Uniwersytet Warszawski
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki

Rafał Łochowski

Oszacowania momentów i ogonów wieloliniowych form losowych

Rozprawa doktorska

Rozprawa napisana pod kierunkiem
dr. hab. Rafała Latały, profesora UW,
w Instytucie Matematyki UW

Kwiecień 2005

Oświadczenie autora rozprawy: oświadczam, że niniejsza rozprawa została napisana przeze mnie samodzielnie.

Data Podpis autora rozprawy

Oświadczenie promotora rozprawy: niniejsza rozprawa jest gotowa do oceny przez recenzentów.

Data Podpis promotora rozprawy

Streszczenie

W rozprawie udowodniono proste formuły estymujące momenty i ogony wieloliniowych form losowych (chaosów) $S = \sum a_{i_1,\ldots,i_d} X_{i_1}^{(1)} \cdots X_{i_d}^{(d)}$ generowanych przez niezależne zmienne losowe $X_i^{(r)}$.

Pierwszy rozdział zawiera wprowadzenie.

W rozdziale drugim rozważono przypadek chaosów o nieujemnych współczynnikach, generowanych przez nieujemne zmienne losowe z logarytmicznie wklęsłymi ogonami. Uzyskane szacowania są optymalne z dokładnością do stałych zależnych od rzędu chaosu d.

W trzecim rozdziale rozważano przypadek chaosów o nieujemnych współczynnikach, generowanych przez zmienne dwupunktowe. Otrzymane wyniki zastosowano w badaniu własności modelu dwumianowego grafu losowego.

W ostatnim rozdziale uogólniono wyniki Borella [3] oraz Arconesa i Giné [2], dotyczące chaosów gaussowskich, na przypadek chaosów generowanych przez dowolne symetryczne zmienne losowe z logarytmicznie wklęsłymi ogonami. Udowodniono też pewne szacowanie polegające na porównaniu momentów takich chaosów z momentami chaosów rademacherowych.

Słowa kluczowe: estymacja momentów, chaos losowy, graf losowy

Klasyfikacja tematyczna pracy według AMS Mathematical Subject Classification 2000: 60E15.

Abstract

In the thesis there are proved simple formulae for estimating tails and moments of multilinear random forms (chaoses) $S = \sum a_{i_1,\ldots,i_d} X_{i_1}^{(1)} \cdots X_{i_d}^{(d)}$ generated by independent random variables $X_i^{(r)}$.

The first chapter contains an introduction.

In the second chapter there are considered chaoses with nonnegative coefficients, generated by nonnegative random variables with logaritmically concave tails. The presented estimates are exact up to universal constants, depending only on the order d.

In the third chapter there are considered chaoses with nonnegative coefficients, generated by two-point random variables. The obtained results were applied in investigating the properties of the binomial model of the random graph.

In the last chapter there are presented generalizations of the results of Borell [3] and Arcones and Giné [2] for Gaussian chaoses. We extend these results to the case of any chaoses generated by symmetric random variables with logarithmically concave tails. There are proven also another estimates based on comparison with moments of some related Rademacher chaoses.

Key words and phrases: Moments, Random chaos, Random Graph.

AMS Mathematical Subject Classification 2000: 60E15.

Spis treści

Wstęp

Niech $X_1, X_2, ..., X_n$ będzie ciągiem (niezależnych, rzeczywistych) zmiennych losowych. Jednym z głównych zagadnień jakimi zajmuje się rachunek prawdopodobieństwa jest opisanie własności rozkładu sumy $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ w zależności od rozkładów $X_1, X_2, ..., X_n$. W ten sposób można postrzegać większość klasycznych twierdzeń rachunku prawdopodobieństwa, zarówno mocne prawo wielkich liczb jak i centralne twierdzenie graniczne.

Jednymi z podstawowych wielkości charakteryzujących rozkład zmiennej losowej są jego momenty. Bardzo ogólne twierdzenie podające proste formuły szacujące momenty S w zależności od jednowymiarowych rozkładów niezależnych zmiennych $X_1, X_2, ..., X_n$ w przypadku gdy są one dodatnie lub symetryczne (niekoniecznie o takim samym rozkładzie) podał Latała w [20].

Naturalnym uogólnieniem tej problematyki jest próba przeniesienia otrzymanych wyników dotyczących sum (lub kombinacji liniowych) zmiennych losowych na szerszą klasę funkcji tych zmiennych. Najprostszymi funkcjami wielu zmiennych, bardziej ogólnymi niż kombinacje liniowe argumentów są formy wieloliniowe. Dla niezależnych, rzeczywistych zmiennych losowych $X_i^{(r)}$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq r \leq d$, oraz dla d - wymiarowej tablicy rzeczywistych współczynników $(a_{i_1,...,i_d})_{1 \leq i_1,...,i_d \leq n}$ zdefiniujmy zmienną losową

$$S = \sum a_{i_1,...,i_d} X_{i_1}^{(1)} \cdots X_{i_d}^{(d)}.$$

Tego rodzaju zmienną S będziemy nazywali losowym chaosem rzędu d generowanym przez zmienne losowe $X_i^{(r)}$. W niniejszej pracy podejmujemy próbę szacowania momentów zmiennej S za pomocą formuł w prosty sposób zależących od jednowymiarowych rozkładów zmiennych $X_i^{(r)}$. Postawiony problem jest bardzo ogólny, trudny i nie do końca dobrze zdefiniowany (co to jest "prosta" formuła?); dlatego w pracy nad rozprawą zajęto się przypadkami, w których spodziewano się, że poszukiwane formuły "naprawdę" istnieją lub przypadkami, w których choćby częściowa odpowiedź na to jak zachowują się momenty S była istotna ze względu na zastosowania. (Całkiem niedawno - w styczniu 2005 - Latała udowodnił szacowania w trudnym przypadku chaosów generowanych przez zmienne gaussowskie.)

Omówmy pokrótce co z powyższego programu udało się zrealizować i jaka jest zawartość kolejnych rozdziałów niniejszej rozprawy.

Pierwszy rozdział zawiera podstawowe definicje i kilka pomocniczych twierdzeń.

Drugi rozdział zawiera wyniki opublikowane w pracy [23]. Udowodniono tam dwustronne oszacowania na momenty i ogony S w przypadku, gdy wszystkie współczynniki $a_{i_1,\ldots,i_d}$ są nieujemne i $X_i^{(r)}$ są dodatnimi zmiennymi losowymi z logarytmicznie wklęsłymi ogonami (precyzyjne definicje podane są dalej). Znanych jest wiele ważnych nierówności na momenty i ogony S, nawet w bardziej ogólnym przypadku U-statystyk, otrzymane jednak w [23] oszacowania są precyzyjniejsze i są optymalne z dokładnością do stałych zależnych jedynie od rzędu chaosu d.

W rozdziale trzecim zajęto się chaosami generowanymi przez zmienne $X_i^{(r)}$ o jednakowym rozkładzie dwupunktowym $P(X_i^{(r)} = 1) = 1 - P(X_i^{(r)} = 0) = \alpha \in (0;1)$. Chaosy tej postaci pojawiają się w problemie szacowania odchyleń liczby małych podgrafów w modelu dwumianowym grafu losowego. Problem ten został częściowo rozwiązany w pracy [14], niestety, optymalne oszacowania nie są dotychczas znane. Udowodnienie semihiperkontraktywnych własności zmiennych dwupunktowych pozwoliło na uzyskanie w kilku przypadkach nieco lepszych oszacowań niż te, które są zawarte w [14].

Ostatni, czwarty rozdział poświęcony jest szacowaniom momentów chaosów generowanych przez zmienne symetryczne z logarytmicznie wklęsłymi ogonami. Wydaje się, że to zagadnienie jest trudniejsze niż zagadnienia, którym poświęcono dwa poprzednie rozdziały. W czwartym rozdziale uogólnione zostały wyniki Borella [3] oraz Arconesa i Giné [2] dotyczące chaosów generowanych przez zmienne gaussowskie na chaosy generowane przez zmienne symetryczne z logarytmicznie wklęsłymi ogonami. Podano również pewne oszacowanie oparte na porównaniu z momentami chaosów generowanych przez zmienne rademacherowskie.

Podziękowania. Praca ta nie powstałaby bez pomocy i zachęty mojego Promotora, dr. hab. Rafała Latały, prof. UW. To On wskazał mi drogi poszukiwań formuł szacujących momenty chaosów gdy jeszcze nie miałem żadnego pomysłu na to, czym zająć się w pracy doktorskiej. Praca ta nie powstałaby też bez udziału prof. dr. hab. Stanisława Kwapienia, na prośbę którego prof. Latała został moim Promotorem. Wymienionym osobom pragnę serdecznie podziękować.

1 Wprowadzenie

Obecny rozdział zawiera podstawowe oznaczenia i definicje oraz kilka pomocniczych spostrzeżeń. Przytaczamy również wybrane, znane dotychczas rezultaty dotyczące dokładnego szacowania momentów i ogonów wieloliniowych form losowych.

1.1 Oznaczenia i podstawowe definicje

Zacznijmy od następującej konwencji.

Liter c oraz C będziemy używać do oznaczania uniwersalnych, dodatnich stałych, przy czym c oraz C mogą oznaczać różne stałe, w zależności od miejsca, w którym się pojawiają. Bez szkody dla ogólności naszych rozważań będziemy dodatkowo zakładać, że $c \leq 1$ oraz $C \geq 1$.

Przez $c(d), C(d)$ będziemy oznaczać dodatnie stałe zależne jedynie od d ($c(d), C(d)$ mogą również oznaczać różne stałe w różnych miejscach, i również bez szkody dla ogólności będziemy zakładać, że $c(d) \leq 1$ oraz $C(d) \geq 1$).

Relacja $A \sim B$ pomiędzy dwiema wielkościami A i B oznaczać będzie, że $cA \leq B \leq CA$.

Relacja $A \sim_d B$ pomiędzy dwiema wielkościami A i B oznaczać będzie, że $c\,(d)\,A \leq B \leq C\,(d)\,A$.

Dla rzeczywistej zmiennej losowej Y i $p > 0$ przez $\|Y\|_p$ oznaczać będziemy p-ty moment zmiennej Y, tzn.

$$\|Y\|_p := \left(E\,|Y|^p\right)^{1/p}.$$

Przejdźmy do definicji.

Definicja 1 *Niech d i n będą dodatnimi liczbami całkowitymi i niech $X_i^{(r)}, 1 \leq i \leq n, 1 \leq r \leq d$, będą niezależnymi zmiennymi losowymi określonymi na tej samej przestrzeni probabilistycznej i przyjmującymi wartości rzeczywiste. Niech dana będzie także n^d - wymiarowa tablica liczb rzeczywistych $\left(a_{i_1,i_2,\ldots,i_d}\right)_{1\leq i_1,i_2,\ldots,i_d\leq n}$.* Chaosem losowym *rzędu d generowanym przez zmienne losowe $X_i^{(r)}$, o współczynnikach $a_{i_1,i_2,\ldots,i_d}$, będziemy nazywali następującą wieloliniową formę losową*

$$S = \sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n}\ldots\sum_{i_d=1}^{n} a_{i_1,i_2,\ldots,i_d} X_{i_1}^{(1)} X_{i_2}^{(2)} \cdots X_{i_d}^{(d)}. \tag{1.1}$$

W skrócie będziemy pisać

$$S = \sum a_{i_1,\ldots,i_d} X_{i_1}^{(1)} \cdots X_{i_d}^{(d)}.$$

Znacznie częściej spotyka się wieloliniowe formy losowe, które są generowane po prostu przez ciąg niezależnych zmiennych losowych $X_1, X_2, ..., X_n$. Tego typu formy, przy naturalnych założeniach eliminujących te formy, w których niektóre zmienne występują wyższych potęgach, będziemy nazywali chaosem uzależnionym (ang. *undecoupled*). Szczegóły zawarte są w poniższej definicji.

Definicja 2 *Niech d i n będą takimi dodatnimi liczbami całkowitymi, że $d \leq n$ i niech $X_1, ..., X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi określonymi na tej samej przestrzeni probabilistycznej i przyjmującymi wartości rzeczywiste. Niech dana będzie także $\binom{n}{d}$ - wymiarowa tablica liczb rzeczywistych* $(a_{i_1,i_2,...,i_d})_{1\leq i_1<i_2<...<i_d\leq n}$. Uzależnionym chaosem losowym *rzędu d generowanym przez zmienne losowe X_i, o współczynnikach $a_{i_1,i_2,...,i_d}$, będziemy nazywali następującą wieloliniową formę losową*

$$\tilde{S} = \sum_{i_1=1}^{n-d+1} \sum_{i_2=i_1+1}^{n-d+2} ... \sum_{i_d=i_{d-1}+1}^{n} a_{i_1,i_2,...,i_d} X_{i_1} X_{i_2} \cdots X_{i_d}. \tag{1.2}$$

W skrócie będziemy pisać

$$\tilde{S} = \sum_{1\leq i_1<...<i_d\leq n} a_{i_1,...,i_d} X_{i_1} \cdots X_{i_d}.$$

Badanie wielu własności zmiennej $\tilde{S}$ można uprościć wprowadzając pojęcie uniezależnienia chaosu $\tilde{S}$. Uniezależnienie chaosu $\tilde{S}$ jest już chaosem losowym rzędu d postaci (1.1).

Definicja 3 *Dla $i = 1, 2, ..., n$ niech $\left(X_i^{(r)}\right), 1 \leq r \leq d, 1 \leq i \leq n$ będą d niezależnymi kopiami ciągu (X_i).* Uniezależnienienieniem *(ang. decoupling) chaosu (1.2) nazywamy następującą wieloliniową formę losową*

$$\tilde{S}_{dec} = \sum_{\pi} \sum_{1\leq i_1<i_2<...<i_d\leq n} a_{i_1,i_2,...,i_d} X^{(1)}_{i_{\pi(1)}} X^{(2)}_{i_{\pi(2)}} \cdots X^{(d)}_{i_{\pi(d)}},$$

gdzie pierwsze sumowanie przebiega po wszystkich permutacjach π zbioru $\{1, 2, ..., d\}$.

Z rezultatów de la Peñy i Montgomery-Smitha (zob. [5]) wynika, że momenty i ogony chaosu $\tilde{S}$ są porównywalne z momentami i ogonami $\tilde{S}_{dec}$, dokładniej, zachodzi

Twierdzenie 1 (de la Peña, Montgomery-Smith) *Dla* $t > 0, p \geq 0$ *zachodzą relacje*

$$\begin{aligned} \left\|\tilde{S}\right\|_p &\sim_d \left\|\tilde{S}_{dec}\right\|_p, \\ P\left(\left|\tilde{S}\right| \geq t\right) &\leq C(d) P\left(C(d)\left|\tilde{S}_{dec}\right| \geq t\right), \\ P\left(\left|\tilde{S}\right| \geq t\right) &\geq c(d) P\left(c(d)\left|\tilde{S}_{dec}\right| \geq t\right). \end{aligned}$$

1.2 Przejście od oszacowań momentów do oszacowań ogonów

Oszacowania na ogony nieujemnej zmiennej losowej Y często można otrzymać z oszacowań jej momentów. Górne oszacowania na ogony zmiennej Y wynikają z nierówności Czebyszewa. Jeżeli $0 < \|Y\|_p < \infty$ dla pewnego $p > 0$ to

$$P\left(Y \geq e\|Y\|_p\right) = P\left(Y^p \geq e^p EY^p\right) \leq \frac{EY^p}{e^p EY^p} = e^{-p}.$$

Dolne oszacowania na ogony można często wywnioskować z następującej nierówności Paleya - Zygmunda.

Lemat 1 (Nierówność Paleya - Zygmunda) *Jeżeli* Y *jest nieujemną zmienną losową i* $0 < EY^2 < \infty$, *to dla każdego* $t \in (0,1)$ *zachodzi*

$$P(Y \geq tEY) \geq (1-t)^2 \frac{(EY)^2}{EY^2}.$$

Dowód. Z nierówności Schwarza mamy

$$\left(EYI_{\{Y \geq tEY\}}\right)^2 \leq EY^2 P(Y \geq tEY).$$

Przekształcając powyższą nierówność, otrzymujemy

$$P(Y \geq tEY) \geq \frac{\left(EYI_{\{Y \geq tEY\}}\right)^2}{EY^2} \geq \frac{(EY - tEY)^2}{EY^2} = (1-t)^2 \frac{(EY)^2}{EY^2}.$$

■

Zdefiniujmy teraz własność semihiperkontaktywności, przydatną przy dolnych oszacowaniach ogonów.

Definicja 4 *Rzeczywista zmienna losowa* Y *ma własność* semihiperkontraktywności *rzędu* δ *ze stałą* C *począwszy od momentu* $p_0 > 0$ *jeżeli* $E|Y|^{p_0} < \infty$ *oraz dla dowolnych* $\lambda \geq 1$, $p \geq p_0$ *zachodzi nierówność*

$$\|Y\|_{\lambda p} \leq (C\lambda)^\delta \|Y\|_p.$$

Zachodzi następujące

Twierdzenie 2 *Jeżeli rzeczywista zmienna losowa* Y *ma własność semihiperkontraktywności rzędu* δ *ze stałą* C *od momentu* $p_0 \geq 1$, *to istnieje taka stała dodatnia* $c(\delta, C, p_0)$, *zależna tylko od* δ, C *i* p_0, *że dla* $p > 0$ *zachodzą następujące oszacowania*

$$\begin{aligned} P\left(|Y| \geq e\|Y\|_p\right) &\leq e^{-p}, \\ P\left(|Y| \geq c(\delta, C, p_0)\|Y\|_p\right) &\geq \min\left(c(\delta, C, p_0), e^{-p}\right). \end{aligned}$$

Dowód. Górne oszacowanie ogonów otrzymujemy natychmiast z nierówności Czebyszewa. Przejdźmy teraz do oszacowania z dołu. Dla $q \geq p_0$ z semihiperkontraktywności i z nierówności Paleya-Zygmunda otrzymujemy

$$\begin{aligned} P\left(Y \geq \frac{1}{2}\|Y\|_q\right) &= P\left(Y^q \geq \left(\frac{1}{2}\right)^q E|Y|^q\right) \geq \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^q\right)^2 \frac{(EY^q)^2}{EY^{2q}} \\ &\geq \frac{1}{4}\frac{(EY^q)^2}{(2C)^{2q\delta}(EY^q)^2} = \frac{1}{4}(2C)^{-2q\delta} \geq e^{-C_1(\delta,C)q}. \end{aligned}$$

Stąd dla $p \geq p_0 \max(1, C_1(\delta, C))$, biorąc $q = p/C_1(\delta, C)$, $c_1(\delta, C) = \frac{1}{2}(CC_1(\delta, C))^{-\delta}$, dostajemy $c_1(\delta, C)\|S\|_p \leq \frac{1}{2}\|S\|_q$ oraz

$$P\left(|S| \geq c_1(\delta, C)\|S\|_p\right) \geq P\left(|S| \geq \frac{1}{2}\|S\|_q\right) \geq e^{-C_1(\delta,C)q} = e^{-p}.$$

Dla dowolnego $p > 0$, biorąc $c(\delta, C, p_0) = \min\left(c_1(\delta, C), e^{-p_0\max(1, C_1(\delta,C))}\right)$, otrzymujemy

$$P\left(|S| \geq c(\delta, C, p_0)\|S\|_p\right) \geq \min\left(c(\delta, C, p_0), e^{-p}\right).$$

$\blacksquare$

1.3 Znane oszacowania

Znanych jest wiele ważnych nierówności na momenty i ogony chaosu S. Rzadko jednak są to oszacowania optymalne z dokładnością do stałych zależnych jedynie od rzędu d wyrażone przez wielkości deterministyczne.

Montgomery-Smith podał (por. [20]) następujące szacowanie w przypadku gdy $d = 1$ oraz niezależne zmienne rzeczywiste $X_1, ..., X_n$ mają identyczny rozkład i są nieujemne lub symetryczne:

$$\|X_1 + \cdots + X_n\|_p \sim \sup\left\{\frac{p}{s}\left(\frac{n}{p}\right)^{1/s}\|X_1\|_s : \max\left(1; \frac{p}{n}\right) \leq s \leq p\right\}.$$

Latała w [20] znacznie uogólnił wzór Montgomery-Smitha, udowadniając następujące twierdzenie.

Twierdzenie 3 (Latała) *Niech $X_1, ..., X_n$ będą niezależnymi, rzeczywistymi zmiennymi losowymi. Zdefiniujmy normę Orlicza ciągu (X_i) następująco:*

$$|||(X_i)|||_p = \inf \left\{ t > 0 : \sum \ln \left(E \left(1 + \frac{X_i}{t} \right)^p \right) \leq p \right\}.$$

Jeżeli zmienne X_i są nieujemne i $p \geq 1$ lub zmienne X_i są symetryczne i $p \geq 2$ wówczas zachodzą szacowania

$$\frac{e-1}{e^2} |||(X_i)|||_p \leq \|X_1 + ... + X_n\|_p \leq e\, |||(Y_i)|||_p .$$

Z powyższego twierdzenia wynikają np. oszacowania na momenty i ogony kombinacji liniowych niezależnych zmiennych rademacherowskich r_i. Jeżeli $p \geq 2, |a_1| \geq |a_2| \geq ... \geq |a_n|$, to

$$\|a_1 r_1 + \cdots + a_n r_n\|_p \sim \sum_{i \leq p} |a_i| + \sqrt{p} \sqrt{\sum_{i>p} a_i^2}. \tag{1.3}$$

Formuła powyższa została po raz pierwszy otrzymana przez Hitczenkę i Montgomery-Smitha [6]. Z (1.3) dostajemy natychmiast nierówność Chinczyna dla $q > p \geq 2$

$$\left\| \sum a_i r_i \right\|_q \leq C \sqrt{\frac{q}{p}} \left\| \sum a_i r_i \right\|_p . \tag{1.4}$$

We wprowadzonym przez nas języku nierówność (1.4) orzeka, że kombinacje liniowe zmiennych rademacherowskich mają własność semihiperkontraktywności rzędu $1/2$ począwszy od momentu 2.

W przypadku $d = 2$ znane precyzyjne szacowania momentów i ogonów S były uzyskane przy dodatkowych założeniach na temat rozkładów zmiennych $X_i^{(r)}$ (por. [11], [21], [24]).

W przypadku $d \geq 3$ nie znano precyzyjnych oszacowań nawet w przypadku zmiennych gaussowskich, dopiero całkiem niedawno (styczeń 2005) Latała udowodnił precyzyjne szacowania dla chaosów gaussowskich rzędu 3 (oraz z dokładnością do stałych $(\max(1, \ln p))^{d-3}$ dla chaosów rzędu $d > 3$) - por. rozdział 4.

Udowodnijmy teraz następujący

Lemat 2 *Dane są liczby $C > 0$, $q > p > 0$ i niezależne zmienne losowe $X_1, X_2, ..., X_n$ przyjmujące wartości rzeczywiste (odpowiednio: nieujemne). Jeżeli dla każdej kombinacji liniowej $\sum a_i X_i$ o rzeczywistych (nieujemnych) współczynnikach a_i zachodzi nierówność*

$$\left\|\sum a_i X_i\right\|_q \leq C \left\|\sum a_i X_i\right\|_p,$$

to dla każdej całkowitej dodatniej liczby d i chaosu $S = \sum a_{i_1,...,i_d} X_{i_1}^{(1)} \cdots X_{i_d}^{(d)}$ o rzeczywistych (nieujemnych) współczynnikach $a_{i_1,...,i_d}$ zachodzi nierówność

$$\left\|\sum a_{i_1,...,i_d} X_{i_1}^{(1)} \cdots X_{i_d}^{(d)}\right\|_q \leq C^d \left\|\sum a_{i_1,...,i_d} X_{i_1}^{(1)} \cdots X_{i_d}^{(d)}\right\|_p,$$

gdzie dla $i = 1, 2, ..., n$ zmienne $X_i^{(r)}$, $1 \leq r \leq d$, są niezależnymi kopiami zmiennej X_i.

Dowód. Zastosujemy następującą (por. [18] str. 71) nierówność Minkowskiego: Jeżeli $(S, \mathcal{S}, \mu), (T, \mathcal{T}, \nu)$ są przestrzeniami mierzalnymi, to dla każdej funkcji mierzalnej $f(s,t) : S \times T \to R$ i $q > p > 0$

$$\int_S \left(\int_T |f(s,t)|^p \nu(dt)\right)^{q/p} \mu(ds) \leq \left(\int_T \left(\int_S |f(s,t)|^q \mu(ds)\right)^{p/q} \nu(dt)\right)^{q/p}.$$

Przeprowadzimy rozumowanie indukcyjne względem rzędu d. Dla $d = 1$ teza jest jednocześnie założeniem lematu. Załóżmy, że lemat jest prawdziwy dla liczb $1, 2, ..., d-1$. Niech $E_{1,...,d-1}$ oznacza wartość oczekiwaną względem zmiennych $X_i^{(r)}, 1 \leq r \leq d-1$ zaś E_d wartość oczekiwaną względem $X_i^{(d)}$. Na mocy założenia indukcyjnego i nierówności Minkowskiego, otrzymujemy

$$\begin{aligned}
E & \left|\sum a_{i_1,...,i_d} X_{i_1}^{(1)} \cdots X_{i_d}^{(d)}\right|^q \\
&= E_d E_{1,...,d-1} \left|\sum a_{i_1,...,i_d} X_{i_1}^{(1)} \cdots X_{i_d}^{(d)}\right|^q \\
&\leq E_d C^{(d-1)q} \left(E_{1,...,d-1} \left|\sum a_{i_1,...,i_d} X_{i_1}^{(1)} \cdots X_{i_d}^{(d)}\right|^p\right)^{q/p} \\
&\leq C^{(d-1)q} \left(E_{1,...,d-1} \left(E_d \left|\sum a_{i_1,...,i_d} X_{i_1}^{(1)} \cdots X_{i_d}^{(d)}\right|^q\right)^{p/q}\right)^{q/p} \\
&\leq C^{(d-1)q} \left(E_{1,...,d-1} C E_d \left|\sum a_{i_1,...,i_d} X_{i_1}^{(1)} \cdots X_{i_d}^{(d)}\right|^p\right)^{q/p} \\
&= C^{dq} \left\|\sum a_{i_1,...,i_d} X_{i_1}^{(1)} \cdots X_{i_d}^{(d)}\right\|_p^q.
\end{aligned}$$

■

Z Lematu 2 wynika natychmiast następujący

Wniosek 1 *Jeżeli wszystkie kombinacje liniowe o rzeczywistych (odpowiednio: nieujemnych) współczynnikach zmiennych rzeczywistych (nieujemnych)* $X_i^{(r)}, 1 \leq i \leq n, 1 \leq r \leq d$, *mają własność semihiperkontraktywności rzędu* δ *począwszy od pewnego momentu* $p_0 > 0$, *to chaos* $S = \sum a_{i_1,...,i_d} X_{i_1}^{(1)} \cdots X_{i_d}^{(d)}$ *o rzeczywistych (nieujemnych) współczynnikach* $a_{i_1,...,i_d}$ *ma własność semihiperkontraktywności rzędu* $d\delta$ *począwszy również od momentu* p_0.

