J. Funct. Anal. 254 (2008), 1235–1268.

[36] V. D. Milman i A. Pajor, *Isotropic position and inertia ellipsoids and zonoids of the unit ball of a normed n-dimensional space*, Lecture Notes in Mathematics 1376 (1989), 64–104.

[37] V. Milman i G. Schechtman, *Asymptotic theory of finite-dimensional normed spaces. With an appendix by M. Gromov*, Lecture Notes in Math. 1200 (1986).

[38] H. Minkowski, *Geometrie der Zahlen*, Leipzig: Teubner (1896)

[39] A. Naor, The Surface Measure and Cone Measure on the Sphere of ℓ_p^n, Transactions of the American Mathematical Society 359 (2007), 1045–1079.

[40] G. Paouris, *Concentration of mass on convex bodies*, Geom. Funct. Anal. 16 (2006), 1021–1049.

[41] M. Pilipczuk i J. O. Wojtaszczyk, *The negative association property for the absolute values of random variables equidistributed on a generalized Orlicz ball*, Positivity 12 (2008).

[42] A. Prekopa, *On logarithmic concave measures and functions*, Acta Sci. Math.(Szeged) 34 (1973), 335–343.

[43] Q. M. Shao, *A comparison theorem on moment inequalities between negatively associated and independent random variables,* J. Theoret. Probab. 13 (2000), 343–356.

[44] Q. M. Shao, *The law of the iterated logarithm for negatively associated random variables*, Stochastic Processes & Appl. 83 (1999), 139–148.

[45] S. Sodin, *An isoperimetric inequality on the l_p balls*, Annales de l'Institut Henri Poincaré - Probabilités et Statistiques 44 (2008), 362–373.

[46] V.N. Sudakov i B. S. Tsirel'son, *Extremal properties of half-spaces for spherically invariant measures* (po rosyjsku), Zap. Nauchn. Sem. L.O.M.I. 41 (1974), 14–24.

[47] M. Talagrand, *A new isoperimetric inequality and the concentration of measure phenomenon*, Israel Seminar (GAFA), Lecture Notes in Math. 1469 (1991), 94–124.

[48] J. O. Wojtaszczyk, *The square negative correlation property for generalized Orlicz balls*, Israel Seminar 2004–2005 (GAFA), Lecture Notes in Math. 1910 (2007), 305–313.