Z Wniosku 1 i z nierówności Chinczyna (1.4) wynika natychmiast następujące oszacowanie dla $q > p \geq 2$ i chaosu generowanego przez niezależne zmienne rademacherowskie $r_i^{(1)}, ..., r_i^{(d)}, i = 1, ..., n$,

$$\left\| \sum a_{i_1,...,i_d} r_{i_1}^{(1)} \cdots r_{i_d}^{(d)} \right\|_q \leq \left(\frac{Cq}{p} \right)^{d/2} \left\| \sum a_{i_1,...,i_d} r_{i_1}^{(1)} \cdots r_{i_d}^{(d)} \right\|_p .$$

Korzystając z Twierdzenia 1 i nierówności powyżej otrzymujemy wariant nierówności Borella (por. [2]) dla chaosu uzależnionego, generowanego przez zmienne rademacherowskie.

2 Oszacowania momentów i ogonów wielowymiarowych chaosów generowanych przez dodatnie zmienne losowe z logarytmicznie wklęsłymi ogonami

Niech $S = \sum a_{i_1,\ldots,i_d} X_{i_1}^{(1)} \cdots X_{i_d}^{(d)}$ będzie losowym chaosem rzędu d generowanym przez zmienne losowe $X_i^{(r)}$. W tym rozdziale przez cały czas będziemy zakładać, że wszystkie współczynniki $a_{i_1,\ldots,i_d}$ są nieujemne i $X_i^{(r)}$ są niezależnymi, dodatnimi zmiennymi losowymi z logarytmicznie wklęsłymi ogonami (precyzyjne definicje podane są w pierwszym podrozdziale). Znanych jest wiele ważnych nierówności na momenty i ogony S, nawet w bardziej ogólnym przypadku U-statystyk (zob. [7], [9], [12] i [15]). Otrzymane przez nas oszacowania są jednak precyzyjniejsze i są optymalne z dokładnością do multiplikatywnych stałych zależnych jedynie od rzędu d.

Optymalne szacowania momentów liniowych kombinacji (przypadek $d = 1$) niezależnych, symetrycznych, logarytmicznie wklęsłych (tzn. z logarytmicznie wklęsłymi ogonami) zmiennych losowych były uzyskane przez Głuskina i Kwapienia (cf. [10]). W pracy [21] podobne nierówności zostały podane dla chaosu rzędu 2 generowanego przez tego typu zmienne (gaussowskie chaosy rzędu 2 były rozważane znacznie wcześniej w [11]). Metody użyte w obydwu pracach mogą być adaptowane do przypadku zmiennych dodatnich (zob. [24]).

Wydaje się jednak, że istnieje zasadnicza różnica pomiędzy chaosami rzędu $d \geq 3$ oraz $d = 2$. Wydaje się, że praca [23] była pierwszym krokiem w stronę bardziej ogólnych rezultatów obejmujących przypadek $d \geq 3$. Dopiero całkiem niedawno - w styczniu 2005 - Latała udowodnił dokładne szacowania w trudnym przypadku chaosów rzędu 3 generowanych przez zmienne gaussowskie. Niniejszy rozdział zawiera wyniki opublikowane w [23]. Okazało się jednak, że narzędzia tam użyte mogą być znacznie uproszczone. W [23] używa się twierdzenia Talagranda (cf. [26], [25]) dotyczącego koncentracyjnych własności miary $\frac{1}{2}e^{-|x|}dx$, w niniejszej pracy udało się uniknąć konieczności stosowania tego twierdzenia, w rezultacie czego rozumowania stały się bardziej elementarne.

Omówmy jak zorganizowany jest niniejszy rozdział . W pierwszym podrozdziale ustalamy notację, podajemy potrzebne definicje i formułujemy główne rezultaty. Następnie, w drugim podrozdziale, dowodzimy oszacowań na momenty w przypadku jednowymiarowym. W trzecim podrozdziale indukcyjnie dowodzimy oszacowań w przypadku wielowymiarowym.

2.1 Notacja i sformułowanie wyników

Cały czas będziemy w tym rozdziale stosować tę samą konwencję dotyczącą liter c, C, $c(d)$, $C(d)$, którą sformułowaliśmy w rozdziale poprzednim.

Niech d i n będą dodatnimi liczbami całkowitymi. Przez $\mathbf{i}$ będziemy oznaczać d-wymiarowy multiindeks $(i_1, \ldots, i_d)$, gdzie $1 \le i_1, \ldots, i_d \le n$, zaś przez $\mathbf{I}$ - rodzinę takich multiindeksów.

Dla $I \subset \{1, 2, \ldots, d\}$ oraz $\mathbf{i} \in \mathbf{J} \subset \mathbf{I}$ niech $\mathbf{i}_I$ oznacza ciąg $(i_k)_{k \in I}$ i $\mathbf{J}_I$ niech będzie zbiorem wszystkich takich $\mathbf{i}_I$. Dla $I \subset \{1, 2, \ldots, d\}$ przez I' będziemy oznaczać zbiór $\{1, 2, \ldots, n\} \backslash I$. W naszej notacji na przykład mamy $\mathbf{i}_{\{1\}'} = (i_2, \ldots, i_d)$. Symbolem $\#I$ będziemy oznaczali moc zbioru I, symbolem R_+ - przedział $[0; +\infty)$.

Przez cały czas będziemy w tym rozdziale zakładać, że $X^{(1)}_{i_1}, \ldots, X^{(d)}_{i_d}$, $1 \le i_1, \ldots, i_d \le n$, są niezależnymi, dodatnimi zmiennymi losowymi z logarytmicznie wklęsłymi ogonami, tzn.

$$P\left(X_i^{(r)} \ge t\right) \quad = \quad e^{-N_i^{(r)}(t)}$$

dla $1 \le r \le d$, $1 \le i \le n$, $t \ge 0$, gdzie $N_i^{(r)} : R_+ \to R_+$ jest wypukłą, ściśle rosnącą funkcją, znormalizowaną w ten sposób, że

$$N_i^{(r)}(1) = 1. \tag{2.1}$$

Zdefiniujmy rodzinę podzbiorów R_+^n, $\left\{B^r_{\mathcal{N},p}\right\}_{1 \le r \le d}$, jak poniżej

$$B^r_{\mathcal{N},p} = \left\{ x \in R^n_+ : \sum_{i=1}^n N_i^{(r)}(x_i) \le p \;\&\; (x_i = 0 \text{ lub } x_i \ge 1) \text{ dla } i = 1, 2, \ldots, n \right\}.$$

Dla wielowymiarowej tablicy liczb rzeczywistych, $(a_\mathbf{i})_{\mathbf{i} \in \mathbf{I}}$, zdefiniujmy

$$\left\|(a_\mathbf{i})_{\mathbf{i}\in\mathbf{I}}\right\|_{\mathcal{N},u} = \sup\left\{ \sum_{\mathbf{i}\in\mathbf{I}} a_\mathbf{i} \prod_{r=1}^d \left(1 + x^{(r)}_{i_r}\right) : x^{(1)} \in B^1_{\mathcal{N},u}, \ldots, x^{(d)} \in B^d_{\mathcal{N},u} \right\}.$$

Przez S oznaczmy zmienną $S = \sum a_\mathbf{i} X^{(1)}_{i_1} \cdots X^{(d)}_{i_d}$.

Teraz jesteśmy gotowi by sformułować dwa główne twierdzenia tego rozdziału.

Twierdzenie 4 *Istnieją takie stałe $0 < c_1(d) \le C_1(d) < \infty$, zależne tylko od d, że dla dowolnego $p \ge 1$ zachodzą oszacowania*

$$c_1(d) \left\|(a_\mathbf{i})_{\mathbf{i}\in\mathbf{I}}\right\|_{\mathcal{N},p} \le \|S\|_p \le C_1(d) \left\|(a_\mathbf{i})_{\mathbf{i}\in\mathbf{I}}\right\|_{\mathcal{N},p}.$$

Twierdzenie 4 udowodnimy w ostatnim podrozdziale tego rozdziału a teraz zaprezentujemy kilka jego zastosowań i poczynimy kilka uwag. Zachodzi

Twierdzenie 5 *Istnieją stałe* $0 < c_2(d) \leq C_2(d) < \infty$, *zależne tylko od* d *i takie, że dla dowolnego* $t \geq 1$ *zachodzą oszacowania*

$$P\left(S \geq C_2(d) \left\|(a_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i}\in\mathbf{I}}\right\|_{\mathcal{N},t}\right) \leq e^{-t}$$

oraz

$$P\left(S \geq c_2(d) \left\|(a_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i}\in\mathbf{I}}\right\|_{\mathcal{N},t}\right) \geq \min\left(c_2(d), e^{-t}\right).$$

Dowód. Z Twierdzenia 4 dla $\lambda, p \geq 1$ otrzymujemy

$$\|S\|_{\lambda p} \leq C_1(d) \left\|(a_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i}\in\mathbf{I}}\right\|_{\mathcal{N},\lambda p}, \quad \left\|(a_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i}\in\mathbf{I}}\right\|_{\mathcal{N},p} \leq \frac{1}{c_1(d)}\|S\|_p.$$

Teraz wystarczy zauważyć, że $\left\|(a_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i}\in\mathbf{I}}\right\|_{\mathcal{N},\lambda p} \leq (2\lambda)^d \left\|(a_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i}\in\mathbf{I}}\right\|_{\mathcal{N},p}$ i zastosować Twierdzenie 2 z poprzedniego rozdziału. ■

Uwaga. Norma $\left\|(a_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i}\in\mathbf{I}}\right\|_{\mathcal{N},u}$ jest równoważna innej, nieco bardziej naturalnej normie $\sup\left\{\sum_{\mathbf{i}\in\mathbf{I}} a_{\mathbf{i}} \prod_{r=1}^d \left(1 + x_{i_r}^{(r)}\right) : \sum_i N_i^{(r)}(x_i^{(r)}) \leq u, r = 1, 2, \ldots, d\right\}$, zachodzą bowiem oszacowania

$$\begin{aligned}\left\|(a_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i}\in\mathbf{I}}\right\|_{\mathcal{N},u} &\leq \sup\left\{\sum_{\mathbf{i}\in\mathbf{I}} a_{\mathbf{i}} \prod_{r=1}^d \left(1 + x_{i_r}^{(r)}\right) : \sum_i N_i^{(r)}(x_i^{(r)}) \leq u, r = 1, 2, \ldots, d\right\} \\ &\leq 2^d \left\|(a_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i}\in\mathbf{I}}\right\|_{\mathcal{N},u}.\end{aligned}$$

Uwaga. Wszystkie oszacowania uzyskane w Twierdzeniach 4 i 5 mogą zostać uogólnione na przypadek, gdy funkcje $N_i^{(r)}$ są wypukłe, ale niekoniecznie ciągłe lub ściśle rosnące na R_+, np. mogą przyjmować wartość 0 na pewnym podprzedziale R_+ jak również wartość $+\infty$, począwszy od pewnego argumentu t_0 (oznacza to, że zmienna $X_i^{(r)}$ nie przyjmuje wartości większych od t_0). W tej ogólniejszej sytuacji warunek normalizacyjny (2.1) należy zastąpić przez następujący warunek

$$\inf\left\{t \geq 0 : N_i^{(r)}(t) \geq 1\right\} = 1.$$

Uwaga. Z Twierdzenia 1 wynika natychmiast, że oszacowania zawarte w Twierdzeniach 4 oraz 5 są również prawdziwe (z gorszymi stałymi) dla uzależnionych chaosów rzędu d,

$$\tilde{S} = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_d \leq n} a_{i_1,\ldots,i_d} X_{i_1} \cdots X_{i_d},$$

gdzie wspólczynniki $a_{i_1,\ldots,i_d}$ są nieujemne zaś dodatnie zmienne X_i są niezależne i mają logarytmicznie wklęsłe ogony.

Przykład. Rozważmy szczególny przypadek, gdy wszystkie zmienne $X_i^{(r)}$ mają rozkład wykładniczy, tzn.

$$P\left(X_i^{(r)} \geq t\right) = e^{-t} \text{ dla } 1 \leq r \leq d,\ 1 \leq i \leq n,\ t \geq 0.$$

W tym przypadku można oszacować normę $\left\|(a_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i}\in\mathbf{I}}\right\|_{\mathcal{N},u}$ w następujący sposób

$$\begin{aligned}
\left\|(a_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i}\in\mathbf{I}}\right\|_{\mathcal{N},u} &\leq \sup\left\{\sum a_{\mathbf{i}} \prod_{r=1}^{d}\left(1+b_{i_r}^{(r)}\right) : \sum b_{i_1}^{(1)} \leq u, \ldots, \sum b_{i_d}^{(d)} \leq u\right\} \\
&= \sup\left\{\sum_{I\subset\{1,2,\ldots,d\}} \sum a_{\mathbf{i}} \prod_{r\in I} b_{i_r}^{(r)} : \sum b_{i_1}^{(1)} \leq u, \ldots, \sum b_{i_d}^{(d)} \leq u\right\}.
\end{aligned}$$

Zatem

$$\begin{aligned}
\left\|(a_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i}\in\mathbf{I}}\right\|_{\mathcal{N},u} &\leq \sum_{I\subset\{1,2,\ldots,d\}} \sup\left\{\sum a_{\mathbf{i}} \prod_{r\in I} b_{i_r}^{(r)} : \sum b_{i_r}^{(r)} \leq u \text{ for } r \in I\right\} \\
&= \sum_{I\subset\{1,2,\ldots,d\}} u^{\#I} \max_{\mathbf{j}\in\mathbf{I}_I} \sum_{\mathbf{i}:\mathbf{i}_I=\mathbf{j}} a_{\mathbf{i}}. \qquad (2.2)
\end{aligned}$$

Z drugiej strony

$$\begin{aligned}
\left\|(a_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i}\in\mathbf{I}}\right\|_{\mathcal{N},u} &\geq \max_{I\subset\{1,2,\ldots,d\}} \sup\left\{\sum a_{\mathbf{i}} \prod_{r\in I} b_{i_r}^{(r)} : \sum b_{i_r}^{(r)} \leq u \text{ for } r \in I\right\} \\
&\geq 2^{-d} \sum_{I\subset\{1,2,\ldots,d\}} u^{\#I} \max_{\mathbf{j}\in\mathbf{I}_I} \sum_{\mathbf{i}:\mathbf{i}_I=\mathbf{j}} a_{\mathbf{i}}. \qquad (2.3)
\end{aligned}$$

Z (2.2) i (2.3) oraz z Twierdzenia 4 dla wszystkich $p \geq 1$ otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\left\|\sum a_{\mathbf{i}} X_{i_1}^{(1)} \cdots X_{i_d}^{(d)}\right\|_p &\sim_d \sum_{I\subset\{1,2,\ldots,d\}} p^{\#I} \max_{\mathbf{j}\in\mathbf{I}_I} \sum_{\mathbf{i}:\mathbf{i}_I=\mathbf{j}} a_{\mathbf{i}} \\
&= \sum_{i_1,\ldots,i_d} a_{i_1,\ldots,i_d} + p \max_{i_1} \sum_{i_2,\ldots,i_d} a_{i_1,\ldots,i_d} + p \max_{i_2} \sum_{i_1,i_3,\ldots,i_d} a_{i_1,\ldots,i_d} \\
&\quad + \ldots + p^d \max_{i_1,\ldots,i_d} a_{i_1,\ldots,i_d}.
\end{aligned}$$

Uwaga. Podamy zastosowanie uzyskanych oszacowań w pewnym modelu grafu losowego, nieco innym od klasycznego modelu dwumianowego grafu losowego (por. [13]). Nowy model jest następujący. Dane są wierzchołki grafu ponumerowane liczbami $1, 2, ..., n$ i niezależne, nieujemne, unormowane zmienne losowe $\tilde{X}_{\{u,v\}}, u \neq v,\ u, v \in \{1, 2, ..., n\}$, z logarytmicznie wklęsłymi ogonami. Nowy model grafu losowego $\tilde{G}\,(n)$ polega na tym, że pomiędzy dwoma różnymi wierzchołkami u, v grafu $\tilde{G}\,(n)$ istnieje k różnych nieskierowanych krawędzi z prawdopodobieństwem $p_{\{u,v\}}\,(k) = P(X_{\{u,v\}} \in (k-1, k]), k = 1, 2, ...$

Niech teraz G_0 będzie ustalonym grafem o niewielkiej liczbie krawędzi d, przy czym każde dwa jego wierzchołki połączone są co najwyżej jedną krawędzią. Będzie interesować nas liczba kopii grafu G_0 w grafie $\tilde{G}(n)$, tzn. liczba podgrafów $\tilde{G}(n)$ izomorficznych z G_0. Zauważmy, że interesująca nas liczba kopii grafu G_0 w $\tilde{G}(n)$, oznaczmy ją przez $\tilde{S}$, ma taki sam rozkład jak chaos losowy generowany przez zmienne $\left(\lceil X_{\{u,v\}} \rceil\right)_{1 \leq u < v \leq n}$. Mianowicie, niech $\mathcal{P}$ będzie rodziną wszystkich kopii grafu G_0 w grafie pełnym o n wierzchołkach $G(n)$, wówczas $\tilde{S}$ można utożsamić ze zmienną

$$\tilde{S} = \sum_{H \in \mathcal{P}} \prod_{\{u,v\} \in E(H)} \lceil X_{\{u,v\}} \rceil ,$$

gdzie $E\,(H)$ oznacza zbiór (nieskierowanych) krawędzi grafu H. Ze względu na szacowania

$$X_{\{u,v\}} \leq \lceil X_{\{u,v\}} \rceil < 1 + X_{\{u,v\}},$$
$$P\left(X_{\{u,v\}} \geq 1\right) \geq e^{-1},$$

dla $p > 0$ zachodzi

$$EX_{\{u,v\}}^p \leq E\,\lceil X_{\{u,v\}} \rceil^p \leq 2^p E\left(1 + X_{\{u,v\}}^p\right) \leq 2^p(1+e)EX_{\{u,v\}}^p,$$

a stąd dla całkowitych dodatnich p

$$\|S\|_p \leq \left\|\tilde{S}\right\|_p \leq 2^{\# E(H)}\,(1+e)^{\# E(H)}\,\|S\|_p\,,$$

gdzie $S = \sum_{H \in \mathcal{P}} \prod_{\{u,v\} \in E(H)} X_{\{u,v\}}$ i badanie własności zmiennej $\tilde{S}$ można sprowadzić do badania własności zmiennej, czym zajmujemy się w tym rozdziale.

Uwaga. W naszych rozważaniach nie zajęliśmy się szybkością wzrostu stałych $c_i^{-1}(d)$ i $C_i(d)$, pojawiających się w Twierdzeniach 4 i 5. Z podanych w następnych podrozdziałach dowodów można otrzymać szacowania $c_1^{-1}(d) \leq C^d$ oraz $c_2^{-1}(d), C_i(d) \leq (Cd)^d$. Nie ma jednak podstaw by sądzić, że są to optymalne szacowania tych stałych.

2.2 Przypadek jednowymiarowy

W tym podrozdziale udowodnimy Twierdzenie 4 w przypadku $d = 1$. Będzie to punkt wyjścia do dowodu indukcyjnego w ogólnym przypadku $d \geq 1$. W celu uproszczenia notacji, do końca tego podrozdziału zamiast pisać $X_i^{(1)}$ będziemy pisać X_i i zamiast pisać $N_i^{(1)}$ będziemy pisać N_i. Zatem w tym przypadku, dla ciągu nieujemnych liczb rzeczywistych (a_i) i $u > 0$ mamy $S = \sum a_i X_i$ oraz

$$\|(a_i)\|_{\mathcal{N},u} = \sup\left\{\sum a_i\left(1 + b_i\right) : \ (b_i) \in B^1_{\mathcal{N},u}\right\}.$$

Zacznijmy od następującego prostego lematu.

Lemat 3 *Zachodzą nierówności*

$$e^{-1} \leq EX_i \leq 1 + e^{-1}$$

Dowód. Zauważmy, że z (2.1) $EX_i \geq P(X_i \geq 1) \geq e^{-1}$, z drugiej strony, wobec wypukłości N_i, otrzymujemy

$$EX_i \leq 1 + \int_1^\infty \exp(-N_i(t))dt \leq 1 + \int_1^\infty e^{-t}dt = 1 + e^{-1}.$$

■

Udowodnimy, że dla $p \geq 1$

$$c\|(a_i)\|_{\mathcal{N},p} \leq \|S\|_p \leq C\|(a_i)\|_{\mathcal{N},p}. \tag{2.4}$$

Dowód (2.4) będzie inny niż w [23] i nie będzie wykorzystywał twierdzenia Talagranda dotyczącego koncentracyjnych własności miary $\frac{1}{2}e^{-|x|}dx$. Zamiast twierdzenia Talagranda użyjemy dwóch następujących prostych lematów.

Lemat 4 *Dla dowolnego ciągu nieujemnych liczb rzeczywistych* (b_i) *i niezależnych zmiennych* $Y_1, ..., Y_n$ *o unormowanym rozkładzie wykładniczym* $(EY_i = 1)$ *oraz* $u \geq 0, p \geq 1$ *zachodzi*

$$P\left(\sum b_i Y_i \geq C\sum b_i + u\right) \leq \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{u}{\max_i b_i}\right); \tag{2.5}$$
$$\left\|\sum b_i Y_i\right\|_p \leq C\left(\sum b_i + p\max b_i\right).$$

Dowód. Istnieje taka stała dodatnia $C \geq 1$, że dla $x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$ zachodzi nierówność $(1-x)^{-1} \leq \exp\left(Cx\right)$. Korzystając z tej nierówności otrzymujemy szacowanie transformaty Laplace'a zmiennej $T = \sum b_i Y_i$

$$Ee^{\lambda T} = \prod \frac{1}{1 - \lambda b_i} \leq \exp\left(C\lambda \sum b_i\right),$$

przy warunku, że dla $1 \leq i \leq n$ zachodzi $\lambda b_i \leq \frac{1}{2}$. Stąd dla $\lambda = \frac{1}{2}\left(\max_i b_i\right)^{-1}$ i $s > 0$, z nierówności Czebyszewa, otrzymujemy

$$\begin{aligned} P\left(T \geq C\left(\sum b_i + s\max_i b_i\right)\right) &\leq \exp\left(-C\lambda\sum b_i - sC\lambda\max_i b_i\right) Ee^{\lambda T} \\ &\leq \exp\left(-\frac{1}{2}Cs\right). \end{aligned}$$

Biorąc $t_0 = C\sum b_i$ dla $t = t_0 + u \geq t_0$ otrzymujemy (2.5)

$$\begin{aligned} P(T \geq t) &= P(T \geq t_0 + u) = P\left(T \geq C\sum b_i + u\right) \\ &= P\left(T \geq C\left(\sum b_i + \left(\frac{u}{C\max_i b_i}\right)\max_i b_i\right)\right) \\ &\leq \exp\left(-\frac{1}{2}C\frac{u}{C\max_i b_i}\right) = \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{u}{\max_i b_i}\right). \end{aligned}$$

Wobec powyższej nierówności, całkując przez części dostajemy

$$\begin{aligned} ET^p &= \int_0^\infty pt^{p-1}P(T \geq t)\,dt \leq pt_0^p + p\int_{t_0}^\infty t^{p-1}P(T \geq t)\,dt \\ &\leq pt_0^p + p\int_{t_0}^\infty 2^{p-1}\left\{t_0^{p-1} + (t-t_0)^{p-1}\right\}P(T \geq t)\,dt \\ &\leq pt_0^p + p2^{p-1}t_0^{p-1}\int_{t_0}^\infty P(T \geq t)\,dt + p2^p\int_0^\infty u^{p-1}e^{-u/(2\max_i b_i)}du \\ &\leq pt_0^p + p2^{p-1}t_0^{p-1}ET + p2^p\left(2\max_i b_i\right)^p\int_0^\infty v^{p-1}e^{-v}dv \\ &\leq p(2t_0)^p + p2^p\left(2\max_i b_i\right)^p\Gamma(p) \\ &\leq p(2t_0)^p + 2^p p^{p+1}\left(2\max_i b_i\right)^p. \end{aligned}$$

Z ostatniej nierówności otrzymujemy wreszcie

$$\left\|\sum b_i Y_i\right\|_p \leq C\left(\sum b_i + p\max_i b_i\right).$$

(Pojawiająca się tu stała C, zgodnie z przyjętą konwencją niekoniecznie jest równa wcześniej użytym stałym, oznaczonym przez C.) ∎

Przejdźmy do następnego lematu.

Lemat 5 *Dla dowolnego ciągu liczb rzeczywistych $a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_n > 0$ i niezależnych zmiennych $X_1, ..., X_n$ (o unormowanym rozkładzie z logarytmicznie wklęsłymi ogonami) zachodzi*

$$\left\|\sum a_i X_i\right\|_p \leq \left\|\sum_{i \leq p} a_i X_i\right\|_p + C\sum a_i. \tag{2.6}$$

Dowód. Z nierówności trójkąta

$$\left\|\sum a_i X_i\right\|_p \le \left\|\sum_{i\le p} a_i X_i\right\|_p + \left\|\sum_{i>p} a_i X_i\right\|_p .$$

Z unormowania zmiennych X_i i wypukłości funkcji N_i wynika nierówność $P\left(Y_i \ge t\right) \ge P\left(X_i \ge t\right)$ gdy $t \ge 1$ i Y_i oznaczają unormowane zmienne losowe o rozkładzie wykładniczym. Na mocy poprzedniego lematu mamy

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{i>p} a_i X_i\right\|_p &\le \left\|\sum_{i>p} a_i X_i I_{\{X_i\le 1\}}\right\|_p + \left\|\sum_{i>p} a_i X_i I_{\{X_i>1\}}\right\|_p \\
&\le \sum_{i>p} a_i + \left\|\sum_{i>p} a_i Y_i\right\|_p \le C\left(\sum_{i>p} a_i + p\max_{i>p} a_i\right).
\end{aligned}$$

Wobec przyjętego założenia $a_1 \ge a_2 \ge ... \ge a_n$, więc $\max_{i>p} a_i \le \frac{1}{p}\sum_{i\le p} a_i$, a zatem

$$\begin{aligned}
\left\|\sum a_i X_i\right\|_p &\le \left\|\sum_{i\le p} a_i X_i\right\|_p + C\left(\sum_{i>p} a_i + p\frac{1}{p}\sum_{i\le p} a_i\right) \\
&\le \left\|\sum_{i\le p} a_i X_i\right\|_p + C\sum a_i.
\end{aligned}$$

■

Przejdźmy wreszcie do dowodu (2.4).

Dowód. Wpierw udowodnimy w taki sam sposób jak w [10] oszacowanie z dołu. Ponieważ $\|S\|_1 \le \|S\|_p$, więc wobec definicji $\|(a_i)\|_{\mathcal{N},u}$ i Lematu 3 zauważamy, że wystarczy udowodnić, że dla dowolnego ciągu (b_i) nieujemnych liczb rzeczywistych, dla którego $\sum N_i(b_i) \le p$, zachodzi

$$\sum a_i b_i \le e\|S\|_p. \tag{2.7}$$

Mamy

$$\begin{aligned}
\|S\|_p &\ge \left\|\sum a_i X_i\right\|_p \ge \left(\sum a_i b_i\right)\left(P\left(X_i \ge b_i \text{ dla } i = 1,2,...,n\right)\right)^{1/p} \\
&\ge \left(\sum a_i b_i\right)\exp\left(-\frac{1}{p}\sum N_i(b_i)\right) \ge \frac{1}{e}\sum a_i b_i.
\end{aligned}$$

Zatem zachodzi (2.7).

W celu wykazania oszacowania z góry zauważmy, że wobec (2.6) wystarczy udowodnić, że

$$\left\| \sum_{i \le p} a_i X_i \right\|_p \le \|(a_i)\|_{\mathcal{N},p}.$$

Zauważmy dalej, że każda ze zmiennych $N_i(X_i)$ ma rozkład wykładniczy $\left(P(N_i(X_i) \ge t) = P\left(X_i \ge N_i^{-1}(t)\right) = e^{-t}\right)$, zmienna $\sum_{i \le p} N_i(X_i)$ ma zatem rozkład $\Gamma(q,1), q \le p$, a stąd, na podstawie (2.5), dla $k \ge 1$

$$P\left(\sum_{i \le p} N_i(X_i) \ge Ckp\right) \le e^{-kp}.$$

Stąd i z wypukłości N_i otrzymujemy

$$\begin{aligned} E\left(\sum_{i \le p} a_i X_i\right)^p &\le \sup\left\{\left(\sum a_i b_i\right)^p : \sum_{i \le p} N_i(b_i) \le Cp\right\} \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \sup\left\{\left(\sum a_i b_i\right)^p : Ckp < \sum_{i \le p} N_i(b_i) \le C(k+1)p\right\} \times \\ &\times P\left(\sum_{i \le p} N_i(X_i) > Ckp\right) \\ &\le C^p \sup\left\{\left(\sum a_i b_i\right)^p : \sum_{i \le p} N_i(b_i) \le p\right\} \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} C^p (k+1)^p \sup\left\{\left(\sum a_i b_i\right)^p : \sum_{i \le p} N_i(b_i) \le p\right\} \cdot e^{-kp} \\ &\le C^p \sup\left\{\left(\sum a_i b_i\right)^p : \sum_{i \le p} N_i(b_i) \le p\right\} \le C^p \|(a_i)\|_{\mathcal{N},p}^p. \end{aligned}$$

■

Z (2.4), w dokładnie taki sam sposób jak w dowodzie Twierdzenia 5, otrzymujemy teraz oszacowanie na ogony S

$$P\left(S \ge C\|(a_i)\|_{\mathcal{N},p}\right) \le e^{-p}. \tag{2.8}$$

Korzystając z (2.8), udowodnimy teraz następujący, wykorzystany w następnym podrozdziale

Lemat 6 *Niech A będzie skończonym podzbiorem R_+^n. Dla $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in A$ zdefiniujmy $S_{\mathbf{a}} = \sum a_i X_i$, wówczas dla każdego $p \geq 1$ prawdziwe jest następujące oszacowanie*

$$\left\| \max_{\mathbf{a} \in A} \left(S_{\mathbf{a}} - C \sum a_i \right)_+ \right\|_p \leq C \left(p + \ln \# A \right) \max_{\mathbf{a} \in A} \max_i a_i. \tag{2.9}$$

Dowód. Z wypukłości N_i i z warunku (2.1) mamy $N_i(x) \geq x$ dla $x \geq 1$, zatem dla $s \geq 0$

$$\begin{aligned} \|(a_i)\|_{\mathcal{N},s} &\leq \sum a_i + \sup \left\{ \sum a_i b_i : \sum b_i \leq s \right\} \\ &= \sum a_i + s \max_i a_i. \end{aligned}$$

Stąd i z (2.8) otrzymujemy

$$P\left(S_{\mathbf{a}} > C \left(\sum a_i + s \max_i a_i \right) \right) \leq 2e^{-s},$$

$$P\left(\left(S_{\mathbf{a}} - C \sum a_i \right)_+ > Cs \max_{\mathbf{a} \in A} \max_i a_i \right) \leq 2e^{-s}.$$

Dalej

$$\begin{aligned} &P\left(\max_{\mathbf{a} \in A} \left(S_{\mathbf{a}} - C \sum a_i \right)_+ \geq Cs \max_{\mathbf{a} \in A} \max_i a_i \right) \\ &\qquad \leq \sum_{\mathbf{a} \in A} P\left(\left(S_{\mathbf{a}} - C \sum a_i \right)_+ \geq Cs \max_{\mathbf{a} \in A} \max_i a_i \right) \leq 2\#Ae^{-s} \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} &P\left(\max_{\mathbf{a} \in A} \left(S_{\mathbf{a}} - C \sum a_i \right)_+ \geq C(1+s)(p + \ln \# A) \max_{\mathbf{a} \in A} \max_i a_i \right) \\ &\qquad \leq 2\#Ae^{-(1+s)(p+\ln \# A)} \leq 2e^{-sp}. \end{aligned}$$

Całkując przez części, dostajemy

$$\begin{aligned} \left\| \max_{\mathbf{a} \in A} \left(S_{\mathbf{a}} - C \sum a_i \right)_+ \right\|_p &\leq C\left(p + \ln \# A \right) \max_{\mathbf{a} \in A} \max_i a_i \\ &\quad + C\left(p + \ln \# A \right) \max_{\mathbf{a} \in A} \max_i a_i \left(\int_0^\infty 2pt^{p-1} e^{-pt} dt \right)^{1/p} \\ &\leq C\left(p + \ln \# A \right) \max_{\mathbf{a} \in A} \max_i a_i. \end{aligned}$$

■

2.3 Przypadek wielowymiarowy

W tym podrozdziale udowodnimy Twierdzenie 4 przeprowadzając dowód indukcyjny ze względu na rząd d. Pierwszy krok indukcyjny został już wykonany w poprzednim podrozdziale. Załóżmy zatem, że Twierdzenie 4 jest prawdziwe dla wszystkich r gdy $1 \le r \le d-1$. Korzystając z tego założenia udowodnimy prawdziwość Twierdzenia 4 dla chaosów rzędu d. Wpierw udowodnimy oszacowanie z dołu, czyli

$$\|S\|_p \ge c_1(d) \left\|(a_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i}\in\mathbf{I}}\right\|_{\mathcal{N},p}. \tag{2.10}$$

Dowód. Iterując oszacowanie z dołu w (2.4) (podstawiając za X_i kolejno $X_i^{(d)}, ..., X_i^{(1)}$) dostajemy

$$\begin{aligned}
\|S\|_p &= \left\|\sum a_{\mathbf{i}} X_{i_1}^{(1)} \cdots X_{i_d}^{(d)}\right\|_p \\
&= \left(E_{1,\ldots,d-1}\left(\left(E_d\left(\sum a_{\mathbf{i}} X_{i_1}^{(1)} \cdots X_{i_d}^{(d)}\right)^p\right)^{1/p}\right)^p\right)^{1/p} \\
&\ge \left(E_{1,\ldots,d-1}\left(c \sup_{x^{(d)}\in B^d_{\mathcal{N},p}} \sum a_{\mathbf{i}} X_{i_1}^{(1)} \cdots X_{i_{d-1}}^{(d-1)}\left(1+x_{i_d}^{(d)}\right)\right)^p\right)^{1/p} \\
&\ge c \sup_{x^{(d)}\in B^d_{\mathcal{N},p}} \left\|\sum a_{\mathbf{i}} X_{i_1}^{(1)} \cdots X_{i_{d-1}}^{(d-1)}\left(1+x_{i_d}^{(d)}\right)\right\|_p \\
&\ge ... \ge c^d \sup_{x^{(r)}\in B^r_{\mathcal{N},p}, r=1,2,\ldots,d} \sum a_{\mathbf{i}} \prod_{r=1}^{d}\left(1+x_{i_r}^{(r)}\right) \\
&= c^d \left\|(a_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i}\in\mathbf{I}}\right\|_{\mathcal{N},p}
\end{aligned}$$

Z powyższej nierowności orzymujemy (2.10) z $c_1(d) = c^d$. ■

Aby udowodnić oszacowanie z góry

$$\|S\|_p \le C_1(d) \left\|(a_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i}\in\mathbf{I}}\right\|_{\mathcal{N},p} \tag{2.11}$$

użyjemy dwóch następujących spostrzeżeń.

1. Indeksy $i_1, \ldots, i_d$ można przenumerować w ten sposób, by dla $1 \le r \le d$ zachodziła implikacja

$$\text{jeżeli } i < j \text{ to } \sum_{\mathbf{i}:i_r=i} a_{\mathbf{i}} \ge \sum_{\mathbf{i}:i_r=j} a_{\mathbf{i}}. \tag{2.12}$$

2. Zbiór $\mathbf{I}$ można rozbić na sumę następujących rozłącznych podzbiorów $\mathbf{I}_r, 1 \leq r \leq d$,

$$\mathbf{I}_r = \{\mathbf{i} \in \mathbf{I} : i_r > \max(i_1, \ldots, i_{r-1}) \text{ oraz } i_r \geq \max(i_{r+1}, \ldots, i_d)\}.$$

Zakładając, że zachodzi (2.11) dla $d-1$, możemy napisać

$$\begin{aligned} \|S\|_p &= \left\| \sum_{r=1}^{d} \sum_{\mathbf{i} \in \mathbf{I}_r} a_{\mathbf{i}} X_{i_1}^{(1)} \cdots X_{i_d}^{(d)} \right\|_p \\ &\leq \sum_{r=1}^{d} \left\| \sum_{\mathbf{i} \in \mathbf{I}_r} a_{\mathbf{i}} X_{i_1}^{(1)} \cdots X_{i_d}^{(d)} \right\|_p \\ &\leq C_1(d-1) \sum_{r=1}^{d} \left\| \left\| \left(\sum_{\mathbf{i} \in \mathbf{I_r} : \mathbf{i}_{\{r\}'} = \mathbf{j}} a_{\mathbf{i}} X_{i_r}^{(r)} \right)_{\mathbf{j} \in (\mathbf{I}_r)_{\{r\}'}} \right\|_{\mathcal{N},p} \right\|_p . \end{aligned}$$

Aby udowodnić (2.11) wystarczy zatem pokazać dla $r = 1, \ldots, d$ nierówność

$$\left\| \left\| \left(\sum_{\mathbf{i} \in \mathbf{I_r} : \mathbf{i}_{\{r\}'} = \mathbf{j}} a_{\mathbf{i}} X_{i_r}^{(r)} \right)_{\mathbf{j} \in (\mathbf{I}_r)_{\{r\}'}} \right\|_{\mathcal{N},p} \right\|_p \leq C(d) \left\| (a_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i} \in \mathbf{I}} \right\|_{\mathcal{N},p}. \qquad (2.13)$$

Dowód. Rozważymy tylko przypadek odpowiadający $r = 1$, dowód dla innych wartości r jest dokładnie taki sam. Zgodnie z przyjętą konwencją $C(d)$ może oznaczać różne stałe zależne tylko od d, (w szczególności może oznaczać stałe zależne od wartości $c_1(d-1)$ i $C_1(d-1)$).

W celu uproszczenia notacji oznaczmy $\mathbf{J}_1 = (\mathbf{I}_1)_{\{1\}'}$ i dodatkowo dla $I \subset \{1, \ldots, d\}$ zdefiniujmy

$$\left\| (a_{\mathbf{j}})_{\mathbf{j} \in \mathbf{I}_I} \right\|_{\mathcal{N},u} = \sup \left\{ \sum_{\mathbf{j} \in \mathbf{I}_I} a_{\mathbf{j}} \prod_{r \in I} \left(1 + x_{j_r}^{(r)}\right) : x^{(r)} \in B_{\mathcal{N},u}^r \text{ dla } r \in I \right\}.$$

Mamy

$$\begin{aligned} &\left\| \left(\sum_{\mathbf{i} \in \mathbf{I}_1 : \mathbf{i}_{\{1\}'} = \mathbf{j}} a_{\mathbf{i}} X_{i_1}^{(1)} \right)_{\mathbf{j} \in \mathbf{J}_1} \right\|_{\mathcal{N},p} \\ &\quad = \sup_{x^{(r)} \in B_{\mathcal{N},p}^r, 2 \leq r \leq d} \sum_{\mathbf{j} \in \mathbf{J}_1} \left(\sum_{\mathbf{i} \in \mathbf{I}_1 : \mathbf{i}_{\{1\}'} = \mathbf{j}} a_{\mathbf{i}} X_{i_1}^{(1)} \right) \left(1 + x_{j_2}^{(2)}\right) \cdots \left(1 + x_{j_d}^{(d)}\right) \end{aligned}$$

oraz dla $x^{(r)} \in R_+^n$, $2 \le r \le d$,

$$\left(1+x^{(2)}_{j_2}\right)\cdots\left(1+x^{(d)}_{j_d}\right) \le x^{(2)}_{j_2}\cdots x^{(d)}_{j_d} + \sum_{2\le q\le d}\prod_{\substack{r=2\\ r\neq q}}^{d}\left(1+x^{(r)}_{j_r}\right).$$

Zatem

$$\begin{aligned}
&\left\|\left(\sum_{\mathbf{i}\in\mathbf{I}_1:\mathbf{i}_{\{1\}'}=\mathbf{j}} a_{\mathbf{i}} X^{(1)}_{i_1}\right)_{\mathbf{j}\in\mathbf{J}_1}\right\|_{\mathcal{N},p}\\
&\qquad\le \sup_{x^{(r)}\in B^r_{\mathcal{N},p},2\le r\le d}\ \sum_{\mathbf{j}\in\mathbf{J}_1}\left(\sum_{\mathbf{i}\in\mathbf{I}_1:\mathbf{i}_{\{1\}'}=\mathbf{j}} a_{\mathbf{i}} X^{(1)}_{i_1}\right) x^{(2)}_{j_2}\cdots x^{(d)}_{j_d}\\
&\qquad + \sum_{2\le q\le d}\ \sup_{x^{(r)}\in B^r_{\mathcal{N},p},2\le r\le d}\ \sum_{\mathbf{j}\in\mathbf{J}_1}\left(\sum_{\mathbf{i}\in\mathbf{I}_1:\mathbf{i}_{\{1\}'}=\mathbf{j}} a_{\mathbf{i}} X^{(1)}_{i_1}\right)\prod_{\substack{r=2,\\ r\neq q}}^{n}\left(1+x^{(r)}_{j_r}\right).
\end{aligned}$$

Z założenia indukcyjnego, dla dowolnego całkowitego $2 \le q \le r$

$$\begin{aligned}
&\left\|\sup_{x^{(r)}\in B^r_{\mathcal{N},p},2\le r\le d}\ \sum_{\mathbf{j}\in\mathbf{J}_1}\left(\sum_{\mathbf{i}\in\mathbf{I}_1:\mathbf{i}_{\{1\}'}=\mathbf{j}} a_{\mathbf{i}} X^{(1)}_{i_1}\right)\prod_{\substack{r=2\\ r\neq q}}^{n}\left(1+x^{(r)}_{j_r}\right)\right\|_p\\
&\quad= \left\|\sup_{x^{(r)}\in B^r_{\mathcal{N},p},2\le r\le d}\ \sum_{\mathbf{j}\in(\mathbf{I}_1)_{\{q\}'}}\left(\sum_{\mathbf{i}\in\mathbf{I}_1:\mathbf{i}_{\{q\}'}=\mathbf{j}} a_{\mathbf{i}}\right) X^{(1)}_{j_1}\prod_{\substack{r=2\\ r\neq q}}^{n}\left(1+x^{(r)}_{j_r}\right)\right\|_p\\
&\quad\le\ c_1^{-1}(d-1)\left\|\sum_{\mathbf{j}\in(\mathbf{I}_1)_{\{q\}'}}\left(\sum_{\mathbf{i}\in\mathbf{I}_1:\mathbf{i}_{\{q\}'}=\mathbf{j}} a_{\mathbf{i}}\right)\prod_{\substack{r=1\\ r\neq q}}^{n} X^{(r)}_{j_r}\right\|_p\\
&\quad\le\ C(d)\left\|\left(\sum_{\mathbf{i}\in\mathbf{I}_1:\mathbf{i}_{\{q\}'}=\mathbf{j}} a_{\mathbf{i}}\right)_{\mathbf{j}\in(\mathbf{I}_1)_{\{q\}'}}\right\|_{\mathcal{N},p} \le C(d)\left\|(a_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i}\in\mathbf{I}}\right\|_{\mathcal{N},p}.
\end{aligned}$$

Zatem wystarczy udowodnić, że

$$\left\|\sup_{x^{(r)}\in B^r_{\mathcal{N},p},2\le r\le d}\ \sum_{\mathbf{j}\in\mathbf{J}_1}\left(\sum_{\mathbf{i}\in\mathbf{I}_1:\mathbf{i}_{\{1\}'}=\mathbf{j}} a_{\mathbf{i}} X^{(1)}_{i_1}\right) x^{(2)}_{j_2}\cdots x^{(d)}_{j_d}\right\|_p \le C(d)\left\|(a_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i}\in\mathbf{I}}\right\|_{\mathcal{N},p}. \tag{2.14}$$

Dla $2 \le r \le d$ zdefiniujmy zbiory

$$U^{(r)} = \left\{ x^{(r)} \in B^r_{\mathcal{N},p} : \ N_i^{(r)}\left(x_i^{(r)}\right) \le 1 \text{ dla } i < p \right\} \cap$$
$$\cap \bigcap_{k=1}^{\infty} \left\{ x^{(r)} \in B^{(r)}_{\mathcal{N},p} : N_i^{(r)}\left(x_i^{(r)}\right) \le k^3 \text{ dla } i \in \left[2^{k-1}p; 2^k p\right) \right\},$$

$$V^{(r)} = \left\{ x^{(r)} \in B^r_{\mathcal{N},p} : x_i^{(r)} = 0 \text{ lub } N_i^{(r)}\left(x_i^{(r)}\right) > 1 \text{ dla } i < p \right\} \cap$$
$$\cap \bigcap_{k=1}^{\infty} \left\{ x^{(r)} \in B^r_{\mathcal{N},p} : x_i^{(r)} = 0 \text{ lub } N_i^{(r)}\left(x_i^{(r)}\right) > k^3 \text{ dla } i \in \left[2^{k-1}p; 2^k p\right) \right\}.$$

Dla każdego $x^{(r)} \in B^r_{\mathcal{N},p}$ istnieją takie $y^{(r)} \in U^{(r)}, z^{(r)} \in V^{(r)}$ że $x^{(r)} = y^{(r)} + z^{(r)}$. Niech $\mathcal{J}$ oznacza rodzinę podzbiorów indeksów zdefiniowaną w sposób następujący:

$$\mathcal{J} = \left\{ I \subseteq \{1, 2, \ldots\} : \#I \le p, \#I \cap \left[2^{k-1}p; 2^k p\right) \le \frac{p}{k^3} \text{ dla } k = 1, 2, \ldots \right\}.$$

Zauważmy, że

$$\text{jeżeli } x^{(r)} \in V^{(r)} \text{ to } \left\{ i : x_i^{(r)} \neq 0 \right\} \in \mathcal{J}. \tag{2.15}$$

Stosując nierówność $\sum_{k \le m} \binom{n}{k} \le \left(\frac{Cn}{m}\right)^m$, otrzymujemy oszacowanie mocy $\mathcal{J}$

$$\#\mathcal{J} \le 2^p \prod_{k=1}^{\infty} \left(\frac{C 2^{k-1} p}{p/k^3} \right)^{p/k^3} \le C^p \prod_{k=1}^{\infty} \left(2^{k-1}k^3\right)^{p/k^3} \le C^p. \tag{2.16}$$

Zauważmy, że dla każdego takiego I, że $\#I \le p$ i każdego takiego q, że $2 \le q \le d$, z założenia indukcyjnego dostajemy

$$\begin{aligned}
&\left\| \sup_{x^{(r)} \in B^r_{\mathcal{N},p}, 2 \le r \le d} \sum_{\mathbf{i} \in \mathbf{I}_1 : i_q \in I} a_{\mathbf{i}} X^{(1)}_{i_1} x^{(2)}_{i_2} \cdots x^{(d)}_{i_d} \right\|_p \\
\le \ & c_1^{-1}(d-1) \left\| \sum_{\mathbf{i} \in \mathbf{I}_1 : i_q \in I} a_{\mathbf{i}} X^{(1)}_{i_1} X^{(2)}_{i_2} \cdots X^{(d)}_{i_d} \right\|_p \\
\le \ & c_1^{-1}(d-1) C_1 \, (d-1) \left\| \sup_{x^{(r)} \in B^r_{\mathcal{N},u}, r \in \{q\}'} \sum_{\mathbf{i} \in \mathbf{I}_1 : i_q \in I} a_{\mathbf{i}} \left(1 + x^{(1)}_{i_1}\right) \cdots X^{(q)}_{i_q} \cdots \left(1 + x^{(d)}_{i_d}\right) \right\|_p \\
\le \ & C\,(d) \left\| (a_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i} \in \mathbf{I}_1} \right\|_{\mathcal{N},p}.
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Ostatnie szacowanie otrzymuje się korzystając z dwóch następujących spostrzeżeń:

- funkcja

$$f\left(x^{(q)}\right)=\left\|\sup_{x^{(r)}\in B^r_{\mathcal{N},p},r\in\{q\}'}\sum_{\mathbf{i}\in\mathbf{I}_1:i_q\in I}a_{\mathbf{i}}(1+x^{(1)}_{i_1})\cdots x^{(q)}_{i_q}\cdots(1+x^{(d)}_{i_d})\right\|_p$$

jest dodatnio jednorodna na R^n_+ (tzn. $f\left(tx^{(q)}\right)=tf\left(x^{(q)}\right)$ gdy $t\geq 0$),

- z wypukłości $N^{(q)}_i$ i stąd, że zmienna losowa $\sum_{i_q\in I}N^{(q)}_{i_q}\left(X^{(q)}_{i_q}\right)$ ma rozkład $\Gamma\left(\#I,1\right)$ (przypomnijmy, że $\#I\leq p$)

$$\begin{aligned}&P\left(\sum_{i_q\in I}N^{(q)}_{i_q}\left(\frac{1}{C\left(1+t\right)}X^{(q)}_{i_q}\right)>p\right)\\ \leq\ &P\left(\sum_{i_q\in I}N^{(q)}_{i_q}\left(X^{(q)}_{i_q}\right)>C\left(1+t\right)p\right)\leq e^{-ctp}.\end{aligned}$$

(Ostatnia nierówność wynika z (2.5).)

Z powyższych spostrzeżeń wynika, iż

$$P\left(f\left(X^{(q)}\right)\geq C\left(1+t\right)\left\|(a_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i}\in\mathbf{I}_1}\right\|_{\mathcal{N},p}\right)\leq e^{-ctp}$$

skąd, całkując przez części, dostajemy

$$E\left\{f\left(X^{(q)}\right)\right\}^p\leq C^p\left\|(a_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i}\in\mathbf{I}_1}\right\|^p_{\mathcal{N},p}.$$

Z (2.17), (2.16) oraz (2.15) wynika, że

$$\begin{aligned}&\left\|\sup_{x^{(r)}\in B^r_{\mathcal{N},p},2\leq r\leq d,x^{(q)}\in V^{(q)}}\sum_{\mathbf{i}\in\mathbf{I}_1}a_{\mathbf{i}}X^{(1)}_{i_1}x^{(2)}_{i_2}\cdots x^{(d)}_{i_d}\right\|_p\\ \leq\ &\left\|\sup_{I\in\mathcal{J}}\sup_{x^{(r)}\in B^r_{\mathcal{N},p},2\leq r\leq d}\sum_{\mathbf{i}\in\mathbf{I}_1:i_q\in I}a_{\mathbf{i}}X^{(1)}_{i_1}x^{(2)}_{i_2}\cdots x^{(d)}_{i_d}\right\|_p\\ \leq\ &\left(\sum_{I\in\mathcal{J}}\left\|\sup_{x^{(r)}\in B^r_{\mathcal{N},p},2\leq r\leq d}\sum_{\mathbf{i}\in\mathbf{I}_1:i_q\in I}a_{\mathbf{i}}X^{(1)}_{i_1}x^{(2)}_{i_2}\cdots x^{(d)}_{i_d}\right\|^p_p\right)^{1/p}\\ \leq\ &C\left(d\right)\left(\left(\#\mathcal{J}\right)\left\|(a_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i}\in\mathbf{I}_1}\right\|^p_{\mathcal{N},p}\right)^{1/p}\leq C\left(d\right)\left\|(a_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i}\in\mathbf{I}_1}\right\|_{\mathcal{N},p}.\end{aligned}\tag{2.18}$$

Niech C_0 będzie stałą występującą w (2.9). Ponieważ

$$\sup_{x^{(r)}\in U^{(r)},2\le r\le d}\ \sum_{\mathbf{i}\in\mathbf{I}_1} a_{\mathbf{i}} C_0 x^{(2)}_{i_2}\cdots x^{(d)}_{i_d} \le C_0 \left\|(a_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i}\in\mathbf{I}}\right\|_{\mathcal{N},p},$$

więc wobec (2.18) aby dowieść (2.14) wystarczy udowodnić, że

$$\left\|\sup_{x^{(r)}\in U^{(r)},2\le r\le d}\ \sum_{\mathbf{i}\in\mathbf{I}_1} a_{\mathbf{i}}(X^{(1)}_{i_1}-C_0)x^{(2)}_{i_2}\cdots x^{(d)}_{i_d}\right\|_p \le C(d)\left\|(a_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i}\in\mathbf{I}}\right\|_{\mathcal{N},p}. \quad (2.19)$$

Zauważmy teraz, że ponieważ $N^{(r)}_i(x)\ge x$ dla $x\ge 1, 1\le r\le d, 1\le i\le n$, więc dla $a\ge 1$ i dowolnych (niekoniecznie dodatnich) liczb rzeczywistych $t_1,t_2,\ldots,t_n$

$$\begin{aligned}
&\sup\left\{\sum_{\mathbf{i}\in\mathbf{I}_1} a_{\mathbf{i}} t_{i_1} x^{(2)}_{i_2}\cdots x^{(d)}_{i_d}:\ x^{(r)}\in B^r_{\mathcal{N},u}, \left\|\left(N^{(r)}_{i_r}\left(x^{(r)}_{i_r}\right)\right)\right\|_\infty \le a, 2\le r\le d\right\}\\
&\le\ \sup\left\{\sum_{\mathbf{i}\in\mathbf{I}_1} a_{\mathbf{i}} t_{i_1} x^{(2)}_{i_2}\cdots x^{(d)}_{i_d}: \sum x^{(r)}_{i_r}\le p, \left\|x^{(r)}\right\|_\infty \le a, 2\le r\le d\right\}\\
&\le\ a^{d-1}\max_{\#I^r\le\lceil p/a\rceil,2\le r\le d}\ \sum_{\mathbf{i}\in\mathbf{I}_1:i_r\in I^r,2\le r\le d} a_{\mathbf{i}} t_{i_1}
\end{aligned}$$

(powyżej i dalej stosujemy konwencję $\sum_{\mathbf{i}\in\emptyset} b_{\mathbf{i}}=0$). Zatem, z definicji $\mathbf{I}_1$ i $U^{(r)}$ otrzymujemy

$$\begin{aligned}
&\left\|\sup_{x^{(r)}\in U^{(r)},2\le r\le d}\ \sum_{\mathbf{i}\in\mathbf{I}_1} a_{\mathbf{i}}(X^{(1)}_{i_1}-C_0)x^{(2)}_{i_2}\cdots x^{(d)}_{i_d}\right\|_p\\
&\le\ \sum_{l\ge 1}\left\|\sup_{x^{(r)}\in U^{(r)},2\le r\le d}\ \sum_{\mathbf{i}\in\mathbf{I}_1:2^{l-1}p\le i_1<2^l p} a_{\mathbf{i}}(X^{(1)}_{i_1}-C_0)x^{(2)}_{i_2}\cdots x^{(d)}_{i_d}\right\|_p\\
&\le\ \sum_{1\le l\le p^{1/3}} l^{3(d-1)}\left\|\max_{\substack{I^r\subset\{1,\ldots,2^l p-1\}\\ \#I^r\le\lceil p/l^3\rceil,2\le r\le d}}\left(\sum_{\substack{\mathbf{i}\in\mathbf{I}_1:2^{l-1}p\le i_1<2^l p,\\ i_r\in I^r,2\le r\le d}} a_{\mathbf{i}}\left(X^{(1)}_{i_1}-C_0\right)\right)_+\right\|_p\\
&+\ p^{d-1}\sum_{l>p^{1/3}}\left\|\max_{\mathbf{j}\in\mathbf{I}_1:2^{l-1}p\le j_1<2^l p}\left(\sum_{\substack{\mathbf{i}\in\mathbf{I}_1:\mathbf{i}_{\{1\}'}=\mathbf{j}_{\{1\}'}\\ 2^{l-1}p\le i_1<2^l p}} a_{\mathbf{i}}\left(X^{(1)}_{i_1}-C_0\right)\right)_+\right\|_p. \quad (2.20)
\end{aligned}$$

Stosując Lemat 6 oszacujemy prawą stronę powyższej nierówności. Dla $l \leq p^{1/3}$ mamy

$$\begin{aligned} & \# \left\{ (I^r)_{1 \leq r \leq d} : I^r \subset \left\{ 1, \ldots, 2^l p - 1 \right\}, \# I^r \leq \lceil p/l^3 \rceil \text{ for } 1 \leq r \leq d \right\} \\ & \leq \left(\left(\frac{C 2^l p}{p/l^3} \right)^{2p/l^3} \right)^d \leq C^{dp/l^2} \leq C^{dp}. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Korzystając z (2.12) otrzymujemy

$$\begin{aligned} & \max_{\substack{I^r \subset \left\{1,\ldots,2^l p-1\right\} \\ \# I^r \leq \lceil p/l^3 \rceil, 2 \leq r \leq d}} \max_{2^{l-1} p \leq i < 2^l p} \sum_{\substack{\mathbf{i} \in \mathbf{I}_1 : i_1 = i, \\ i^{(r)} \in I^r, 2 \leq r \leq d}} a_{\mathbf{i}} \\ & \leq \max_{i \geq 2^{l-1} p} \sum_{\mathbf{i} \in \mathbf{I} : i_1 = i} a_{\mathbf{i}} \leq \frac{1}{2^{l-1} p} \sum_{\mathbf{i} \in \mathbf{I}} a_{\mathbf{i}}. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Z (2.9), (2.21) i (2.22) dostajemy

$$\begin{aligned} & \left\| \max_{\substack{I^r \subset \left\{1,\ldots,2^l p-1\right\} \\ \# I^r \leq \lceil p/l^3 \rceil, 2 \leq r \leq d}} \left(\sum_{\substack{\mathbf{i} \in \mathbf{I}_1 : 2^{l-1} p \leq i_1 < 2^l p, \\ i_r \in I^r, 2 \leq r \leq d}} a_{\mathbf{i}} \left(X_{i_1}^{(1)} - C_0 \right) \right)_+ \right\|_p \\ \leq \; & C \left(p + \ln C^{dp} \right) \max_{\substack{I^r \subset \left\{1,\ldots,2^l p-1\right\} \\ \# I^r \leq \lceil p/l^3 \rceil, 2 \leq r \leq d}} \max_{2^{l-1} p \leq i < 2^l p} \sum_{\substack{\mathbf{i} \in \mathbf{I}_1 : i_1 = i, \\ i^{(r)} \in I^r, 2 \leq r \leq d}} a_{\mathbf{i}} \\ \leq \; & Cpd \frac{1}{2^{l-1} p} \sum_{\mathbf{i} \in \mathbf{I}} a_{\mathbf{i}} \leq \frac{Cd}{2^{l-1}} \sum_{\mathbf{i} \in \mathbf{I}} a_{\mathbf{i}}. \end{aligned}$$

Zatem

$$\begin{aligned} & \sum_{1 \leq l \leq p^{1/3}} l^{3(d-1)} \left\| \max_{\substack{I^r \subset \left\{1,\ldots,2^l p-1\right\}, \\ \# I^r \leq \lceil p/l^3 \rceil, 2 \leq r \leq d}} \sum_{\substack{\mathbf{i} \in \mathbf{I}_1 : i_1 = i, \\ i^{(r)} \in I^r, 2 \leq r \leq d}} a_{\mathbf{i}} (X_{i_1}^{(1)} - C_0) \right\|_p \\ \leq \; & \sum_{1 \leq l \leq p^{1/3}} l^{3(d-1)} \frac{Cd}{2^{l-1}} \sum_{\mathbf{i} \in \mathbf{I}} a_{\mathbf{i}} \leq C(d) \sum_{\mathbf{i} \in \mathbf{I}} a_{\mathbf{i}}. \end{aligned} \tag{2.23}$$

Dla $l > p^{1/3}$ podobnie dostajemy

$$\max_{\mathbf{i} \in \mathbf{I}_1 : 2^{l-1} p \leq i_1 < 2^l p} a_{\mathbf{i}} \leq \frac{1}{2^{l-1} p} \sum_{\mathbf{i} \in \mathbf{I}} a_{\mathbf{i}}$$

oraz (ponieważ $\# \left\{\mathbf{j} \in \mathbf{I}_1 : 2^{l-1}p \leq j_1 < 2^l p\right\} \leq (2^l p)^d$)

$$\left\| \max_{\mathbf{j}\in\mathbf{I}_1 : 2^{l-1}p \leq j_1 < 2^l p} \left(\sum_{\substack{\mathbf{i}\in\mathbf{I}_1 : \mathbf{i}_{\{1\}'} = \mathbf{j}_{\{1\}'} \\ 2^{l-1}p \leq i_1 < 2^l p}} a_{\mathbf{i}} (X_{i_1}^{(1)} - C_0) \right)_+ \right\|_p \leq \frac{Cld}{2^{l-1}} \sum_{\mathbf{i}\in\mathbf{I}} a_{\mathbf{i}}.$$

Zatem

$$\begin{aligned} & p^{d-1} \sum_{l > p^{1/3}} \left\| \max_{\mathbf{j}\in\mathbf{I}_1 : 2^{l-1}p \leq j_1 < 2^l p} \left(\sum_{\substack{\mathbf{i}\in\mathbf{I}_1 : \mathbf{i}_{\{1\}'} = \mathbf{j}_{\{1\}'} \\ 2^{l-1}p \leq i_1 < 2^l p}} a_{\mathbf{i}} (X_{i_1}^{(1)} - C_0) \right)_+ \right\|_p \\ \leq \; & p^{d-1} \sum_{l > p^{1/3}} \frac{Cld}{2^{l-1}} \sum_{\mathbf{i}\in\mathbf{I}} a_{\mathbf{i}} \leq C\,(d) \sum_{\mathbf{i}\in\mathbf{I}} a_{\mathbf{i}}. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Wreszcie, z (2.20), (2.23) i (2.24) dostajemy (2.19), co kończy dowód Twierdzenia 4. ■

3 Oszacowania momentów i ogonów chaosów generowanych przez nieujemne zmienne dwupunktowe i ich zastosowanie w modelu dwumianowym grafu losowego

W tym rozdziale zajmujemy się szacowaniem momentów i ogonów chaosów $\Delta_d = \sum a_{i_1,...,i_d} X_{i_1}^{(1)} ... X_{i_d}^{(d)}$ o nieujemnych współczynnikach $a_{i_1,...,i_d}$, generowanych przez niezależne zmienne dwupunktowe o rozkładzie

$$P\left(X_i^{(r)} = 1\right) = 1 - P\left(X_i^{(r)} = 0\right) = \alpha \in (0;1)\,.$$

Niniejszy rozdział zorganizowany jest w następujący sposób.

W pierwszym podrozdziale, korzystając z Twierdzenia 3 (Latały) podajemy, z dokładnością do uniwersalnych stałych, oszacowania momentów kombinacji liniowych o dodatnich współczynnikach zmiennych $X_i^{(1)}$.

W drugim podrozdziale zajmujemy się oszacowaniami momentów form wieloliniowych od zmiennych $X_i^{(r)}$.

W trzecim podrozdziale stosujemy otrzymane w poprzednich podrozdziałach rezultaty do udowodnienia semihiperkontraktywnych własności chaosu generowanego przez niezależne zmienne dwupunktowe i stosujemy je w modelu dwumianowym grafu losowego.

Z semihiperkontrakcji wynikają, w standardowy sposób, przez użycie nierówności Czebyszewa i nierówności Paleya-Zygmunda, dwustronne oszacowania na ogony wyrażone w terminach momentów. My zastosujemy tę technikę do identyfikacji wielkości pojawiających się w badaniu prawdopodobieństw odchyleń liczby małych podgrafów ponad wielokrotności jej wartości oczekiwanej w klasycznym, dwumianowym modelu grafu losowego (o pewnym innym modelu była mowa w jednej z uwag poprzedniego rozdziału). Nieco inne techniki do badania tych prawdopodobieństw rozwinęli Janson, Oleszkiewicz i Ruciński w [14].

Technika oparta na semihiperkontrakcji pozwoliła ulepszyć nieco wyniki autorów [14] w przypadku małych podgrafów będących np. gwiazdami lub trójkątami, o czym mowa jest w czwartym podrozdziale.

3.1 Oszacowania momentów kombinacji liniowych nieujemnych zmiennych dwupunktowych

Cały czas będziemy w tym rozdziale stosować tę samą konwencję dotyczącą liter c i C którą stosowaliśmy w rozdziale poprzednim.

Relacja $A \sim B$, podobnie jak poprzednio oznacza, że zachodzą nierówności $cA \leq B \leq CA$, α będzie oznaczać pewną liczbę z przedziału $(0; e^{-16}]$.

Przez $X_1, X_2, ..., X_n$ będziemy teraz oznaczać niezależne zmienne losowe o rozkładzie dwupunktowym

$$P(X_i = 1) = 1 - P(X_i = 0) = \alpha.$$

Niech $a_1, a_2, ..., a_n$ będą liczbami dodatnimi. Udowodnimy następujące twierdzenie dotyczące szacowania momentów zmiennej $\Delta = \sum_i a_i X_i$.

Twierdzenie 6 *Dla* $p \geq 1$ *zachodzi*

$$\|\Delta\|_p \sim \sup\left\{\sum a_i b_i : \sum m^*(b_i) \leq 1\right\},$$

gdzie

$$m^*(\lambda) = \begin{cases} 0 \text{ gdy } 0 \leq \lambda \leq e\alpha, \\ \frac{\lambda}{p} \ln \frac{\lambda}{e\alpha} \text{ gdy } \alpha e < \lambda \leq 1, \\ +\infty \text{ gdy } 1 < \lambda, \end{cases}$$

jeżeli $p \geq \ln \frac{1}{\alpha}$ *oraz*

$$m^*(\lambda) = \begin{cases} 0 \text{ gdy } 0 \leq \lambda \leq \alpha e, \\ \frac{\lambda}{p} \ln \frac{\lambda}{e\alpha} \text{ gdy } \alpha e < \lambda \leq \alpha e^p, \\ \frac{p-1}{p} (\alpha e^p)^{-\frac{1}{p-1}} \lambda^{\frac{p}{p-1}} \text{ gdy } \alpha e^p < \lambda, \end{cases}$$

jeżeli $p < \ln \frac{1}{\alpha}$.

Dowód. Zastosujemy Twierdzenie 3 (Latały) z rozdziału 1. Z tego ogólnego twierdzenia wynika w szczególności dla $p \geq 1$ następujące oszacowanie

$$\|\Delta\|_p \sim t,$$

gdzie t jest liczbą, dla której zachodzi równość

$$\sum_i \ln\left(1 - \alpha + \alpha\left(1 + \frac{a_i}{t}\right)^p\right) = p.$$

Oszacujemy liczbę t zastępując skomplikowaną funkcję $\ln\left(1 - \alpha + \alpha\left(1 + \frac{a}{t}\right)^p\right)$ prostszą funkcją ϕ o tej własności, że dla $x > 0$

$$\phi(cx) \leq \ln(1 - \alpha + \alpha(1+x)^p) \leq \phi(Cx). \tag{3.1}$$

Rozpatrzmy dwa przypadki. c_i, C_i, $i = 1, ..., 9$, będą oznaczać stałe dodatnie, przy czym $c_i \leq 1, C_i \geq 1$.

Przypadek 1. $0 \leq x \leq 1$. W tym przypadku

$$pc_1 x e^{pc_1 x} \leq (1+x)^p - 1 \leq pC_1 x e^{pC_1 x}. \tag{3.2}$$

Uzasadnienie. Dla $0 \leq x \leq 1$ zachodzi nierówność $c_2 x \leq \ln(1+x) \leq C_2 x$ (np. $(\ln 2)\, x \leq \ln(1+x) \leq x$), zatem

$$\begin{aligned} pc_2 x &\leq \ln(1+x)^p \leq pC_2 x, \\ e^{pc_2 x} &\leq (1+x)^p \leq e^{pC_2 x}. \end{aligned}$$

Dalej, istnieją takie stałe c_3, C_3, że dla dowolnego $y \geq 0$,

$$c_3 y e^{c_3 y} \leq e^y - 1 \leq C_3 y e^{C_3 y}$$

(np. $e^{y/2} y/2 \leq e^{y/2}\left(e^{y/2} - 1\right) \leq e^y - 1 = \int_o^y e^x dx \leq y e^y$). Zatem dla $c_1 = c_2 c_3$, $C_1 = C_2 C_3$

$$\begin{aligned} pc_1 x e^{pc_1 x} &= pc_2 c_3 x e^{pc_2 c_3 x} \leq e^{pc_2 x} - 1 \\ &\leq (1+x)^p - 1 \\ &\leq e^{pC_2 x} - 1 \leq pC_2 C_3 x e^{pC_2 C_3 x} = pC_1 x e^{pC_1 x}. \end{aligned}$$

Uwaga. Można przyjąć, że $c_1 = \frac{1}{2}\ln 2$ oraz $C_1 = 1$.
Rozpatrzmy teraz wyrażenie

$$\ln\left(1 - \alpha + \alpha\,(1+x)^p\right) = \ln\left(1 + \alpha\left[(1+x)^p - 1\right]\right).$$

Cały czas będziemy zakładać, że $\frac{e}{c_1} \leq \frac{1}{2}\ln\frac{1}{\alpha}$ oraz $0 \leq x \leq 1$. (Założenie to jest prawdziwe dla $\alpha \leq e^{-16}$ oraz $c_1 = \frac{1}{2}\ln 2$.) Mamy następujące podprzypadki

1.1. Jeżeli $0 \leq x \leq \frac{e}{c_1 p}$, wówczas, korzystając z (3.2), dostajemy nierówności

$$\begin{aligned} \ln\left(1 + \alpha\left[(1+x)^p - 1\right]\right) &\leq \ln\left(1 + \alpha p C_1 x e^{pC_1 x}\right) \leq \alpha p C_4 x, \\ \ln\left(1 + \alpha\left[(1+x)^p - 1\right]\right) &\geq \ln\left(1 + \alpha p c_1 x e^{pc_1 x}\right) \geq \alpha p c_4 x \end{aligned}$$

(skorzystaliśmy z nierówności $c_1 \alpha p x \leq e\alpha \leq 1$).

1.2. Jeżeli $\frac{e}{c_1 p} \leq x \leq \frac{1}{2p}\ln\frac{1}{\alpha}$ wówczas, korzystając z (3.2) otrzymujemy

$$\ln\left(1 + \alpha\left[(1+x)^p - 1\right]\right) \leq \ln\left(1 + \alpha p C_1 x e^{pC_1 x}\right) \leq \alpha p C_1 x e^{pC_1 x} \leq \alpha e^{pC_5 x}$$

(skorzystaliśmy z nierówności $pC_1 x \leq e^{pC_1 x}$), oraz

$$\ln\left(1 + \alpha\left[(1+x)^p - 1\right]\right) \geq \ln\left(1 + \alpha p c_1 x e^{pc_1 x}\right) \geq (\ln 2)\, \alpha p c_1 x e^{pc_1 x} \geq \alpha e^{pc_5 x}$$

(skorzystaliśmy z nierówności $\alpha p c_1 x e^{pc_1 x} \le \alpha e^{2pc_1 x} \le 1$, $pc_1 x \ge e \ge 1/\ln 2$).

1.3. Jeżeli $\frac{1}{2p}\ln\frac{1}{\alpha} \le x \le 1$ wówczas, korzystając ponownie z (3.2) mamy

$$\begin{aligned} \ln\left(1+\alpha\left[(1+x)^p-1\right]\right) &\le \ln\left(1+\alpha p C_1 x e^{pC_1 x}\right) \le \ln\left(\alpha e e^{2pC_1 x}\right) \\ &\le \ln(e\alpha) + pC_6 x \end{aligned}$$

(skorzystaliśmy z nierówności $\alpha e^{2px} \ge 1$), oraz

$$\begin{aligned} \ln\left(1+\alpha\left[(1+x)^p-1\right]\right) &\ge \ln\left(1+\alpha p c_1 x e^{pc_1 x}\right) \ge \ln\left(\alpha e e^{pc_1 x}\right) \\ &\ge \ln(e\alpha) + pc_6 x \end{aligned}$$

(skorzystaliśmy z nierówności $pc_1 x \ge e$ wynikającej z nierówności $x \ge \frac{1}{2p}\ln\frac{1}{\alpha}$).

Przypadek 2. $x \ge 1$. W tym przypadku

$$(c_7 x)^p \le (1+x)^p - 1 \le (C_7 x)^p\,.$$

Uzasadnienie. Dla $x \ge 1$, $(1+x)^p - 1 \ge x^p$, $(1+x)^p - 1 \le (2x)^p$.
Rozpatrzmy podprzypadki

2.1. Jeżeli $1 \le x \le e^{\frac{1}{p}\ln\frac{1}{\alpha}}$, wówczas

$$\begin{aligned} \ln\left(1+\alpha\left[(1+x)^p-1\right]\right) &\le \ln\left(1+\alpha (C_7 x)^p\right) \le \alpha (C_7 x)^p \le \alpha e^{p\ln(eC_8 x)}, \\ \ln\left(1+\alpha\left[(1+x)^p-1\right]\right) &\ge \ln\left(1+\alpha (c_7 x)^p\right) \ge (\ln 2)\,\alpha (c_7 x)^p \ge \alpha e^{p\ln(ec_8 x)} \end{aligned}$$

(skorzystaliśmy z nierówności $\alpha (c_7 x)^p \le 1$).

2.2 Jeżeli $e^{\frac{1}{p}\ln\frac{1}{\alpha}} \le x$ wówczas

$$\begin{aligned} \ln\left(1+\alpha\left[(1+x)^p-1\right]\right) &\le \ln\left(1+\alpha (C_7 x)^p\right) \le \ln\left(e\alpha (C_7 x)^p\right) \\ &\le \ln(e\alpha) + p\ln(eC_9 x)\,, \\ \ln\left(1+\alpha\left[(1+x)^p-1\right]\right) &\ge \ln\left(1+\alpha (c_7 x)^p\right) \ge \ln\left(e\alpha (c_7 x/e)^p\right) \\ &\ge \ln(e\alpha) + p\ln(ec_9 x)\,. \end{aligned}$$

Zdefiniujmy dwie funkcje

$$g(x) = \begin{cases} x \text{ jeżeli } 0 \le x \le 1, \\ \ln ex \text{ jeżeli } 1 < x; \end{cases}$$

$$f_\alpha(y) = \begin{cases} \alpha e y \text{ jeżeli } 0 \le y \le 1, \\ \alpha e^y \text{ jeżeli } 1 < y \le \ln\frac{1}{\alpha}, \\ \ln e\alpha + y \text{ jeżeli } \ln\frac{1}{\alpha} < y. \end{cases}$$

Zauważmy, że g oraz f_a są różniczkowalne na R_+.

Z rozważenia przypadków 1 i 2 wynika, że dla funkcji ϕ zdefiniowanej formułą

$$\phi(x) = f_\alpha(pg(x))$$

zachodzi (3.1). Zatem, zgodnie z Twierdzeniem 3, $\|\Delta\|_p \sim t$, gdzie t jest rozwiązaniem równania

$$\sum_i p^{-1}\phi\left(\frac{a_i}{t}\right) = 1. \tag{3.3}$$

Dla $p \geq \ln\frac{1}{\alpha}$ mamy

$$\begin{aligned} p^{-1}\phi(x) &= \begin{cases} p^{-1}\alpha epg(x) \text{ jeżeli } pg(x) \leq 1, \\ p^{-1}\alpha\exp(pg(x)) \text{ jeżeli } 1 < pg(x) \leq \ln\alpha^{-1}, \\ p^{-1}\ln e\alpha + g(x) \text{ jeżeli } \ln\alpha^{-1} < pg(x), \end{cases} \\ &= \begin{cases} \alpha ex \text{ jeżeli } x \leq \frac{1}{p}, \\ p^{-1}\alpha\exp(px) \text{ jeżeli } \frac{1}{p} < x \leq \frac{1}{p}\ln\alpha^{-1}, \\ p^{-1}\ln e\alpha + x \text{ jeżeli } \ln\alpha^{-1/p} < x \leq 1, \\ p^{-1}\ln e\alpha + \ln(ex) \text{ jeżeli } 1 < x. \end{cases} \end{aligned}$$

Niech x_0 będzie liczbą, dla której

$$p^{-1}\phi(x_0) = 1.$$

Korzystając z nierówności $e^{-1} > e^{-16} \geq \alpha > e^{-p}$, obliczamy

$$p^{-1}\ln e\alpha + \ln ex_0 = \ln e,$$

$$(e\alpha)^{1/p}\, ex_0 = e,$$

$$1 \leq x_0 = (e\alpha)^{-1/p} \leq e^{-1/p}e \leq e.$$

Z ostatniej nierówności wynika, że $e^{-1}t_0 \leq t \leq t_0$, gdzie t_0 spełnia równanie

$$\sum_i m\left(\frac{a_i}{t_0}\right) = 1,$$

zaś funkcja m zdefiniowana jest następująco

$$m(x) = \begin{cases} \alpha ex \text{ jeżeli } 0 \leq x \leq \frac{1}{p}, \\ p^{-1}\alpha\exp(px) \text{ jeżeli } \frac{1}{p} < x \leq \frac{1}{p}\ln\alpha^{-1}, \\ p^{-1}\ln e\alpha + x \text{ jeżeli } \frac{1}{p}\ln\alpha^{-1} < x; \end{cases}$$

czyli w przedziale $[0; 1]$ zachodzi równość $m(x) = p^{-1}\phi(x)$. Funkcja m jest wypukła, mamy bowiem

$$m'(x) = \begin{cases} \alpha e \text{ jeżeli } 0 \leq x \leq \frac{1}{p}, \\ \alpha\exp(px) \text{ jeżeli } \frac{1}{p} < x \leq \frac{1}{p}\ln\alpha^{-1}, \\ 1 \text{ jeżeli } \frac{1}{p}\ln\alpha^{-1} < x. \end{cases}$$

Z tego wynika (por. [17], str. 80), że

$$t_0 \sim \sup\left\{\sum_i a_i b_i : \sum_i m^*\left(b_i\right) \leq 1\right\},$$

gdzie m^* oznacza funkcję sprzężoną do funkcji wypukłej m, zdefiniowaną wzorem $m^*\left(\lambda\right) = \sup_{x\geq 0}\left\{\lambda x - m\left(x\right)\right\}$. Funkcję m^* można wyrazić za pomocą jawnych wzorów, mianowicie

$$m^*\left(\lambda\right) = \begin{cases} 0 \text{ dla } 0 \leq \lambda \leq \alpha e, \\ \frac{\lambda}{p}\ln\frac{\lambda}{e\alpha} \text{ dla } \alpha e < \lambda \leq 1, \\ +\infty \text{ dla } 1 < \lambda. \end{cases}$$

Choć nie będziemy dalej korzystali z oszacowań $\left\|\Delta\right\|_p$ w przypadku, gdy $p < \ln\frac{1}{\alpha}$, to dla pełności udowodnimy formułę szacującą momenty Δ i w tym przypadku.

W tym przypadku również zachodzi (3.1), dla funkcji ϕ zdefniowanej poprzednio, inaczej jednak oblicza się jej wartości, mianowicie

$$\begin{aligned} p^{-1}\phi\left(x\right) &= \begin{cases} p^{-1}\alpha epg\left(x\right) \text{ jeżeli } pg\left(x\right) \leq 1, \\ p^{-1}\alpha\exp\left(pg\left(x\right)\right) \text{ jeżeli } 1 < pg\left(x\right) \leq \ln\alpha^{-1}, \\ p^{-1}\ln e\alpha + g\left(x\right) \text{ jeżeli } \ln\alpha^{-1} < pg\left(x\right), \end{cases} \\ &= \begin{cases} \alpha ex \text{ jeżeli } x \leq \frac{1}{p}, \\ p^{-1}\alpha\exp\left(px\right) \text{ jeżeli } \frac{1}{p} < x \leq 1, \\ p^{-1}\alpha\left(ex\right)^p \text{ jeżeli } 1 < x \leq e^{-1}\alpha^{-1/p}, \\ p^{-1}\ln e\alpha + \ln\left(ex\right) \text{ jeżeli } e^{-1}\alpha^{-1/p} < x. \end{cases} \end{aligned}$$

Niech x_0 będzie liczbą, dla której

$$p^{-1}\phi\left(x_0\right) = 1.$$

Obliczamy

$$p^{-1}\ln e\alpha + \ln ex_0 = \ln e,$$
$$\left(e\alpha\right)^{1/p} ex_0 = e,$$
$$e^{-1}\alpha^{-1/p} \leq x_0 = \left(e\alpha\right)^{-1/p} \leq ee^{-1}\alpha^{-1/p}.$$

Z ostatniej nierówności wynika, że $e^{-1}t_0 \leq t \leq t_0$, gdzie t_0 spełnia równanie

$$\sum_i m\left(\frac{a_i}{t_0}\right) = 1$$

zaś funkcja m zdefiniowana jest następująco

$$m(x) = \begin{cases} \alpha e x \text{ jeżeli } 0 \leq x \leq \frac{1}{p}, \\ p^{-1}\alpha \exp(px) \text{ jeżeli } \frac{1}{p} < x \leq 1, \\ p^{-1}\alpha (ex)^p \text{ jeżeli } 1 < x, \end{cases}$$

czyli w przedziale $\left[0; e^{-1}\alpha^{-1/p}\right]$ zachodzi równość $m(x) = p^{-1}\phi(x)$. Funkcja m jest wypukła, mamy bowiem

$$m'(x) = \begin{cases} \alpha e \text{ jeżeli } 0 \leq x \leq \frac{1}{p}, \\ \alpha \exp(px) \text{ jeżeli } \frac{1}{p} < x \leq 1, \\ \alpha e (ex)^{p-1} \text{ jeżeli } 1 < x, \end{cases}$$

z tego wynika, że

$$t_0 \sim \sup \left\{ \sum_i a_i b_i : \sum_i m^*(b_i) \leq 1 \right\},$$

gdzie $m^*(\lambda) = \sup_{x \geq 0} \{\lambda x - m(x)\}$. Funkcję m^* można wyrazić za pomocą jawnych wzorów, mianowicie

$$m^*(\lambda) = \begin{cases} 0 \text{ dla } 0 \leq \lambda \leq \alpha e, \\ \frac{1}{p}\left(\ln \frac{\lambda}{\alpha} - 1\right)\lambda \text{ dla } \alpha e < \lambda \leq \alpha e^p, \\ \frac{p-1}{p}(\alpha e^p)^{-\frac{1}{p-1}} \lambda^{\frac{p}{p-1}} \text{ dla } \alpha e^p < \lambda. \end{cases}$$

■

3.2 Oszacowania momentów wielowymiarowych chaosów generowanych przez nieujemne zmienne dwupunktowe

3.2.1 Pewien przykład

Udowodnione w poprzednim podrozdziale dla $p \geq \ln \frac{1}{\alpha}$ szacowanie

$$\|\Delta\|_p \sim \sup \left\{ \sum a_i b_i : \sum m^*(b_i) \leq 1 \right\},$$

gdzie

$$m^*(\lambda) = \begin{cases} 0 \text{ gdy } 0 \leq \lambda \leq e\alpha, \\ \frac{\lambda}{p} \ln \frac{\lambda}{e\alpha} \text{ gdy } \alpha e < \lambda \leq 1, \\ +\infty \text{ gdy } 1 < \lambda, \end{cases}$$

jest równoważne z dokładnością do uniwersalnych stałych z następującym szacowaniem

$$\|\Delta\|_p \sim \sup\left\{\sum a_i\left(\alpha+b_i\right) : \sum M_\alpha\left(b_i\right) \le p\right\}, \tag{3.4}$$

gdzie funkcja wypukła M_α zdefiniowana jest następująco

$$M_\alpha\left(x\right) = \begin{cases} \left(\alpha+x\right)\ln\left(1+\frac{x}{\alpha}\right) \text{ gdy } 0 < x \le 1, \\ +\infty \text{ gdy } 1 < x. \end{cases}$$

Istnieje duże podobieństwo pomiędzy powyższą formułą na momenty liniowych kombinacji o nieujemnych współczynnikach a_i zmiennych dwupunktowych a formułą na momenty liniowych kombinacji dodatnich zmiennych losowych z logarytmicznie wklęsłymi ogonami:

$$\|S\|_p \sim \sup\left\{\sum a_i\left(1+b_i\right) : \sum N_i\left(b_i\right) \le p\right\}. \tag{3.5}$$

Definicja N_i - zob. podrozdział 2.1. Jak widzieliśmy w rozdziale pierwszym, formuła (3.5) w naturalny sposób przenosi się na wyższe wymiary, niestety nie jest tak w przypadku formuły (3.4). Udowodnimy, że nie dla każdego chaosu $\Delta_2 = \sum a_{ij}X_iY_j$ generowanego przez $X_i, Y_j, 1 \le i,j \le n,$ - niezależne zmienne dwupunktowe o rozkładzie $P\left(X_i=1\right) = P\left(Y_j=1\right) = \alpha$, $P\left(X_i=0\right) = P\left(Y_j=0\right) = 1-\alpha$ zachodzi formuła

$$\|\Delta_2\|_p \sim \sup\left\{\sum a_{ij}\left(\alpha+b_i\right)\left(\alpha+c_j\right) : \sum M_\alpha\left(b_i\right) \le p, \sum M_\alpha\left(c_j\right) \le p\right\}. \tag{3.6}$$

Przykład jest następujący. Niech $\Delta_2 = \sum_{i=1}^n X_iY_i$. Załóżmy, że $p \ge 2\ln\frac{1}{\alpha}$, wówczas, ponieważ zmienna Δ_2 jest sumą n niezależnych zmiennych X_iY_i o rozkładzie dwupunktowym $P\left(X_iY_i=1\right) = 1-P\left(X_iY_i=0\right) = \alpha^2$, więc zgodnie z (3.4)

$$\|\Delta_2\|_p \sim \sup\left\{\sum_{i=1}^n\left(\alpha^2+d_i\right) : \sum_{i=1}^n M_{\alpha^2}\left(d_i\right) \le p\right\}.$$

Niech $M_{\alpha^2}^{-1}$ oznacza funkcję odwrotną do funkcji M_{α^2} ograniczonej do przedziału $[0;1]$. Załóżmy, że $p \le n$, wówczas, z wypukłości M_{α^2}, otrzymujemy

$$\|\Delta_2\|_p \sim \sup\left\{\sum_{i=1}^n\left(\alpha^2+d_i\right) : \sum_{i=1}^n M_{\alpha^2}\left(d_i\right) \le p\right\} = n\alpha^2 + nM_{\alpha^2}^{-1}\left(\frac{p}{n}\right).$$

Z drugiej strony rozważmy wyrażenie

$$\sup\left\{\sum_{i=1}^n\left(\alpha+b_i\right)\left(\alpha+c_i\right) : \sum_{i=1}^n M_\alpha\left(b_i\right) \le p, \sum_{i=1}^n M_\alpha\left(c_i\right) \le p\right\}.$$

Z nierówności Schwarza

$$\sup\left\{\sum_{i=1}^{n} b_i c_i : \sum_{i=1}^{n} M_\alpha\left(b_i\right) \le p, \sum_{i=1}^{n} M_\alpha\left(c_i\right) \le p\right\}$$

$$\le \sup\left\{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} c_i^2} : \sum_{i=1}^{n} M_\alpha\left(b_i\right) \le p, \sum_{i=1}^{n} M_\alpha\left(c_i\right) \le p\right\}$$

$$= \sup\left\{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2} : \sum_{i=1}^{n} M_\alpha\left(b_i\right) \le p\right\}^2 = \sup\left\{\sum_{i=1}^{n} b_i^2 : \sum_{i=1}^{n} M_\alpha\left(b_i\right) \le p\right\}$$

$$= \sup\left\{\sum_{i=1}^{n} B_i : \sum_{i=1}^{n} M_\alpha\left(\sqrt{B_i}\right) \le p\right\} \sim \frac{p}{\ln\left(1/\alpha\right)}.$$

Ostatnia relacja wynika z wklęsłości funkcji $x \mapsto M_\alpha\left(\sqrt{x}\right)$ na przedziale $[0;1]$ i z tego, że $M_\alpha\left(1\right) \sim \ln\frac{1}{\alpha}$. Stąd mamy

$$\sup\left\{\sum_{i=1}^{n} \left(\alpha + b_i\right)\left(\alpha + c_i\right) : \sum_{i=1}^{n} M_\alpha\left(b_i\right) \le p, \sum_{i=1}^{n} M_\alpha\left(c_i\right) \le p\right\}$$

$$\sim n\alpha^2 + n\alpha M_\alpha^{-1}\left(\frac{p}{n}\right) + \frac{p}{\ln\left(1/\alpha\right)}.$$

Gdyby zatem zachodziło oszacowanie z góry

$$\left\|\Delta_2\right\|_p \le C \sup\left\{\sum_{i=1}^{n} \left(\alpha + b_i\right)\left(\alpha + c_i\right) : \sum_{i=1}^{n} M_\alpha\left(b_i\right) \le p, \sum_{i=1}^{n} M_\alpha\left(c_i\right) \le p\right\},$$

to istniałaby taka liczba C, że dla $2\ln\frac{1}{\alpha} \le p \le n$ mielibyśmy

$$n\alpha^2 + nM_{\alpha^2}^{-1}\left(\frac{p}{n}\right) \le C\left(n\alpha^2 + n\alpha M_\alpha^{-1}\left(\frac{p}{n}\right) + \frac{p}{\ln\left(1/\alpha\right)}\right).$$

Stąd

$$M_{\alpha^2}^{-1}\left(\frac{p}{n}\right) \le C\left(\alpha^2 + \alpha M_\alpha^{-1}\left(\frac{p}{n}\right) + \frac{p}{n\ln\left(1/\alpha\right)}\right).$$

Zauważmy, że składnik $\frac{p}{n\ln(1/\alpha)}$ po prawej stronie powyższej nierówności dominuje składnik $\alpha M_\alpha^{-1}\left(\frac{p}{n}\right) \le \alpha\frac{p}{n}$, zatem powyższa nierówność implikuje

$$M_{\alpha^2}^{-1}\left(\frac{p}{n}\right) \le C\left(\alpha^2 + \frac{p}{n\ln\left(1/\alpha\right)}\right),$$

$$\frac{p}{n} \le C\left(\alpha^2 + \frac{p}{n\ln\left(1/\alpha\right)}\right)\ln\left(C + C\frac{p}{\alpha^2 n\ln\left(1/\alpha\right)}\right).$$

Niech $n = p/\left(\alpha^2 \ln(1/\alpha)\right)$. Wówczas, oznaczając $\kappa = p/n = \alpha^2 \ln(1/\alpha)$ mielibyśmy

$$\begin{aligned}\alpha^2 \ln(1/\alpha) &= \kappa \le C\left(\alpha^2 + \frac{\kappa}{\ln(1/\alpha)}\right)\ln\left(C + C\frac{\kappa}{\alpha^2\ln(1/\alpha)}\right)\\ &\le C\alpha^2 \ln C,\end{aligned}$$

jednak dla dostatecznie małych α powyższa nierówność nie może być prawdziwa, zatem oszacowanie

$$\|\Delta_2\|_p \sim \sup\left\{\sum(\alpha+b_i)(\alpha+c_i) : \sum M_\alpha(b_i) \le p, \sum M_\alpha(c_i) \le p\right\}$$

nie zachodzi.

3.2.2 Oszacowanie momentów chaosów wielowymiarowych

Zacznijmy od notacji. Cały czas będziemy stosować tę samą konwencję dotyczącą liter $c(d), C(d)$ oraz analogiczne oznaczenia jak w rozdziale 2. Dla $p > 0$ ponadto zdefiniujmy

$$B_p = \left\{(x_i) : 0 \le x_i \le 1, \sum x_i \le p\right\}.$$

Jak wykazaliśmy w poprzednim ustępie oszacowanie (3.6) nie zachodzi. Poniżej udowodnimy jednak pewne dwustronne oszacowania na momenty chaosu wielowymiarowego $\Delta_d = \sum a_{\mathbf{i}} X_{i_1}^{(1)} \cdots X_{i_d}^{(d)}$ o nieujemnych współczynnikach $a_{\mathbf{i}}$. Zachodzi następujące twierdzenie.

Twierdzenie 7 *Niech $\alpha \in (0; e^{-16}]$, $p \ge (d+1)\ln\frac{1}{\alpha}$ i niech $X_i^{(r)}, 1 \le i \le n, 1 \le r \le d$, będą zmiennymi o rozkładzie $P\left(X_i^{(r)} = 1\right) = 1 - P\left(X_i^{(r)} = 0\right) = \alpha$. Dla chaosu $\Delta_d = \sum a_{\mathbf{i}} X_{i_1}^{(1)} \cdots X_{i_d}^{(d)}$ o nieujemnych współczynnikach $a_{\mathbf{i}}$, generowanego przez $X_i^{(r)}$, zachodzą oszacowania*

$$\begin{aligned}\|\Delta_d\|_p &\le C(d) \sum_{I \subset \{1,2,\ldots,d\}} \alpha^{d-\#I}\left(\ln\frac{1}{\alpha}\right)^{\#I} \sup_{x^{(r)} \in B_{p/\ln\frac{1}{\alpha}}, r \in I} \sum a_{\mathbf{i}} \prod_{r \in I} x_{i_r}^{(r)},\\ \|\Delta_d\|_p &\ge c(d) \sum_{I \subset \{1,2,\ldots,d\}} \alpha^{d-\#I} \sup_{x^{(r)} \in B_{p/\ln\frac{1}{\alpha}}, r \in I} \sum a_{\mathbf{i}} \prod_{r \in I} x_{i_r}^{(r)}.\end{aligned}$$

(W sumach powyżej składnik odpowiadający $I = \emptyset$ jest równy $\alpha^d \sum a_i$.)

Uwaga. Ponieważ odwzorowanie $\alpha \mapsto \|\Delta_d\|_p$ jest funkcją rosnącą parametru α, więc powyższe oszacowania można jeszcze wzmocnić w sposób następujący

$$\begin{aligned}\|\Delta_d\|_p &\leq C(d) \inf_{e^{-16}\geq\beta\geq\alpha} \sum_{I\subset\{1,2,\ldots,d\}} \beta^{d-\#I} \left(\ln\frac{1}{\beta}\right)^{\#I} \sup_{x^{(r)}\in B_{p/\ln\frac{1}{\beta}}, r\in I} \sum a_{\mathbf{i}} \prod_{r\in I} x_{i_r}^{(r)},\\ \|\Delta_d\|_p &\geq c(d) \sup_{0<\beta\leq\alpha} \sum_{I\subset\{1,2,\ldots,d\}} \beta^{d-\#I} \sup_{x^{(r)}\in B_{p/\ln\frac{1}{\beta}}, r\in I} \sum a_{\mathbf{i}} \prod_{r\in I} x_{i_r}^{(r)}.\end{aligned}$$

Przejdźmy wpierw do dowodu oszacowania z dołu. W podrozdziale 3.1 dla liniowych kombinacji zmiennych X_i o nieujemnych współczynnikach udowodniliśmy następujące szacowania:

$$\|\Delta\|_p \geq c\sup\left\{\sum a_i(\alpha+x_i) : 0\leq x_i\leq 1, \sum (x_i+\alpha)\ln\left(1+\frac{x_i}{\alpha}\right)\leq p\right\}, \tag{3.7}$$

$$\|\Delta\|_p \leq C\sup\left\{\sum a_i(\alpha+x_i) : 0\leq x_i\leq 1, \sum (x_i+\alpha)\ln\left(1+\frac{x_i}{\alpha}\right)\leq p\right\}. \tag{3.8}$$

Zauważmy, że dla $x\in[0;1]$ zachodzi nierówność

$$x \leq (x+\alpha)\ln\left(1+\frac{x}{\alpha}\right) \leq 2\left(\ln\frac{1}{\alpha}\right)x \tag{3.9}$$

(mamy bowiem $\frac{d}{dx}\left\{(x+\alpha)\ln\left(1+\frac{x}{\alpha}\right)\right\} = 1+\ln\left(1+\frac{x}{\alpha}\right) \in \left[1, 2\ln\frac{1}{\alpha}\right]$ dla $x\in[0;1]$, $\alpha\leq e^{-16}$). Z (3.9) i z (3.7) otrzymujemy

$$\begin{aligned}&\frac{1}{c}\left\|\sum a_i X_i\right\|_p\\ &\quad\geq \sup\left\{\sum a_i(\alpha+x_i) : 0\leq x_i\leq 1, \sum (x_i+\alpha)\ln\left(1+\frac{x_i}{\alpha}\right)\leq p\right\}\\ &\quad\geq \sup\left\{\sum a_i(\alpha+x_i) : 0\leq x_i\leq 1, \sum 2\left(\ln\frac{1}{\alpha}\right)x_i\leq p\right\}\\ &\quad\geq \frac{1}{2}\sup\left\{\sum a_i(\alpha+x_i) : (x_i)\in B_{p/\ln\frac{1}{\alpha}}\right\}.\end{aligned}$$

Iterując powyższą nierówność (podstawiając w miejsce X_i kolejno $X_i^{(d)}, \ldots, X_i^{(1)}$) dostajemy

$$
\begin{aligned}
\|\Delta_d\|_p &= \left\|\sum a_{\mathbf{i}} X^{(1)}_{i_1}\cdots X^{(d)}_{i_d}\right\|_p \\
&= \left(E_{1,\ldots,d-1}\left(\left(E_d\left(\sum a_{\mathbf{i}} X^{(1)}_{i_1}\cdots X^{(d)}_{i_d}\right)^p\right)^{1/p}\right)^p\right)^{1/p} \\
&\geq \left(E_{1,\ldots,d-1}\left(c\sup_{x^{(d)}\in B_{p/\ln\frac{1}{\alpha}}}\sum a_{\mathbf{i}} X^{(1)}_{i_1}\cdots X^{(d-1)}_{i_{d-1}}\left(\alpha+x^{(d)}_{i_d}\right)\right)^p\right)^{1/p} \\
&\geq c\sup_{x^{(d)}\in B_{p/\ln\frac{1}{\alpha}}}\left\|\sum a_{\mathbf{i}} X^{(1)}_{i_1}\cdots X^{(d-1)}_{i_{d-1}}\left(\alpha+x^{(d)}_{i_d}\right)\right\|_p \\
&\geq \ldots \geq c^d \sup_{x^{(r)}\in B_{p/\ln\frac{1}{\alpha}},r=1,2,\ldots,d}\sum a_{\mathbf{i}}\prod_{r=1}^{d}\left(\alpha+x^{(j)}_{i_j}\right) \\
&\geq c^d \sum_{I\subset\{1,2,\ldots,d\}}\alpha^{d-\#I}\sup_{x^{(r)}\in B_{p/\ln\frac{1}{\alpha}},r\in I}\sum a_{\mathbf{i}}\prod_{r\in I}x^{(r)}_{i_r}.
\end{aligned}
$$

co daje dowodzone oszacowanie z dołu.

W celu udowodnienia oszacowania z góry przeprowadzimy rozumowanie indukcyjne względem rzędu d. Zauważmy wpierw, że można założyć, że dla współczynników $a_{\mathbf{i}}$ i dla $1\leq r\leq d$ zachodzi implikacja

$$
\text{jeżeli } i<j \text{ to } \sum_{\mathbf{i}:i_r=i}a_{\mathbf{i}}\geq\sum_{\mathbf{i}:i_r=j}a_{\mathbf{i}}. \tag{3.10}
$$

Zauważmy teraz, że

$$
\|\Delta_d\|_p\leq\sum_{r\in\{1,\ldots,d\}}\left\|\sum_{\mathbf{i}:i_r>p/\alpha^d}a_{\mathbf{i}}X^{(1)}_{i_1}\cdots X^{(d)}_{i_d}\right\|_p+\left\|\sum_{\mathbf{i}:i_r\leq p/\alpha^d,r=1,\ldots,d}a_{\mathbf{i}}X^{(1)}_{i_1}\cdots X^{(d)}_{i_d}\right\|_p. \tag{3.11}
$$

Dalej zauważmy, że z (3.9) oraz (3.8) wynika następujące oszacowanie

$$
\frac{1}{C}\left\|\sum a_iX_i\right\|_p\leq\alpha\sum a_i+p\max_i a_i. \tag{3.12}
$$

Pierwszy ze składników po prawej stronie w (3.11) szacujemy wobec (3.12) następująco:

$$\left\| \sum_{\mathbf{i}: i_r > p/\alpha^d} a_{\mathbf{i}} X^{(1)}_{i_1} \cdots X^{(d)}_{i_d} \right\|_p$$

$$= \left(E_{i, i \in \{r\}'} \left(\left(E_r \left(\sum_{\mathbf{i}: i_r > p/\alpha^d} a_{\mathbf{i}} X^{(1)}_{i_1} \cdots X^{(d)}_{i_d} \right)^p \right)^{1/p} \right)^p \right)^{1/p}$$

$$\leq C \left(E_{i, i \in \{r\}'} \left(\alpha \sum_{\mathbf{i}: i_r > p/\alpha^d} a_{\mathbf{i}} \prod_{j \neq r} X^{(j)}_{i_j} + p \max_{i_r > p/\alpha^d} \left(\sum_{\mathbf{i}_{\{r\}'}} a_{\mathbf{i}} \prod_{j \neq r} X^{(j)}_{i_j} \right) \right)^p \right)^{1/p}$$

$$\leq C\alpha \left\| \sum_{\mathbf{i}: i_r > p/\alpha^d} a_{\mathbf{i}} \prod_{j \neq r} X^{(j)}_{i_j} \right\|_p + Cp \max_{i_r > p/\alpha^d} \sum_{\mathbf{i}_{\{r\}'}} a_{\mathbf{i}}.$$

Z założenia indukcyjnego dla $d-1$ mamy

$$\left\| \sum_{\mathbf{i}: i_r > p/\alpha^d} a_{\mathbf{i}} \prod_{j \neq r} X^{(j)}_{i_j} \right\|_p \leq \left\| \sum_{\mathbf{i}} a_{\mathbf{i}} \prod_{j \neq r} X^{(j)}_{i_j} \right\|_p$$

$$\leq C\,(d-1) \sum_{I \subset \{1,2,\ldots,d\} \setminus \{r\}} \alpha^{d-1-\#I} \left(\ln \frac{1}{\alpha} \right)^{\#I} \sup_{\left(x^{(r)}_i\right) \in B_{p/\ln \frac{1}{\alpha}}, r \in I} \sum a_{\mathbf{i}} \prod_{r \in I} x^{(r)}_{i_r}.$$

Z nierówności (3.10) otrzymujemy oszacowanie

$$p \max_{i_r > p/\alpha^d} \sum_{\mathbf{i}_{\{r\}'}} a_{\mathbf{i}} \leq p \left(\frac{p}{\alpha^d} \right)^{-1} \sum_{i_r \leq p/\alpha^d} \sum_{\mathbf{i}_{\{r\}'}} a_{\mathbf{i}} \leq \alpha^d \sum_{\mathbf{i}} a_{\mathbf{i}}.$$

Biorąc pod uwagę (3.11) i trzy ostatnie szacowania wnioskujemy, że aby zakończyć dowód Twierdzenia 7 wystarczy oszacować składnik

$$\left\| \sum_{\mathbf{i}: i_r \leq p/\alpha^d, r=1,\ldots,d} a_{\mathbf{i}} X^{(1)}_{i_1} \cdots X^{(d)}_{i_d} \right\|_p$$

w (3.11). Wykorzystamy do tego dwa lematy.

Lemat 7 *Dane są liczby dodatnie $a_1, a_2, ..., a_N$ oraz niezależne zmienne losowe $X_1, X_2, ..., X_N$ o rozkładzie dwupunktowym $P(X_i = 1) = 1 - P(X_i = 0) = \alpha \in (0; e^{-1})$. Dla $p \geq \max(1, N\alpha)$ zdefiniujmy*

$$k = \max\left(1, \sup\left\{ m \in \{1,2,...,N\} : m \ln \frac{m}{N\alpha} \leq 2e^2 p \right\}\right).$$

Wówczas

$$\|a_1X_1 + ... + a_NX_N\|_p \sim \left[E\left((a_1X_1 + ... + a_NX_N)^p \,|X_1 + ... + X_N = k)\right]^{1/p}.$$

Dowód. Zdefiniujmy liczby $S_l, 1 \le l \le N$, następująco

$$S_l := \frac{1}{l}\left[E\left((a_1X_1 + ... + a_NX_N)^p \,|X_1 + ... + X_N = l)\right]^{1/p}. \tag{3.13}$$

Zauważmy, że

$$S_l = \left(\binom{N}{l}^{-1} \sum_{\substack{I\subset\{1,2,...,N\}\\ \#I=l}} \left(\frac{1}{l}\sum_{i\in I} a_i\right)^p\right)^{1/p}.$$

Zachodzą nierówności

$$S_1 \le 2S_2 \le ... \le NS_N, \tag{3.14}$$
$$S_1 \ge S_2 \ge ... \ge S_N. \tag{3.15}$$

Pierwsza z powyższych nierówności wynika z (3.13). Udowodnimy teraz drugą nierówność. Uzasadnienie jest następujące. Niech $1 \le l \le N-1$. Z wypukłości funkcji $x \mapsto x^p$ mamy

$$\begin{aligned}
S_{l+1}^p &= \binom{N}{l+1}^{-1} \sum_{\substack{I\subset\{1,2,...,N\}\\ \#I=l+1}} \left(\frac{1}{l+1}\sum_{i\in I} a_i\right)^p \\
&= \binom{N}{l+1}^{-1} \sum_{\substack{I\subset\{1,2,...,N\}\\ \#I=l+1}} \left(\frac{1}{l+1}\sum_{i\in I} \left(\frac{1}{l}\sum_{j\in I\setminus\{i\}} a_j\right)\right)^p \\
&\le \binom{N}{l+1}^{-1} \sum_{\substack{I\subset\{1,2,...,N\}\\ \#I=l+1}} \frac{1}{l+1}\sum_{i\in I} \left(\frac{1}{l}\left(\sum_{j\in I\setminus\{i\}} a_j\right)\right)^p \\
&= \binom{N}{l+1}^{-1} \frac{N-l}{l+1} \sum_{\substack{J\subset\{1,2,...,N\}\\ \#J=l}} \left(\frac{1}{l}\left(\sum_{j\in J} a_j\right)\right)^p \\
&= S_l^p.
\end{aligned}$$

Rozważmy teraz

$$\Delta = a_1X_1 + ... + a_NX_N.$$

Mamy

$$\|\Delta\|_p = \left[\sum_{l=1}^{N} (lS_l)^p \cdot P\left(X_1 + X_2 + ... + X_N = l\right)\right]^{1/p}.$$

Zauważmy, że gdy $N \geq l \geq eN\alpha$ wówczas mamy

$$P\left(X_1 + X_2 + ... + X_N = l\right) \geq \exp\left(-Cl \ln \frac{l}{N\alpha}\right). \tag{3.16}$$

Powyższa nierówność wynika np. ze wzoru Stirlinga:

$$\begin{aligned}
P\left(X_1 + X_2 + ... + X_N = l\right) &= \binom{N}{l} \alpha^l \left(1-\alpha\right)^{N-l} \\
&\sim \frac{N^N}{l^l \left(N-l\right)^{N-l}} \sqrt{\frac{N}{l\left(N-l\right)}} \alpha^l \left(1-\alpha\right)^{N-l} \\
&= \left(\frac{1-\alpha}{1-l/N}\right)^{N-l} \left(\frac{N\alpha}{l}\right)^l \sqrt{\frac{N}{l\left(N-l\right)}} \\
&\geq \left(\frac{N\alpha}{l}\right)^l \frac{1}{\sqrt{l}} \geq \exp\left(-Cl \ln \frac{l}{N\alpha}\right).
\end{aligned}$$

Zauważmy też, że gdy $N \geq l \geq e^2 N\alpha$ wówczas mamy

$$P\left(X_1 + X_2 + ... + X_N = l\right) \leq \exp\left(-\frac{1}{2} l \ln \frac{l}{N\alpha}\right). \tag{3.17}$$

Wynika to z nierówności Czebyszewa zastosowanej do zmiennej $\exp\left(\lambda \sum X_i\right)$ dla $\lambda = \ln \frac{l}{N\alpha}$:

$$\begin{aligned}
P\left(X_1 + X_2 + ... + X_N = l\right) &\leq P\left(X_1 + X_2 + ... + X_N \geq l\right) \\
&\leq E \exp\left(\lambda \sum X_i\right) / e^{\lambda l} \\
&= \left(1 + \alpha\left(e^\lambda - 1\right)\right)^N e^{-\lambda l} \\
&\leq \exp\left(N \ln\left(1 + \alpha e^\lambda\right) - \lambda l\right) \\
&= \exp\left(N \ln\left(1 + \alpha e^{\ln \frac{l}{N\alpha}}\right) - l \ln \frac{l}{N\alpha}\right) \\
&= \exp\left(N \ln\left(1 + \frac{l}{N}\right) - l \ln \frac{l}{N\alpha}\right) \\
&\leq \exp\left(l - l \ln \frac{l}{N\alpha}\right) \leq \exp\left(-\frac{1}{2} l \ln \frac{l}{N\alpha}\right).
\end{aligned}$$

Niech

$$k = \max\left(1, \sup\left\{m \in \{1,2,...,N\} : m \ln \frac{m}{N\alpha} \leq 2e^2 p\right\}\right).$$

Zauważmy, że jeżeli $k < N$, to mamy $(k+1)\ln\frac{k+1}{N\alpha} > 2e^2 p \geq 2e^2 N\alpha$ a stąd wynika, że $k+1 > e^2 N\alpha$ i dalej $k \geq \frac{k+1}{2} > \frac{e^2 N\alpha}{2} > eN\alpha$. Zatem z (3.16) mamy

$$P\left(X_1 + X_2 + ... + X_N = k\right) \geq \exp\left(-C\min\left(2e^2 p, N\ln\frac{1}{\alpha}\right)\right) \geq e^{-2e^2 Cp},$$

$$\|\Delta\|_p \geq \left[kS_k^p \cdot PX_1 + X_2 + ... + X_N = k\right]^{1/p} \geq e^{-2e^2 C} kS_k.$$

Przejdźmy do dowodu oszacowania $\|\Delta\|_p$ z góry. Jeżeli $k = N$, to nie ma czego dowodzić. Załóżmy zatem, że $k < N$ i zauważmy, że dla $k < l \leq N$ mamy $l\ln\frac{l}{N\alpha} > 2e^2 p \geq 2e^2 N\alpha$ a stąd $l \geq e^2 N\alpha$ i z (3.17), (3.15) dostajemy

$$\begin{aligned}
&(lS_l)^p P\left(X_1 + X_2 + ... + X_N = l\right) \leq (l/k)^p (kS_k)^p \exp\left(-\frac{1}{2}l\ln\frac{l}{N\alpha}\right) \\
&\leq (kS_k)^p \exp\left(p\ln\frac{l}{k} - \frac{1}{2}l\ln\frac{l}{N\alpha}\right) \leq (kS_k)^p \exp\left(p\ln\frac{l}{k} - \frac{1}{2}\frac{l}{k}k\ln\frac{k+1}{N\alpha}\right) \\
&\qquad \leq (kS_k)^p \exp\left(p\ln\frac{l}{k} - 2\frac{l}{k}p\right) \leq (kS_k)^p \exp\left(-p\frac{l}{k}\right).
\end{aligned}$$

(Wykorzystaliśmy także nierówność $k\ln\frac{k+1}{N\alpha} \geq 4p$ wynikającą z nierówności $2k\ln\frac{k+1}{N\alpha} \geq (k+1)\ln\frac{k+1}{N\alpha} \geq 2e^2 p$.) Stąd i z (3.14) dostajemy

$$\begin{aligned}
\|\Delta\|_p &= \left[\sum_{l=1}^{N} (lS_l)^p \cdot P\left(X_1 + X_2 + ... + X_N = l\right)\right]^{1/p} \\
&\leq \left[(kS_k)^p \sum_{l\leq k} P\left(X_1 + X_2 + ... + X_N = l\right) + \sum_{l>k} (kS_k)^p \exp\left(-p\frac{l}{k}\right)\right]^{1/p} \\
&\leq \left[(kS_k)^p + C\left(kS_k\right)^p\right]^{1/p} \sim kS_k.
\end{aligned}$$

Ostatnia nierówność wynika np. z oszacowania $k \leq e^2 p$. Z dwóch ostatnich szacowań otrzymujemy tezę lematu. ■

Lemat 8 *Dane są liczby dodatnie $a_1, a_2, ..., a_N$ oraz niezależne zmienne losowe $X_1, X_2, ..., X_N$ o rozkładzie dwupunktowym $P\left(X_i = 1\right) = 1 - P\left(X_i = 0\right) = \alpha \in \left(0; e^{-16}\right]$. Dla danej liczby $K \geq 1$ rozważmy zmienne $\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, ..., \tilde{X}_N$ o* *rozkładzie* $P\left(\tilde{X}_1 = 1\right) = 1 - P\left(\tilde{X}_1 = 0\right) = \alpha^K$*. Wówczas dla* $p \geq K \ln \frac{1}{\alpha}$ *zachodzi nierówność*

$$\left\|\sum a_i X_i\right\|_p \leq C \left\|\sum a_i \left(\alpha + K \left(\ln \frac{1}{\alpha}\right) \tilde{X}_i\right)\right\|_p .$$

Dowód. Dowód wynika bezpośrednio z oszacowań (3.8) i (3.7). Z (3.7) mamy

$$\begin{aligned} C \left\|\sum a_i \left(\alpha + K \left(\ln \frac{1}{\alpha}\right) \tilde{X}_i\right)\right\|_p &\geq \alpha \sum a_i + K \left(\ln \frac{1}{\alpha}\right) \left\|\sum a_i \tilde{X}_i\right\|_p \\ &\geq \alpha \sum a_i + K \left(\ln \frac{1}{\alpha}\right) \sup \left\{\sum a_i \left(\alpha^K + x_i\right) : \sum M_{\alpha^K}(x_i) \leq p\right\} \\ &\geq \alpha \sum a_i + K \left(\ln \frac{1}{\alpha}\right) \sup \left\{\sum a_i x_i : \sum M_{\alpha^K}(x_i) \leq p\right\} . \end{aligned}$$

Zauważmy teraz, że z (3.9) wynika nierówność

$$\begin{aligned} &\sup \left\{\sum a_i x_i : \sum M_{\alpha^K}(x_i) \leq p\right\} \\ &\quad \geq \sup \left\{\sum a_i x_i : 0 \leq x_i \leq 1, 2\left(\ln \frac{1}{\alpha^K}\right) \sum x_i \leq p\right\} \\ &\quad\quad \geq \frac{c}{K \ln(1/\alpha)} \sup \left\{\sum a_i x_i : \sum M_\alpha(x_i) \leq p\right\} . \end{aligned}$$

Z dwóch powyższych oszacowań i z (3.8) otrzymujemy tezę lematu. ■

Powróćmy teraz do dowodu Twierdzenia 7 i rozważmy ostatni składnik w (3.11):

$$\left\|\sum_{\mathbf{i}: i_r \leq p/\alpha^d, r=1,\ldots,d} a_{\mathbf{i}} X_{i_1}^{(1)} \cdots X_{i_d}^{(d)}\right\|_p$$

Zgodnie z Lematem 8 zachodzi nierówność

$$\begin{aligned} &\left\|\sum_{\mathbf{i}: i_r \leq p/\alpha^d, r=1,\ldots,d} a_{\mathbf{i}} X_{i_1}^{(1)} \cdots X_{i_d}^{(d)}\right\|_p \\ &\quad \leq C(d) \left\|\sum_{\mathbf{i}: i_r \leq p/\alpha^d, r=1,\ldots,d} a_{\mathbf{i}} \prod_{r=1}^{d} \left(\alpha + \ln \frac{1}{\alpha} \tilde{X}_{i_r}^{(r)}\right)\right\|_p \\ &\quad \leq C(d) \sum_{I \subset \{1,\ldots,d\}} \alpha^{d-\#I} \left(\ln \frac{1}{\alpha}\right)^{\#I} \left\|\sum_{\mathbf{i}: i_r \leq p/\alpha^d, r=1,\ldots,d} a_{\mathbf{i}} \prod_{r \in I} \tilde{X}_{i_r}^{(r)}\right\|_p , \end{aligned}$$

gdzie niezależne zmienne $\tilde{X}_i^{(r)}$ z prawdopodobieństwem α^{d+1} przyjmują wartość 1 i z prawdopodobieństwem $1-\alpha^{d+1}$ przyjmują wartość 0. Ponieważ $p \geq \alpha^{d+1}p/\alpha^d$, więc zgodnie z Lematem 7 otrzymujemy, że

$$\left\| \sum_{\mathbf{i}:i_r \leq p/\alpha^d, r=1,...,d} a_{\mathbf{i}} \prod_{r\in I} \tilde{X}_{i_r}^{(r)} \right\|_p$$

$$\sim_d \left(E\left(\left(\sum_{\mathbf{i}:i_r \leq p/\alpha^d, r=1,...,d} a_{\mathbf{i}} \prod_{r\in I} \tilde{X}_{i_r}^{(r)} \right)^p \mid \sum_{i\leq p/\alpha^d} \tilde{X}_i^{(r)} = k \text{ dla } r\in I \right) \right)^{1/p},$$

gdzie $k = \max\left(1, \sup\left\{m \in \left\{1,2,...,,\lfloor p/\alpha^d \rfloor\right\} : m \ln \frac{m}{\alpha^{d+1}p/\alpha^d} \leq 2e^2 p\right\}\right)$. Zauważmy, że $k \leq Cp/\ln\frac{1}{\alpha}$, zatem

$$\left\| \sum_{\mathbf{i}:i_r \leq p/\alpha^d, r=1,...,d} a_{\mathbf{i}} \prod_{r\in I} \tilde{X}_{i_r}^{(r)} \right\|_p \leq C(d) \sup\left\{ \sum_{\mathbf{i}} a_{\mathbf{i}} \prod_{r\in I} x_{i_r}^{(r)} : x^{(r)} \in B_{p/\ln\frac{1}{\alpha}} \text{ dla } r\in I \right\}.$$

To, razem z poprzednimi nierównościami daje dowodzone oszacowanie z góry na $\|\Delta_d\|_p$, co kończy dowód Twierdzenia 7.

3.2.3 Pewne wzmocnienie oszacowania z dołu

Podany na początku niniejszego podrozdziału przykład nie działa, gdy zauważymy, że dolne oszacowanie w Twierdzeniu 7 można wzmocnić w sposób następujący. Dla większej przejrzystości przedstawimy je dla $d=2$ i $d=3$. Niech $X_{ij}, 1 \leq i,j \leq n$, oznaczają niezależne zmienne losowe o rozkładzie $P(X_{ij}=1) = 1 - P(X_{ij}=0) = \alpha^2$. Wówczas dla $a_{ij} \geq 0$ zachodzi oszacowanie

$$\left\| \sum a_{ij} X_i^{(1)} X_j^{(2)} \right\|_p \geq \left\| \sum a_{ij} X_{ij} \right\|_{\lfloor p \rfloor}.$$

Oto uzasadnienie

$$\begin{aligned}
\left\| \sum a_{ij} X_i^{(1)} X_j^{(2)} \right\|_p^{\lfloor p \rfloor} &\geq E\left[\sum a_{ij} X_i^{(1)} X_j^{(2)}\right]^{\lfloor p \rfloor} \\
&= \sum_{i_1,j_1} \sum_{i_2,j_2} \cdots \sum_{i_{\lfloor p \rfloor}, j_{\lfloor p \rfloor}} E \prod_{k=1}^{\lfloor p \rfloor} \left(a_{i_k j_k} X_{i_k}^{(1)} X_{j_k}^{(2)} \right) \\
&\geq \sum_{i_1,j_1} \sum_{i_2,j_2} \cdots \sum_{i_{\lfloor p \rfloor}, j_{\lfloor p \rfloor}} E \prod_{k=1}^{\lfloor p \rfloor} \left(a_{i_k j_k} X_{i_k j_k} \right) \\
&= E\left[\sum a_{ij} X_{ij}\right]^{\lfloor p \rfloor}.
\end{aligned}$$

Powyżej wykorzystaliśmy nierówność

$$E\prod_{k=1}^{\lfloor p\rfloor}\left(X_{i_k}^{(1)}X_{j_k}^{(2)}\right)\geq E\prod_{k=1}^{\lfloor p\rfloor}X_{i_kj_k}.$$

Uzasadnienie tej nierówności jest następujące. Oznaczmy

$$\begin{gathered}I=\{i_k:k=1,...,\lfloor p\rfloor\},\\ J=\{j_k:k=1,...,\lfloor p\rfloor\},\\ K=\{(i_k,j_k):k=1,...,\lfloor p\rfloor\};\\ m(i)=\#\{k\in\{1,2,...,\lfloor p\rfloor\}:i_k=i\},\\ n(j)=\#\{k\in\{1,2,...,\lfloor p\rfloor\}:j_k=j\}.\end{gathered}$$

Wówczas

$$\begin{aligned}E\prod_{k=1}^{\lfloor p\rfloor}\left(X_{i_k}^{(1)}X_{j_k}^{(2)}\right) &= E\prod_{i\in I}\left[X_i^{(1)}\right]^{m(i)}E\prod_{j\in J}\left[X_j^{(2)}\right]^{n(j)}\\ &= \alpha^{\#I}\alpha^{\#J}\leq\alpha^{\#K}\alpha^{\#K}\\ &= E\prod_{k=1}^{\lfloor p\rfloor}X_{i_kj_k}.\end{aligned}$$

Stąd dostajemy następujące wzmocnienie oszacowania z dołu w przypadku $d=2$, $p\geq 2\ln\frac{1}{\alpha}$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{C}\left\|\sum a_{ij}X_i^{(1)}X_j^{(2)}\right\|_p\\ &\geq \sup\left\{\sum(\alpha+b_i)(\alpha+c_j):\sum M_\alpha(b_i)\leq p,\sum M_\alpha(c_j)\leq p\right\}\\ &\quad+\left\|\sum a_{ij}X_{ij}\right\|_{\lfloor p\rfloor}\\ &\geq \sup\left\{\sum(\alpha+b_i)(\alpha+c_j):\sum M_\alpha(b_i)\leq p,\sum M_\alpha(c_j)\leq p\right\}\\ &\quad+\sup\left\{\sum a_{ij}\left(\alpha^2+d_i\right):\sum M_{\alpha^2}(d_i)\leq\lfloor p\rfloor\right\}\\ &\geq c\sup\left\{\sum(\alpha+b_i)(\alpha+c_j):\sum M_\alpha(b_i)\leq p,\sum M_\alpha(c_j)\leq p\right\}\\ &\quad+c\sup\left\{\sum a_{ij}\left(\alpha^2+d_i\right):\sum M_{\alpha^2}(d_i)\leq p\right\}.\end{aligned}$$

Gdyby zachodziło było analogiczne oszacowanie z góry, wówczas prawdziwa byłaby następująca hipoteza

$$\begin{aligned}
&\left\|\sum a_{ij} X_i^{(1)} X_j^{(2)}\right\|_p \\
&\sim \sup\left\{\sum (\alpha + b_i)(\alpha + c_j) : \sum M_\alpha (b_i) \le p, \sum M_\alpha (c_j) \le p\right\} \\
&+ \sup\left\{\sum a_{ij} \left(\alpha^2 + d_i\right) : \sum M_{\alpha^2} (d_i) \le p\right\}.
\end{aligned}$$

Niestety odpowiedź na to pytanie nie jest znana.

Dla $d = 3$ analogiczna hipoteza ma postać: jeżeli $p \ge 3 \ln \frac{1}{\alpha}$, to

$$\begin{aligned}
&\left\|\sum a_{ijk} X_i^{(1)} X_j^{(2)} X_k^{(3)}\right\|_p \\
\sim\ & \sup\left\{\sum a_{ijk}\left(\alpha + x_i^{(1)}\right)\left(\alpha + x_j^{(2)}\right)\left(\alpha + x_k^{(3)}\right) : \sum M_\alpha\left(x_i^{(r)}\right) \le p, r = 1,2,3\right\} \\
+\ & \sup\left\{\sum a_{ijk}\left(\alpha + x_i^{(1)}\right)\left(\alpha^2 + x_{jk}^{(2,3)}\right) : \sum M_\alpha\left(x_i^{(1)}\right) \le p, \sum M_{\alpha^2}\left(x_{jk}^{(2,3)}\right) \le p\right\} \\
+\ & \sup\left\{\sum a_{ijk}\left(\alpha + x_j^{(2)}\right)\left(\alpha^2 + x_{ik}^{(2,3)}\right) : \sum M_\alpha\left(x_j^{(1)}\right) \le p, \sum M_{\alpha^2}\left(x_{ik}^{(2,3)}\right) \le p\right\} \\
+\ & \sup\left\{\sum a_{ijk}\left(\alpha + x_k^{(1)}\right)\left(\alpha^2 + x_{ij}^{(2,3)}\right) : \sum M_\alpha\left(x_k^{(1)}\right) \le p, \sum M_{\alpha^2}\left(x_{ij}^{(2,3)}\right) \le p\right\} \\
+\ & c \sup\left\{\sum a_{ijk}\left(\alpha^3 + x_{ijk}^{(1,2,3)}\right) : \sum M_{\alpha^3}\left(x_{ijk}^{(1,2,3)}\right) \le p\right\}, \qquad (3.18)
\end{aligned}$$

przy czym wiemy, że w powyższej relacji oszacowanie z dołu zachodzi.

3.3 Semihiperkontraktywne własności chaosów generowanych przez nieujemne zmienne dwupunktowe i ich zastosowanie w modelu dwumianowym grafu losowego

Niech Δ_d będzie chaosem losowym rzędu d o nieujemnych współczynnikach $a_{i_1,\dots,i_d}$, generowanym przez niezależne zmienne dwupunktowe o rozkładzie $P\left(X_i^{(r)} = 1\right) = 1 - P\left(X_i^{(r)} = 0\right) = \alpha \in (0; e^{-16}]$,

$$\Delta_d = \sum a_{i_1,\dots,i_d} X_{i_1}^{(1)} \dots X_{i_d}^{(d)}.$$

Zauważmy, że w przypadku $d = 1$ (tzn. dla kombinacji liniowej zmiennych $X_i^{(1)}$), na podstawie wyników z poprzedniego podrozdziału, mamy

$$\|\Delta_1\|_p \sim \sup\left\{\sum a_i (\alpha + b_i) : \sum M_\alpha (b_i) \le p\right\},$$

dla $p \geq \ln \frac{1}{\alpha}$, gdzie

$$M_\alpha(x) = \begin{cases} (\alpha + x) \ln\left(1 + \frac{x}{\alpha}\right) \text{ gdy } 0 \leq x \leq 1, \\ +\infty \text{ gdy } 1 < x. \end{cases}$$

Ponieważ M_α jest funkcją wypukłą, więc dla $\lambda \geq 1$

$$\begin{aligned} \|\Delta_1\|_{\lambda p} &\sim \sup\left\{\sum a_i^{(1)} b_i : \sum M(b_i) \leq \lambda p\right\} \\ &\leq \lambda \sup\left\{\sum a_i^{(1)} b_i/\lambda : \sum M(b_i/\lambda) \leq p\right\} \sim \lambda \|\Delta_1\|_p . \end{aligned}$$

Wynika stąd, że zmienna Δ_1 ma własność semihiperkontraktywności rzędu 1 począwszy od momentu $\ln \frac{1}{\alpha}$. Zatem z Wniosku 1 z rozdziału 1 wynika, że zmienna Δ_d ma również własność semihiperkontraktywności począwszy od momentu $\ln \frac{1}{\alpha}$. Z Twierdzenia 2 wynika teraz, że zachodzą następujące dwustronne oszacowania na ogony Δ_d

$$\begin{aligned} P(\Delta_d \geq e \|\Delta_d\|) &\leq e^{-p}, \\ P(\Delta_d \geq c(d,\alpha) \|\Delta_d\|) &\geq \min\left(c(d,\alpha), e^{-p}\right). \end{aligned}$$

Rozważmy teraz następujący model grafu losowego. Dane są wierzchołki ponumerowane liczbami $1, 2, ..., n$ i liczba $\alpha \in (0;1)$. Grafem losowym $G(n,\alpha)$ będziemy nazywali zmienną losową przyjmującą wartości w zbiorze grafów n wierzchołkowych o tej własności, że prawdopodobieństwo, iż między dwoma ustalonymi wierzchołkami u, v, $u \neq v$, $u, v \in \{1, 2, ..., n\}$ istnieje nieskierowana krawędź, wynosi α, niezależnie od istnienia krawędzi pomiędzy innymi parami wierzchołków.

Niech dany będzie pewien graf G_0 o niewielkiej liczbie krawędzi d. Niech Δ'_d będzie zmienną losową równą liczbie podgrafów grafu $G(n,\alpha)$ izomorficznych z grafem G_0. Będą interesowały nas własności zmiennej Δ'_d.

Zauważmy, że jeżeli $\mathcal{P}$ jest rodziną wszystkich kopii grafu G_0 w grafie pełnym o n wierzchołkach $G(n)$, to zmienną Δ'_d można przedstawić w postaci

$$\Delta'_d = \sum_{H \in \mathcal{P}} \prod_{e \in E(H)} X_e,$$

gdzie $E(H)$ oznacza zbiór krawędzi grafu H zaś zmienne $X_e, e \in E(G(n))$, są niezależne i mają rozkład dwupunktowy $P(X_e = 1) = 1 - P(X_e = 0) = \alpha$. Z Twierdzenia 1 wynika, że momenty zmiennej Δ'_d są porównywalne z momentami zmiennej

$$\Delta_d = \frac{1}{\#P(G_0)} \sum_{H \in \mathcal{P}} \sum_{r \in P(G_0)} \prod_{e \in E(H)} X_e^{r(f_H(e))},$$

gdzie $P(G_0)$ oznacza zbiór wszystkich permutacji krawędzi grafu G_0, f_H jest izometrią przekształcającą graf H w graf G_0 zaś zmienne X_e^f dla $e \in E(G(n)), f \in E(G_0)$, są niezależnymi kopiami zmiennych X_e.

Zauważmy, że zmienna Δ_d ma postać

$$\Delta_d = \sum_{e_1 \in G(n),...,e_d \in G(n)} a_{e_1,...,e_d} X_{e_1}^{f_1} \cdots X_{e_d}^{f_d}, \tag{3.19}$$

gdzie $a_{e_1,...,e_d} \geq 0$, $d = \#E(G_0), E(G_0) = \{f_1, ..., f_d\}$.

Jak już zauważyliśmy, z semihiperkontraktywności Δ_d wynikają dwustronne szacowania na ogony zmiennej Δ_d. Dzięki temu spostrzeżeniu łatwo możemy zidentyfikować wielkości, które pojawiają się w pracy [14], szacujące odchylenia zmiennej Δ_d' ponad jej wartość oczekiwaną.

Niech np. Δ_3' będzie liczbą trójkątów, tzn. grafów pełnych trójwierzchołkowych (ściślejsze definicje - zob. [13]), w grafie $G(n, \alpha)$. W [14] udowodniono, że dla każdego $t > 0$, jeżeli $E\Delta_3' > 1$, to istnieją stałe dodatnie $c(t)$ i $C(t)$, dla których zachodzą szacowania

$$\exp\left(-c(t) n^2 \alpha^2 \ln \frac{1}{\alpha}\right) \leq P(\Delta_3' \geq (1+t) E\Delta_3') \leq \exp\left(-C(t) n^2 \alpha^2\right). \tag{3.20}$$

Z własności semihiperkontraktywności zmiennej Δ_3' wynika, że dla p_1, dla którego $c(d, \alpha) \|\Delta_3'\|_{p_1} \geq (1+t) E\Delta_3'$ mamy

$$P(\Delta_3' \geq (1+t) E\Delta_3') \geq P\left(\Delta_3' \geq c(d,\alpha) \|\Delta_3'\|_{p_1}\right) \geq \min\left(c(d,\alpha), e^{-p_1}\right),$$

oraz dla p_2, dla którego $e \|\Delta_3'\|_{p_2} \leq (1+t) E\Delta_3'$,

$$P(\Delta_3' \geq (1+t) E\Delta_3') \leq P\left(\Delta_3' \geq e \|\Delta_3'\|_{p_2}\right) \leq \exp(-p_2).$$

Zatem dla odpowiednio dużych t znalezienie optymalnych szacowań w (3.20) sprowadza się do optymalnych szacowań momentów zmiennej Δ_3'.

3.4 Oszacowanie prawdopodobieństw odchyleń liczby gwiazd k-ramiennych i liczby trójkątów w grafie losowym

W tym podrozdziale udowodnimy nieco lepsze niż w [14] (w pewnym zakresie parametów) szacowania prawdopodobieństw odchyleń liczby gwiazd k - ramiennych i liczby tójkątów ponad ich wartość oczekiwaną. Zastosujemy dwie techniki. W przypadku gwiazd posłużymy się dodatnią stowarzyszonością pewnych zmiennych losowych i wzorem Montgomery-Smitha. W przypadku trójkątów - wynikami podrozdziału 3.2.

3.4.1 Prawdopodobieństwa odchyleń liczby gwiazd k - ramiennych

Przyjmijmy oznaczenia jak w poprzednim podrozdziale. Będziemy korzystać z następującego pojęcia stowarzyszoności zmiennych losowych.

Definicja 5 *Zmienne rzeczywiste $T_1, ..., T_n$ są stowarzyszone (ang. associated), jeżeli dla dowolnych dwóch niemalejących po współrzędnych funkcji f_1, $f_2 : R^n \to R$ i wektora $\mathbf{T} = (T_1, ..., T_n)$ zachodzi*

$$\mathrm{Cov}\left(f_1\left(\mathbf{T}\right), f_2\left(\mathbf{T}\right)\right) \geq 0,$$

o ile kowariancja zmiennych $f_1(\mathbf{T})$ i $f_2(\mathbf{T})$ istnieje.

Bezpośrednio z definicji stowarzyszoności wynika, że jeżeli zmienne losowe $T_1, ..., T_n$ są stowarzyszone i funkcje $f_1, ..., f_m : R^n \to R$ są niemalejące po współrzędnych, to zmienne $S_1 = f_1(\mathbf{T}), ..., S_m = f_m(\mathbf{T})$ są także stowarzyszone. Dowodzi się również (por. [8]), że zmienne niezależne są stowarzyszone.

Niech p będzie dodatnią liczbą całkowitą. Jeżeli zmienne $T_1, T_2 \geq 0$ są stowarzyszone oraz $\tilde{T}_1, \tilde{T}_2$ są niezależnymi kopiami T_1 i T_2 odpowiednio, wówczas dla dowolnego $q = 0, 1, 2, ..., p$

$$ET_1^q T_2^{p-q} \geq ET_1^q ET_2^{p-q} = E\tilde{T}_1^q E\tilde{T}_2^{p-q} = E\tilde{T}_1^q \tilde{T}_2^{p-q}.$$

Stąd i ze wzoru dwumianowego otrzymujemy

$$E\left(T_1 + T_2\right)^p \geq E\left(\tilde{T}_1 + \tilde{T}_2\right)^p.$$

Iterując powyższą nierówność dostajemy, że dla nieujemnych zmiennych stowarzyszonych $T_1, .., T_n$ i ich niezależnych kopii $\tilde{T}_1, ..., \tilde{T}_n$ zachodzi

$$E\left(T_1 + \cdots + T_n\right)^p \geq E\left(\tilde{T}_1 + \cdots + \tilde{T}_n\right)^p.$$

Niech teraz Γ będzie liczbą kopii gwiazdy k ramiennej w grafie $G(n, \alpha)$. Liczba gwiazd k - ramiennych o środku w danym wierzchołku $u \in \{1, 2, ..., n\}$ wynosi

$$\binom{\sum_v X_{\{u,v\}}}{k} \sim_k \left(\left(\sum_v X_{\{u,v\}} - k + 1\right)_+^k\right).$$

Zmienna Γ jest zatem równa

$$\begin{aligned}\Gamma &= \sum_u \binom{\sum_v X_{\{u,v\}}}{k} \sim_k \sum_u \left(\sum_v X_{\{u,v\}} - k + 1 \right)_+^k \\ &= \sum_u \gamma^{(u)}, \end{aligned} \tag{3.21}$$

gdzie zmienne $\gamma^{(u)} = \left(\sum_v X_{\{u,v\}} - k + 1\right)_+^k$, $u \in \{1, 2, ..., n\}$, nie są niestety niezależne. Zauważmy jednak, że jako niemalejące po współrzędnych funkcje od zmiennych niezależnych $X_{\{u,v\}}, u, v = 1, ..., n, u \neq v$, są dodatnio stowarzyszone, a stąd mamy, że dla całkowitego $p \geq 1$ zachodzi nierówność

$$\left\| \sum_{u=1}^n \gamma^{(u)} \right\|_p \geq \left\| \sum_{u=1}^n \gamma_u \right\|_p, \tag{3.22}$$

gdzie γ_u, $u \in \{1, 2, ..., n\}$, są niezależnymi kopiami zmiennej $\gamma^{(1)}$.

Zajmijmy się momentami zmiennej $\sum_u \gamma_u$. Ze wzoru Montgomery-Smitha (por. podrozdział 1.3) wynika, że

$$\left\| \sum_{u=1}^n \gamma_u \right\|_p \sim \sup \left\{ \frac{p}{s} \left(\frac{n}{p} \right)^{1/s} \|\gamma_1\|_s : \max\left(1; \frac{p}{n}\right) \leq s \leq p \right\}.$$

Postarajmy się oszacować $\|\gamma_1\|_s$. Mamy

$$E\gamma_1^s = E\left(\sum_v X_{\{u,v\}} - k + 1 \right)_+^{ks} \geq P\left(\sum_v X_{\{u,v\}} = k \right) = \binom{n}{k} \alpha^k (1-\alpha)^{n-k}.$$

Załóżmy, że $\alpha \leq \frac{1}{n}$, $n \geq k^2$ wówczas, ze wzoru Stirlinga, dostajemy

$$\binom{n}{k} \alpha^k (1-\alpha)^{n-k} \geq c \left(\frac{n\alpha}{k} \right)^k \left(\frac{1-\alpha}{1-k/n} \right)^{n-k} \sqrt{\frac{n}{k(n-k)}} \sim_k (n\alpha)^k.$$

Zatem

$$\|\gamma_1\|_s \geq c(k) (n\alpha)^{k/s},$$

oraz

$$\left\| \sum_{u=1}^n \gamma_u \right\|_p \geq c(k) \sup \left\{ \frac{p}{s} \left(\frac{n}{p} \right)^{1/s} (n\alpha)^{k/s} : \max\left(1; \frac{p}{n}\right) \leq s \leq p \right\}.$$

Policzmy

$$\frac{d}{ds}\left\{\frac{p}{s}\left(\frac{n}{p}\right)^{1/s}(n\alpha)^{k/s}\right\} = -\frac{p}{s^3}\left(\frac{n}{p}\right)^{1/s}(n\alpha)^{k/s}\left(s+\ln\left(\frac{1}{p}n^{k+1}\alpha^k\right)\right).$$

Załóżmy, że

$$e < en^{k+1}\alpha^k < p \leq n, \tag{3.23}$$

wówczas supremum wyrażenia $\frac{p}{s}\left(\frac{n}{p}\right)^{1/s}(n\alpha)^{k/s}$ jest przyjmowane w punkcie $s_0 = \ln\frac{p}{n^{k+1}\alpha^k}$ (zauważmy, że $p/n \leq 1 < s_0 < p$) i wynosi

$$\frac{p}{s_0}\left(\frac{n}{p}\right)^{1/s_0}(n\alpha)^{k/s_0} = \frac{p}{e\ln\frac{p}{n^{k+1}\alpha^k}} = \frac{q}{e\ln q}n^{k+1}\alpha^k,$$

gdzie liczba q jest zdefiniowana za pomocą równości

$$p = qn^{k+1}\alpha^k. \tag{3.24}$$

Zatem w rozpatrywanym zakresie parametrów p, n i α mamy

$$\left\|\sum_{u=1}^{n}\gamma_u\right\|_p \geq c(k)\frac{q}{e\ln q}n^{k+1}\alpha^k. \tag{3.25}$$

Niech $C_1(k)$ będą równe stałej $C_1(\delta, C)$, występującej w dowodzie Twierdzenia 2 z rozdziału 1. Ponieważ $E\Gamma \leq C(k)\, n^{k+1}\alpha^k$, więc dla q spełniającego warunek

$$\frac{q}{e\ln q} \geq 2c^{-1}(k)\, C(k)\, K \tag{3.26}$$

z (3.21), (3.22) i (3.25) mamy oszacowanie

$$\frac{1}{2}\|\Gamma\|_p \geq KE\Gamma.$$

Jeżeli przy tym zachodzi $p \geq \ln\frac{1}{\alpha}$, to z semihiperkontrakcji otrzymujemy

$$P(\Gamma \geq KE\Gamma) \geq P\left(\Gamma \geq \frac{1}{2}\|\Gamma\|_p\right) \geq \exp\left(-C_1(k)\, p\right).$$

W pracy [14] uzyskano następujące oszacowanie

$$P(\Gamma \geq KE\Gamma) \geq \exp\left(-Cn^{1+1/k}\alpha\ln\frac{1}{\alpha}\right) \tag{3.27}$$

Jeżeli zachodzi

$$\ln\frac{1}{\alpha} \leq p = qn^{k+1}\alpha^k < CC_1^{-1}(k)\, n^{1+1/k}\alpha\ln\frac{1}{\alpha}, \tag{3.28}$$

to otrzymane przez nas oszacowanie będzie lepsze niż to udowodnione w [14]. Zastanówmy się kiedy jest to możliwe. Warunki (3.23), (3.24) i (3.26) nakładają następujące ograniczenia

$$q \geq C(k, K),$$
$$qn^k\alpha^k \leq 1,$$

zaś warunek (3.28) daje

$$\begin{aligned} qn^{k+1}\alpha^k &\geq \ln\frac{1}{\alpha}, \\ q\left(n^{k+1}\alpha^k\right)^{\frac{k-1}{k}} &< c(k)\ln\frac{1}{\alpha}. \end{aligned}$$

Zauważmy, że dla ustalonych k, K oraz q spełniającego $q \geq C(k, K)$, pozostałe warunki mają postać

$$n \leq q^{-\frac{1}{k}}\frac{1}{\alpha},$$
$$n \geq q^{-\frac{1}{k+1}}\frac{1}{\alpha}\left(\alpha\ln\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{k+1}},$$
$$n < (c(k)/q)^{\frac{k}{k^2-1}}\frac{1}{\alpha}\left(\alpha\ln\frac{1}{\alpha}\left(\ln\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{k-1}}\right)^{\frac{1}{k+1}}.$$

Zauważmy, że dla dostatecznie małych α, niezależnie od wartości q i $c(k)$ można znaleźć n spełniające powyższe warunki. Dla tych wartości parametrów α, n, k, K szacowanie (3.27) jest gorsze niż to otrzymane przez nas.

3.4.2 Prawdopodobieństwa odchyleń liczby trójkątów

Losowa forma trzyliniowa, reprezentująca liczbę trójkątów w grafie losowym $G(n, \alpha)$ ma postać

$$\Delta' = \sum_{\substack{u\neq v\neq w \\ 1\leq u,v,w\leq n}} X_{\{u,v\}}X_{\{v,w\}}X_{\{w,u\}}.$$

Janson, Oleszkiewicz i Ruciński otrzymali następujące oszacowanie na momenty zmiennej $\tilde{\Delta}$

$$\|\Delta'\|_p \leq n^3\alpha^3\left(1 + C\frac{p}{n^2\alpha^2} + C\frac{p^{3/2}}{n^3\alpha^3}\right), \tag{3.29}$$

gdzie C oznacza (jak zwykle) pewną uniwersalną stałą dodatnią. My postaramy się uzyskać oszacowanie $\|\Delta'\|_p$ z dołu. Korzystając z Twierdzenia 1 z rozdziału 1 i z (3.18), dla $p \geq 3\ln\frac{1}{\alpha}$ otrzymujemy

$$\|\Delta'\|_p \sim \|\Delta\|_p \geq c\,(A+B+D)\,,$$

gdzie

$$\Delta = \sum_{u,v,w} X^{(1)}_{\{u,v\}} X^{(2)}_{\{v,w\}} X^{(3)}_{\{w,u\}}$$

($X^{(1)}_{\{u,v\}}, X^{(2)}_{\{u,v\}}$ i $X^{(3)}_{\{u,v\}}$ są niezależnymi kopiami $X_{\{u,v\}}$) oraz

$$A = \sup\left\{ \sum_{u,v,w} \left(\alpha + x^{(1)}_{u,v}\right)\left(\alpha + x^{(2)}_{v,w}\right)\left(\alpha + x^{(3)}_{w,u}\right) : \sum_{u,v,w} M_\alpha\left(x^{(i)}_{u,v}\right) \leq p \text{ dla } i=1,2,3 \right\}\,,$$

$$B = \sup\left\{ \sum_{u,v,w} \left(\alpha + x_{u,v}\right)\left(\alpha^2 + y_{v,w,u}\right) : \sum_{u,v,w} M_\alpha\left(x_{u,v}\right) \leq p, \sum_{u,v,w} M_{\alpha^2}\left(y_{v,w,u}\right) \leq p \right\},$$

$$D = \sup\left\{ \sum_{u,v,w} \left(\alpha^3 + x_{u,v,w}\right) : \sum_{u,v,w} M_{\alpha^3}\left(x_{u,v,w}\right) \leq p \right\}.$$

Dalej obliczamy

$$A \leq A_1 + 3A_2 + 3A_3 + A_4,$$

gdzie

$$A_1 = n^3\alpha^3,$$

$$A_2 = n\alpha^2 \sup\left\{ \sum_{u,v} x_{u,v} : \sum M_\alpha\left(x_{u,v}\right) \leq p \right\} \sim \begin{cases} n^3\alpha^2 M_\alpha^{-1}\left(\frac{p}{n^2}\right), & \text{jeżeli } \frac{p}{n^2} \leq \ln\frac{1}{\alpha}, \\ n^3\alpha^2, & \text{jeżeli } \frac{p}{n^2} > \ln\frac{1}{\alpha}, \end{cases}$$

$$A_3 = \alpha \sup\left\{ \sum_{u,v,w} x_{u,v} y_{v,w} : \sum M_\alpha\left(x_{u,v}\right) \leq p, \sum M_\alpha\left(y_{v,w}\right) \leq p \right\},$$

$$A_4 = \sup\left\{ \sum_{u,v,w} x_{u,v} y_{v,w} z_{w,u} : \sum M_\alpha\left(x_{u,v}\right) \leq p, \sum M_\alpha\left(y_{v,w}\right) \leq p, \sum M_\alpha\left(z_{w,u}\right) \leq p \right\}.$$

Oszacowanie składnika A_2 wynika z wypukłości funkcji M_α. Zajmijmy się oszacowaniami A_3 i A_4. Mamy

$$\begin{aligned} A_3 &= \alpha \sup \left\{ \sum_{u,v,w} x_{u,v} y_{v,w} : \sum M_\alpha (x_{u,v}) \leq p, \sum M_\alpha (y_{v,w}) \leq p \right\} \\ &= n\alpha \sup \left\{ \sum_v y_v \sum_u x_{u,v} : \sum_{u,v} M_\alpha (x_{u,v}) \leq p, \sum_v M_\alpha (y_v) \leq p/n \right\} \\ &= n^2\alpha \sup \left\{ \sum_v x_v y_v : \sum_v M_\alpha (x_v) \leq p/n, \sum_v M_\alpha (y_v) \leq p/n \right\} \\ &= n^2\alpha \sup \left\{ \sum_v x_v^2 : \sum_v M_\alpha (x_v) \leq p/n \right\} \\ &\sim \begin{cases} n^2\alpha \left(M_\alpha^{-1}\left(\frac{p}{n}\right)\right)^2, \text{ jeżeli } \frac{p}{n} \leq \ln \frac{1}{\alpha}, \\ n\alpha \frac{p}{\ln \frac{1}{\alpha}}, \text{ jeżeli } \ln \frac{1}{\alpha} < \frac{p}{n} \leq n \ln \frac{1}{\alpha}, \\ n^3\alpha, \text{ jeżeli } \frac{p}{n} > n \ln \frac{1}{\alpha}. \end{cases} \end{aligned}$$

gdzie $y_v = \frac{1}{n} \sum_w y_{v,w}$. Ostatnia relacja wynika z wklęsłości funkcji $x \mapsto M_\alpha(\sqrt{x})$ na przedziale $[0;1]$. Powyżej wykorzystaliśmy też następującą, wynikającą z wypukłości M_α, nierówność

$$\begin{aligned} &\sup \left\{ \sum_{u,v,w} x_{u,v} y_{v,w} : M_\alpha (y_{v,w}) \leq p \right\} \\ &= \sup \left\{ \sum_{u,v} x_{u,v} n \left(\frac{1}{n} \sum_w y_{v,w} \right) : \sum_v n \left(\frac{1}{n} \sum_w M_\alpha (y_{v,w}) \right) \leq p \right\} \\ &= n \sup \left\{ \sum_{u,v} x_{u,v} y_v : \sum_v M_\alpha (y_v) \leq p/n \right\}, \end{aligned}$$

Wreszcie, szacowanie na A_4 wynika z następującej (wynikającej z nierówności Schwarza) nierówności

$$\sum_{u,v,w} x_{u,v} y_{v,w} z_{w,u} \leq \left(\sum_{u,v} x_{u,v}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{v,w} y_{v,w}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{w,u} z_{w,u}^2 \right)^{1/2}.$$

$$A_4 = \sup\left\{\sum_{u,v,w} x^{(1)}_{u,v} x^{(2)}_{v,w} x^{(3)}_{w,u} : \sum_{u,v,w} M_\alpha\left(x^{(i)}_{u,v}\right) \le p \text{ dla } i = 1,2,3\right\}$$

$$= \sup\left\{\left(\sum_{u,v} x^2_{u,v}\right)^{3/2} : \sum M_\alpha\left(x_{u,v}\right) \le p\right\}$$

$$\sim \begin{cases} \left(\frac{p}{\ln\frac{1}{\alpha}}\right)^{3/2}, \text{ jeżeli } \frac{p}{n^2} \le \ln\frac{1}{\alpha}, \\ n^3, \text{ jeżeli } \frac{p}{n^2} > \ln\frac{1}{\alpha}. \end{cases}$$

Składnik D można oszacować w następujący sposób

$$D \sim n^3\alpha^3 + \begin{cases} n^3 M^{-1}_{\alpha^3}\left(\frac{p}{n^3}\right), \text{ jeżeli } \frac{p}{n^3} \le \ln\frac{1}{\alpha}, \\ n^3, \text{ jeżeli } \frac{p}{n^3} > \ln\frac{1}{\alpha}. \end{cases}$$

Zajmijmy się teraz składnikiem B.

$$B \le B_1 + B_2 + B_3 + B_4,$$

gdzie

$$B_1 = n^3\alpha^3,$$

$$\begin{aligned} B_2 &= \alpha \sup\left\{\sum_{u,v,w} y_{u,v,w} : \sum_{u,v,w} M_{\alpha^2}\left(y_{u,v,w}\right) \le p\right\} \\ &\sim \begin{cases} \alpha n^3 M^{-1}_{\alpha^2}\left(\frac{p}{n^3}\right), \text{ jeżeli } \frac{p}{n^3} \le \ln\frac{1}{\alpha}, \\ \alpha n^3, \text{ jeżeli } \frac{p}{n^3} > \ln\frac{1}{\alpha}, \end{cases} \\ B_3 &= \alpha^2 \sup\left\{\sum x_{u,v} : \sum M_\alpha\left(x_{u,v}\right) \le p\right\} \\ &\sim \begin{cases} \alpha^2 n^2 M^{-1}_{\alpha}\left(\frac{p}{n^2}\right), \text{ jeżeli } \frac{p}{n^2} \le \ln\frac{1}{\alpha}, \\ \alpha^2 n^2, \text{ jeżeli } \frac{p}{n^2} > \ln\frac{1}{\alpha}. \end{cases} \end{aligned}$$

Pozostał ostatni składnik, B_4. Na mocy wypukłości M_{α^2} mamy

$$\begin{aligned} B_4 &= \sup\left\{\sum x_{u,v} y_{v,w,u} : \sum M_\alpha\left(x_{u,v}\right) \le p, \sum M_{\alpha^2}\left(y_{v,w,u}\right) \le p\right\} \\ &= n \sup\left\{\sum_{u,v} x_{u,v}\left(\frac{1}{n}\sum_w y_{v,w,u}\right) : \sum M_\alpha\left(x_{u,v}\right) \le p, \sum M_{\alpha^2}\left(y_{v,w,u}\right) \le p\right\} \\ &= n \sup\left\{\sum_{u,v} x_{u,v} y_{u,v} : \sum_{u,v} M_\alpha\left(x_{u,v}\right) \le p, \sum_{u,v} M_{\alpha^2}\left(y_{u,v}\right) \le p/n\right\}, \qquad (3.30) \end{aligned}$$

gdzie $y_{u,v} = \frac{1}{n}\sum_w y_{v,w,u}$. Zajmijmy się więc oszacowaniem (3.30).

Zbiór

$$E=\left\{(x_{u,v},y_{u,v}):\sum_{u,v}M_{\alpha}\left(x_{u,v}\right)\leq p,\sum_{u,v}M_{\alpha^2}\left(y_{u,v}\right)\leq p/n\right\}$$

jest wypukły i zwarty, szukane supremum jest osiągane w pewnym puncie (x^0,y^0) zbioru E.

Zamiast pisać podwójne ideksy (v,w) ponumerujmy współrzędne punktu (x_0,y_0) pomocą liczb $1,2,...,n^2$. Załóżmy, że

$$x_1^0\geq x_2^0\geq ...\geq x_{n^2}^0,$$

wówczas

$$y_1^0\geq y_2^0\geq ...\geq y_{n^2}^0.$$

Jeżeli $r<s$ jest parą indeksów, dla których

$$\begin{array}{rcl}1&>&x_r^0>x_s^0>0,\\1&>&y_r^0>y_s^0>0,\end{array}$$

to ze względu na równość

$$x_r^0y_r^0+x_s^0y_s^0=\left(x_r^0+dx\right)y_r^0+\left(x_s^0-\frac{y_r^0}{y_s^0}dx\right)y_s^0$$

musi zachodzić nierówność

$$\begin{aligned}&M_{\alpha}\left(x_r^0+dx\right)+M_{\alpha}\left(x_s^0-\frac{y_r^0}{y_s^0}dx\right)\\&=M_{\alpha}\left(x_r^0\right)+M_{\alpha}'\left(x_r^0\right)dx+M_{\alpha}\left(x_s^0\right)-\frac{y_r^0}{y_s^0}M_{\alpha}'\left(x_s^0\right)dx\\&\geq M_{\alpha}\left(x_r^0\right)+M_{\alpha}\left(x_s^0\right).\end{aligned}$$

Powyższa nierówność daje

$$y_s^0\left(1+\ln\left(1+\frac{x_r^0}{\alpha}\right)\right)=y_r^0\left(1+\ln\left(1+\frac{x_s^0}{\alpha}\right)\right).$$

Podobnie otrzymujemy następującą równość

$$x_s^0\left(1+\ln\left(1+\frac{y_r^0}{\alpha^2}\right)\right)=x_r^0\left(1+\ln\left(1+\frac{y_s^0}{\alpha^2}\right)\right).$$

Wprowadźmy oznaczenia

$$\xi_s = \frac{x_s^0}{\alpha}, \theta_s = \frac{y_s^0}{\alpha^2}, \xi_r = \frac{x_r^0}{\alpha}, \theta_r = \frac{y_r^0}{\alpha^2}.$$

Przy tych oznaczeniach dostajemy równości

$$\begin{aligned} \frac{\theta_s}{1+\ln(1+\xi_s)} &= \frac{\theta_r}{1+\ln(1+\xi_r)} = \lambda, \\ \frac{\xi_s}{1+\ln(1+\theta_s)} &= \frac{\xi_r}{1+\ln(1+\theta_r)} = \mu. \end{aligned}$$

Stąd dalej dostajemy

$$\frac{\xi_s}{1+\ln(1+\lambda+\lambda\ln(1+\xi_s))} = \frac{\xi_r}{1+\ln(1+\lambda+\lambda\ln(1+\xi_r))} = \mu \tag{3.31}$$

Rozpatrzmy funkcję

$$\mu(\xi) = \frac{\xi}{1+\ln(1+\lambda+\lambda\ln(1+\xi))}.$$

Mamy

$$\begin{aligned} \frac{d\mu}{d\xi} = & \frac{1}{1+\ln(1+\lambda+\lambda\ln(1+\xi))} - \\ & + \frac{\xi\lambda}{(1+\xi)(1+\lambda+\lambda\ln(1+\xi))(1+\ln(1+\lambda+\lambda\ln(1+\xi)))^2} > 0 \end{aligned}$$

o ile $\xi > 0$. Z tego wynika, że funkcja μ jest różnowartościowa w $(0; +\infty)$ i równość (3.31) nie może zachodzić, bowiem $\xi_r = y_r^0/\alpha > y_s^0/\alpha = \xi_s$. Z tych spostrzeżeń wynika, że jeżeli dla $1 \le r < s \le n^2$

$$1 > x_r^0 > x_s^0 > 0,$$

to

$$y_r^0 = 1 \text{ lub } y_r^0 = y_s^0.$$

Ale w ostatnim przypadku można również za x_r^0, x_s^0 podstawić $\frac{x_r^0+x_s^0}{2}$, wtedy suma $x_r^0 y_r^0 + x_s^0 y_s^0$ się nie zmieni, zaś suma

$$M_\alpha\left(x_r^0\right) + M_\alpha\left(x_s^0\right)$$

(na mocy wypukłości M_α) nie wzrośnie. Podobnie rozumujemy, gdy

$$1 > y_r^0 > y_s^0 > 0.$$

Z powyższych rozważań wynika, że współrzędne punktu (x^0, y^0) mają postać

$$x = x_1^0 = ... = x_k^0 > \tilde{x} = x_{k+1}^0 = ... = x_{k+l}^0 > x_{k+l+1}^0 = ... = x_{n^2}^0 = 0,$$

$$y = y_1^0 = ... = y_k^0 > \tilde{y} = y_{k+1}^0 = ... = y_{k+l}^0 > y_{k+l+1}^0 = ... = y_{n^2}^0 = 0,$$

przy czym $x = 1$ lub $y = 1$. Wówczas mamy

$$\begin{aligned} kM_\alpha(x) + lM_\alpha(\tilde{x}) &\leq p, \\ kM_{\alpha^2}(y) + lM_{\alpha^2}(\tilde{y}) &\leq p/n, \end{aligned}$$

$$B_4 = n(kxy + l\tilde{x}\tilde{y}) \geq n \max_{1 \leq l \leq n^2} lM_\alpha^{-1}\left(\frac{p}{l}\right) M_{\alpha^2}^{-1}\left(\frac{p}{nl}\right).$$

Dalej mamy

$$B_4 \leq 2n \max(kxy, l\tilde{x}\tilde{y}) \leq 2n \max_{1 \leq l \leq n^2} lM_\alpha^{-1}\left(\frac{p}{l}\right) M_{\alpha^2}^{-1}\left(\frac{p}{nl}\right).$$

Zatem

$$B_4 \sim n \max_{1 \leq l \leq n^2} lM_\alpha^{-1}\left(\frac{p}{l}\right) M_{\alpha^2}^{-1}\left(\frac{p}{nl}\right).$$

Aby otrzymać jawną postać B_4 zauważmy, że dla $\beta \in \left(0; \frac{1}{e}\right)$, $x \in [0; 1]$ mamy

$$M_\beta(x) \sim \begin{cases} x \text{ jeżeli } 0 \leq x \leq e\beta, \\ x \ln \frac{x}{\beta} \text{ jeżeli } e\beta < x \leq 1; \end{cases}$$

a stąd, dla $y \in \left[0, \ln \frac{1}{\beta}\right]$

$$M_\beta^{-1}(y) \sim \begin{cases} y \text{ jeżeli } 0 \leq y \leq e\beta, \\ \frac{y}{\ln \frac{y}{\beta}} \text{ jeżeli } e\beta < y \leq \ln \frac{1}{\beta}. \end{cases} \tag{3.32}$$

Rozważmy następujące dwa przypadki.
I. $n^2 \geq \frac{p}{\ln \frac{1}{\alpha}} \geq 2$. Mamy

$$\begin{aligned} M_\alpha^{-1}\left(\frac{p}{l}\right) &\sim f_1(l) := \begin{cases} \frac{p}{l}, \text{ jeżeli } \frac{p}{l} \leq e\alpha, \\ \frac{p}{l \ln \frac{p}{l\alpha}}, \text{ jeżeli } \frac{p}{l} > e\alpha; \end{cases} \\ M_{\alpha^2}^{-1}\left(\frac{p}{nl}\right) &\sim f_2(l) := \begin{cases} \frac{p}{nl}, \text{ jeżeli } \frac{p}{nl} \leq e^2\alpha^2, \\ \frac{p}{nl \ln \frac{p}{nl\alpha^2}}, \text{ jeżeli } \frac{p}{nl} > e^2\alpha^2. \end{cases} \end{aligned}$$

Rozważmy funkcję $l \mapsto nlf_1(l)\, f_2(l)$ przy naturalnym założeniu (cf. [14]), że $n\alpha > 1$. Mamy

$$\frac{d}{dl}\{nlf_1(l)\, f_2(l)\}$$
$$= \begin{cases} -\frac{p^2}{l^2}, \text{ jeżeli } 0 \le \frac{p}{l} \le e\alpha, \\ -\frac{p^2}{l^2}\frac{\ln\frac{p}{\alpha l}-1}{\left(\ln\frac{p}{l\alpha}\right)^2}, \text{ jeżeli } e\alpha < \frac{p}{l} \le e^2\alpha^2 n, \\ -\frac{p^2}{l^2}\frac{\left(\ln\frac{p}{l\alpha}-1\right)\left(\ln\frac{p}{nl\alpha^2}-1\right)-1}{\ln\frac{p}{l\alpha}\ln\frac{p}{nl\alpha^2}}, \text{ jeżeli } e^2\alpha^2 n < \frac{p}{l} \le \ln\frac{1}{\alpha}; \end{cases} < 0,$$

więc maksimum

$$n \max_{1\le l\le n^2} lf_1(l)\, f_2(l)$$

jest osiągane dla $l \sim \frac{p}{\ln\frac{1}{\alpha}}$, wówczas $M_\alpha^{-1}\left(\frac{p}{l}\right) \sim 1$ oraz

$$M_{\alpha^2}^{-1}\left(\frac{p}{nl}\right) \sim \begin{cases} \frac{p}{nl}, \text{ jeżeli } \frac{p}{nl} \le e\alpha^2, \\ \frac{p}{nl\ln\frac{p}{nl\alpha^2}}, \text{ jeżeli } \ln\frac{1}{\alpha} > \frac{p}{nl} > e\alpha^2 \end{cases}$$

i mamy

$$\begin{aligned} B_4 &\sim p, \text{ jeżeli } n \ge \frac{\ln\frac{1}{\alpha}}{e\alpha^2}, \\ B_4 &\sim \frac{p}{\ln\frac{\ln\frac{1}{\alpha}}{n\alpha^2}}, \text{ jeżeli } n < \frac{\ln\frac{1}{\alpha}}{e\alpha^2}. \end{aligned}$$

II. $p > n^2\ln\frac{1}{\alpha}$. W tym przypadku maksimum jest osiągane dla $l \sim n^2$ i mamy

$$\begin{aligned} B_4 &\sim p, \text{ jeżeli } p \le e\alpha^2 n^3, \\ B_4 &\sim \frac{p}{\ln\frac{p}{n^3\alpha^2}}, \text{ jeżeli } n^3\ln\frac{1}{\alpha} > p > e\alpha^2 n^3, \\ B_4 &\sim n^3, \text{ jeżeli } p \ge n^3\ln\frac{1}{\alpha}. \end{aligned}$$

Korzystając ze wzoru (3.32), otrzymujemy również $A_1 = B_1 = n^3\alpha^3$,

$$A_2 \sim \begin{cases} np\alpha^2, \text{ jeżeli } \frac{p}{n^2} \le e\alpha, \\ np\alpha^2/\ln\frac{p}{\alpha n^2}, \text{ jeżeli } e\alpha < \frac{p}{n^2} \le \ln\frac{1}{\alpha}, \\ n^3\alpha^2, \text{ jeżeli } \frac{p}{n^2} > \ln\frac{1}{\alpha}; \end{cases}$$

$$A_3 \sim \begin{cases} p^2\alpha, \text{ jeżeli } \frac{p}{n} \leq e\alpha, \\ p^2\alpha/\left(\ln\frac{p}{\alpha n}\right)^2, \text{ jeżeli } e\alpha < \frac{p}{n} \leq \ln\frac{1}{\alpha}, \\ n\alpha\frac{p}{\ln\frac{1}{\alpha}}, \text{ jeżeli } \ln\frac{1}{\alpha} < \frac{p}{n} \leq n\ln\frac{1}{\alpha}, \\ n^3\alpha, \text{ jeżeli } \frac{p}{n} > n\ln\frac{1}{\alpha}; \end{cases}$$

$$A_4 \sim \begin{cases} \left(\frac{p}{\ln\frac{1}{\alpha}}\right)^{3/2}, \text{ jeżeli } \frac{p}{n^2} \leq \ln\frac{1}{\alpha}, \\ n^3, \text{ jeżeli } \frac{p}{n^2} > \ln\frac{1}{\alpha}; \end{cases}$$

$$D \sim n^3\alpha^3 + \begin{cases} p, \text{ jeżeli } \frac{p}{n^3} \leq e\alpha^3, \\ p/\ln\frac{p}{\alpha^3 n^3}, \text{ jeżeli } e\alpha^3 < \frac{p}{n^3} \leq \ln\frac{1}{\alpha}, \\ n^3, \text{ jeżeli } \frac{p}{n^3} > \ln\frac{1}{\alpha}; \end{cases}$$

$$B_2 \quad \sim \quad \begin{cases} \alpha p, \text{ jeżeli } \frac{p}{n^3} \leq e\alpha^2, \\ \alpha p/\ln\frac{p}{\alpha^2 n^3}, \text{ jeżeli } e\alpha^2 < \frac{p}{n^2} \leq \ln\frac{1}{\alpha}, \\ \alpha n^3, \text{ jeżeli } \frac{p}{n^3} > \ln\frac{1}{\alpha}; \end{cases}$$

$$B_3 \quad \sim \quad \begin{cases} \alpha^2 p, \text{ jeżeli } \frac{p}{n^2} \leq e\alpha, \\ \alpha^2 p/\ln\frac{p}{\alpha n^2}, \text{ jeżeli } e\alpha < \frac{p}{n^2} \leq \ln\frac{1}{\alpha}, \\ \alpha^2 n^2, \text{ jeżeli } \frac{p}{n^2} > \ln\frac{1}{\alpha}. \end{cases}$$

Podsumowując, możemy zauważyć, że największy wkład w sumę $A+B+D$ mają składniki A_4, i D.

$$\|\Delta\|_p \geq c\,(A_4 + D) \sim n^3\alpha^3 + \begin{cases} \left(\frac{p}{\ln\frac{1}{\alpha}}\right)^{3/2} + p, \text{ jeżeli } \frac{p}{n^2} \leq \ln\frac{1}{\alpha}, \frac{p}{n^3} \leq \alpha^3; \\ \left(\frac{p}{\ln\frac{1}{\alpha}}\right)^{3/2} + \frac{p}{\ln\frac{ep}{n^3\alpha^3}} \text{jeżeli } \frac{p}{n^2} \leq \ln\frac{1}{\alpha}, \frac{p}{n^3} > \alpha^3; \\ n^3, \text{ jeżeli } \frac{p}{n^2} > \ln\frac{1}{\alpha}. \end{cases}$$

Załóżmy, że

$$\frac{p}{n^2} \leq \ln\frac{1}{\alpha}, p = qn^3\alpha^3 \geq 3\ln\frac{1}{\alpha}, q \geq 1, \tag{3.33}$$

wówczas otrzymujemy

$$\|\Delta\|_p \geq cn^3\alpha^3\frac{q}{\ln(eq)}.$$

Ponieważ $E\Delta \sim n^3\alpha^3$, więc dla $K \leq \frac{c}{2}\frac{q}{\ln(eq)}$ z semihiperkontrakcji otrzymujemy

$$P\,(\Delta \geq KE\Delta) \geq P\left(\Delta \geq \frac{1}{2}\|\Delta\|_p\right) \geq \exp\left(-C_1 p\right).$$

W pracy [14] podane jest następujące, pochodzące od Vu (zob. [16]), szacowanie

$$P(\Delta \geq KE\Delta) \geq \exp\left(-Cn^2\alpha^2 \ln\frac{1}{\alpha}\right). \tag{3.34}$$

Jeżeli zachodzi

$$p = qn^3\alpha^3 < C_1^{-1}Cn^2\alpha^2 \ln\frac{1}{\alpha}, \tag{3.35}$$

to otrzymane przez nas oszacowanie będzie lepsze niż to podane w [14]. Zastanówmy się czy jest to możliwe. Warunki (3.33) oraz (3.35) są równoważne warunkom:

$$\begin{gathered} q \geq C(K), \\ n \leq \frac{1}{q}\left(\frac{1}{\alpha}\right)^3 \ln\frac{1}{\alpha}, \\ n \geq \left(\frac{3}{q}\right)^{1/3}\frac{1}{\alpha}\left(\ln\frac{1}{\alpha}\right)^{1/3}, \\ n < \frac{c}{q}\frac{1}{\alpha}\ln\frac{1}{\alpha}. \end{gathered}$$

I podobnie jak w przypadku gwiazd stwierdzamy, że dla dostatecznie małych α, niezależnie od wartości q i c można znaleźć n spełniające powyższe warunki. Dla tych wartości parametrów α, n, K szacowanie (3.34) jest gorsze niż otrzymane przez nas.

Dodajmy, że z oszacowań górnych na $\|\Delta\|_p$, które można otrzymać z Twierdzenia 7, wynikają także oszacowania z góry na $P(\Delta \geq KE\Delta)$. Są one jednak gorsze niż te otrzymane przez autorów [14], mianowicie w [14] otrzymane szacowania mają postać: dla $t > 0$

$$P(\Delta \geq (1+t)E\Delta) \leq e^{-c(t)n^2\alpha^2},$$

zaś oszacowania, które można otrzymać z Twierdzenia 7 mają postać: dla dostatecznie dużego K

$$P(\Delta \geq KE\Delta) \leq e^{-cn^2\alpha^2/\ln\frac{1}{\alpha}}.$$

4 Oszacowania momentów i ogonów wielowymiarowego chaosu generowanego przez symetryczne zmienne losowe z logarytmicznie wklęsłymi ogonami

W tym rozdziale zajmujemy się oszacowaniami momentów i ogonów $S = \sum a_{i_1,\ldots,i_d} X^{(1)}_{i_1} \cdots X^{(d)}_{i_d}$ w przypadku, gdy $X^{(r)}_i$ są symetrycznymi zmiennymi losowymi z logarytmicznie wklęsłymi ogonami. (Jest to również przypadek chaosów gaussowskich i chaosów rademacherowych.) Dokładne oszacowania (z dokładnością do uniwersalnych stałych) na ogony i momenty S nie są znane gdy $d \geq 3$. Dla $d = 1, 2$ (por. [19], [21]) mamy następujące szacowania.

$$\left\|\sum a_i X^{(1)}_i\right\|_p \sim \sup_{x^{(1)} \in \tilde{B}^{(1)}_p} \sum a_i x^{(1)}_i, \tag{4.1}$$

$$\begin{aligned} \left\|\sum a_{ij} X^{(1)}_i X^{(2)}_j\right\|_p \sim & \sup_{x^{(1)} \in \tilde{B}^{(1)}_p} \sum_i x^{(1)}_i \sqrt{\sum_j a_{ij}^2} \\ & + \sup_{x^{(2)} \in \tilde{B}^{(2)}_p} \sum_j x^{(2)}_j \sqrt{\sum_i a_{ij}^2} \\ + & \sup_{x^{(1)} \in \tilde{B}^{(1)}_p, x^{(2)} \in \tilde{B}^{(2)}_p} \sum a_{ij} x^{(1)}_i x^{(2)}_j. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Definicje $\tilde{B}^{(1)}_p, \tilde{B}^{(2)}_p$ - zob. podrozdział 4.1.

Ostatnio Latała udowodnił takie oszacowania dla chaosów gaussowskich rzędu 3 - zob. podrozdział 4.2.

Wczesniej Borell [3] oraz niezależnie Arcones i Giné [2] otrzymali dokładne oszacowania dla chaosów gaussowskich, w których występowały jednak wartości oczekiwane supremów pewnych procesów empirycznych. W tym rozdziale uogólnione są ich wyniki na chaosy generowane przez symetryczne zmienne losowe z logarytmicznie wklęsłymi ogonami. Używamy w tym celu podobnych metod jak autorzy [2], tzn. zjawiska koncentracji miary udowodnionego przez Talagranda w [26]. Adaptujemy tez kilka metod z [21].

W ostatnim podrozdziale podajemy oszacowania innego typu. Występują w nich momenty chaosów generowanych tylko przez zmienne rademacherowskie i dają oszacowania p - tego momentu z dokładnością do czynnika $(\max(1, \ln p))^{d^2}$. Wydaje się jednak, że szacowanie chaosów rademacherowych jest zdecydowanie bardziej zawiłą rzeczą niż szacowanie chaosów gaussowskich. W dowodach używamy technik z [23].

4.1 Uogólnienie wyników Borella oraz Arconesa i Giné

4.1.1 Notacja i sformułowanie wyników

Stosujemy podobne konwencje i oznaczenia co poprzednio. Ponadto, dla $h = (h_1, ..., h_n) \in R^n$ niech $|h|$ oznacza $\sqrt{h_1^2 + ... + h_n^2}$.

W [2] (strona 120) udowodniono następujące oszacowanie na ogony chaosu gaussowskiego $S = \sum a_{\mathbf{i}} g_{i_1}^{(1)} \cdots g_{i_d}^{(d)}$, generowanego przez zmienne $g_i^{(r)}, 1 \leq i \leq n, 1 \leq r \leq d$ o standardowym rozkładzie normalnym $N(0,1)$. Jeżeli liczby $\sigma(S)$ i $M_r, 1 \leq r \leq d$, spełniają warunki

$$\sigma(S) = \sup_{\left|h^{(k)}\right| \leq 1, 1 \leq k \leq d} \sum a_{\mathbf{i}} h_{i_1}^{(1)} \cdots h_{i_d}^{(d)},$$

$$P\left(\sup_{\left|h^{(k)}\right| \leq 1, r+1 \leq k \leq d} \sum a_{\mathbf{i}} \prod_{j=1}^{r} g_{i_j}^{(j)} \prod_{k=r+1}^{d} h_{i_k}^{(k)} \geq M_r \right) \leq \frac{1}{2d},$$

wówczas dla wszystkich $t > 0$

$$P\left(|S| \geq \sigma(S) t^d + \sum_{r=1}^{d} \binom{d}{r} t^{d-r} M_r \right) \leq \frac{1}{2} e^{-t^2/2}.$$

Udowodnimy analogiczny rezultat w ogólniejszym przypadku. Odtąd $X_i^{(r)}, 1 \leq i \leq n, 1 \leq r \leq d$, będą oznaczały niezależne, symetryczne zmienne losowe o tej własności, że

$$P\left(\left| X_i^{(r)} \right| \geq t \right) = e^{-N_i^{(r)}(t)}, \text{ dla } 1 \leq i \leq n, 1 \leq r \leq d, t \geq 0,$$

gdzie $N_i^{(r)} : [0; +\infty) \to [0; +\infty)$ jest wypukłą, ściśle rosnącą funkcją, znormalizowaną w taki sposób, że

$$N_i^{(r)}(1) = 1.$$

Dla $1 \leq i \leq n$ i $1 \leq r \leq d$ zdefiniujmy

$$\tilde{N}_i^{(r)}(t) = \begin{cases} t^2 \text{ jeżeli } |t| \leq 1, \\ N_i^{(r)}(|t|) \text{ jeżeli } |t| > 1. \end{cases}$$

Dalej, zdefiniujmy zbiór $\tilde{B}_p^{(r)}$ następująco

$$\tilde{B}_p^{(r)} = \left\{ b^{(r)} \in R^n : \sum \tilde{N}_i^{(r)}\left(b_i^{(r)} \right) \leq p \right\}.$$

Dla $p \geq 1$ i $D \subset \{1, 2, ..., d\}$ określmy

$$M_{D,p} = E \sup_{b^{(k)} \in \tilde{B}_p^{(k)}, k \in D} \sum a_{\mathbf{i}} \prod_{j \in D'} X_{i_j}^{(j)} \prod_{k \in D} b_{i_k}^{(k)}. \tag{4.3}$$

Uwaga. Dla $D = \emptyset$ stosujemy następującą konwencję

$$\sup_{b^{(k)} \in \tilde{B}_p^{(k)}, k \in D} \sum a_{\mathbf{i}} \prod_{j \in D'} X_{i_j}^{(j)} \prod_{k \in D} b_{i_k}^{(k)} = \left| \sum a_{\mathbf{i}} X_{i_1}^{(1)} \cdots X_{i_d}^{(d)} \right|.$$

Teraz jesteśmy gotowi do sformułowania głównego rezultatu niniejszego podrozdziału.

Twierdzenie 8 *Rozważmy chaos S rzędu d, generowany przez zmienne $X_i^{(r)}$,*

$$S = \sum a_{\mathbf{i}} X_{i_1}^{(1)} \cdots X_{i_d}^{(d)}.$$

Dla $p \geq 1$ zachodzą następujące oszacowania

$$P\left(|S| \geq C(d) \sum_{D \subset \{1,2,\ldots,d\}} M_{D,p} \right) \leq e^{-p}, \tag{4.4}$$

$$P\left(|S| \geq c(d) \sum_{D \subset \{1,2,\ldots,d\}} M_{D,p} \right) \geq \min(c(d), e^{-p}), \tag{4.5}$$

co więcej

$$\|S\|_p \sim_d \sum_{D \subset \{1,2,\ldots,d\}} M_{D,p}. \tag{4.6}$$

Wniosek 2 (Semihiperkontraktywność S) *Dla $p \geq 1$ oraz $\lambda \geq 1$ zachodzi*

$$\|S\|_{\lambda p} \leq \lambda^d C_1(d) \|S\|_p. \tag{4.7}$$

Dowód. Dla $\lambda \geq 1, 1 \leq k \leq d$ z wypukłości $N_i^{(k)}$ mamy $\tilde{B}_{\lambda p}^{(k)} \subset \lambda \tilde{B}_p^{(k)}$. Z tego wynika, że

$$M_{D,\lambda p} \leq \lambda^{\#D} M_{D,p}.$$

Z nierówności powyżej oraz z (4.6) dla $C_1(d) = C(d)/c(d)$ wynika, że

$$\begin{aligned}
\|S\|_{\lambda p} &\leq C(d) \sum_{D \subset \{1,2,\ldots,d\}} M_{D,\lambda p} \leq C(d) \sum_{D \subset \{1,2,\ldots,d\}} \lambda^{\#D} M_{D,p} \\
&\leq C(d) \lambda^d \sum_{D \subset \{1,2,\ldots,d\}} M_{D,p} \leq C(d) \lambda^d \frac{1}{c(d)} \|S\|_p \\
&\leq \lambda^d C_1(d) \|S\|_p.
\end{aligned}$$

■

Mamy również następujący, znany rezultat, którego będziemy używać w dalszej części.

Wniosek 3 *Dla $p \geq 1$ zachodzi*

$$\|S\|_p \leq C_2(d)\, p^d \sqrt{\sum a_{\mathbf{i}}^2}. \tag{4.8}$$

Dowód. Zauważmy, że $\|S\|_2 \sim_d \sqrt{\sum a_{\mathbf{i}}^2}$ tak więc dla $p \in [1;2)$ nierówność (4.8) wynika z monotoniczności momentów, zaś dla $p \geq 2$ z Wniosku 2 mamy

$$\|S\|_p \leq (p/2)^d C_1(d) \|S\|_2 \leq C_2(d)\, p^d \sqrt{\sum a_{\mathbf{i}}^2}.$$

■

Uwaga. Z Twierdzenia 1 wynika, że Twierdzenie 8 jest również prawdziwe (być może z gorszymi stałymi) dla nieuzależnionego chaosu rzędu d,

$$\tilde{S} = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_d \leq n} a_{\mathbf{i}} X_{i_1} \cdots X_{i_d},$$

gdzie symetryczne zmienne losowe X_i są niezależne i mają logarytmicznie wklęsłe ogony.

Uwaga. Odnotujmy, że prawdziwy jest również analog Twierdzenia 8 dla bardziej ogólnych zmiennych niż S, mianowicie dla zmiennych postaci

$$S_T = \sup_{\mathbf{a} \in T} \sum a_{\mathbf{i}} X_{i_1}^{(1)} \cdots X_{i_d}^{(d)}$$

(T jest niepustą rodziną wielowymiarowych macierzy o współczynnikach rzeczywistych), przy czym liczby $M_{D,p}$ należy zastąpić przez liczby $M_{T,D,p}$, zdefiniowane następująco

$$M_{T,D,p} = E \sup_{\mathbf{a} \in T} \sup_{b^{(k)} \in \tilde{B}_p^{(k)}, k \in D} \sum a_{\mathbf{i}} \prod_{j \in D'} X_{i_j}^{(j)} \prod_{k \in D} b_{i_k}^{(k)}.$$

Metoda dowodu jest podobna do dowodu Twierdzenia 8. W [1], posługując się rezultatami z [19], udowodniono analogiczne szacowania dla zmiennych o wartościach w przestrzeniach Banacha.

Innego rodzaju metody badania S_T dla chaosów rademacherowych, oparte na entropii i tensoryzacji, zostały rozwinięte w [4].

4.1.2 Dowód Twierdzenia 8

Będziemy używać koncentracyjnych właściwości miary μ o gęstości $\frac{1}{2}e^{-|x|}$ względem miary Lebesgue'a, udowodnionych przez Talagranda.

Dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej N i miary produktowej $\mu^{\otimes N}$ na R^N zachodzi następująca nierówność koncentracyjna

$$\mu^{\otimes N}(A+V_s) \geq 1-\left\{\mu^{\otimes N}(A)\right\}^{-1} e^{-s}, \tag{4.9}$$

gdzie $V_s = \left\{x \in R^N : \sum \min\left(|x_i|, x_i^2\right) \leq 36s\right\}$. Nierówność (4.9) udowodniono w [26], alternatywny, prostszy dowód został podany w [25].

W celu udowodnienia oszacowań na ogony i momenty S z góry zauważmy wpierw, że $X_i^{(r)} = \hat{X}_i^{(r)} + \hat{\hat{X}}_i^{(r)}$ dla niezależnych, symetrycznych wektorów losowych $\left(\hat{X}_i^{(r)}, \hat{\hat{X}}_i^{(r)}\right)$, dla których

$$P\left(\left|\hat{X}_i^{(r)}\right| \geq t\right) = e^{-\hat{N}_i^{(r)}(t)}, \text{ gdzie } \hat{N}_i^{(r)}(t) = \begin{cases} t \text{ jeżeli } 0 \leq t \leq 1, \\ N_i^{(r)}(t) \text{ jeżeli } t > 1 \end{cases}$$

oraz $\left|\hat{\hat{X}}_i^{(r)}\right| \leq 1$ prawie wszędzie. Z zasady kontrakcji (por. [18] str. 19) i z szacowania $E\left|\hat{X}_i^{(r)}\right| \geq \int_0^1 e^{-t}dt > \frac{1}{2}$, mamy

$$\begin{aligned}
\|S\|_p &= \left\|\sum a_{\mathbf{i}} \prod_{j=1}^{d}\left(\hat{X}_{i_j}^{(j)} + \hat{\hat{X}}_{i_j}^{(j)}\right)\right\|_p \\
&\leq \sum_{D\subset\{1,2,\ldots,d\}} \left\|\sum a_{\mathbf{i}} \prod_{j\in D'} \hat{X}_{i_j}^{(j)} \prod_{k\in D} \hat{\hat{X}}_{i_k}^{(k)}\right\|_p \\
&\leq \sum_{D\subset\{1,2,\ldots,d\}} 2^{\#D} \left\|\sum a_{\mathbf{i}} \prod_{j\in D'} \hat{X}_{i_j}^{(j)} \prod_{k\in D} \hat{X}_{i_k}^{(k)}\right\|_p \\
&= 3^d \left\|\sum a_{\mathbf{i}} \hat{X}_{i_1}^{(1)} \cdots \hat{X}_{i_d}^{(d)}\right\|_p .
\end{aligned}$$

Zatem, w celu udowodnienia oszacowania w (4.6) z góry, tzn.

$$\|S\|_p \leq C(d) \sum_{D\subset\{1,2,\ldots,d\}} M_{D,p},$$

wystarczy udowodnić, że

$$\left\|\hat{S}\right\|_p \leq C(d) \sum_{D\subset\{1,2,\ldots,d\}} M_{D,p}, \tag{4.10}$$

gdzie $\hat{S} = \sum a_{\mathbf{i}} \hat{X}^{(1)}_{i_1} \cdots \hat{X}^{(d)}_{i_d}$. Poniżej dowodzimy, że

$$\hat{M}_{D,p} \leq 3^{\#D'} M_{D,p}, \tag{4.11}$$

gdzie

$$\hat{M}_{D,p} = E \sup_{b^{(k)} \in \tilde{B}^{(k)}_p, k \in D} \sum a_{\mathbf{i}} \prod_{j \in D'} \hat{X}^{(j)}_{i_j} \prod_{k \in D} b^{(k)}_{i_k}.$$

Następnie udowodnimy, że

$$\left\| \hat{S} \right\|_p \leq C(d) \sum_{D \subset \{1,2,\ldots,d\}} \hat{M}_{D,p}. \tag{4.12}$$

To razem z (4.11) da nierówność (4.10).

Mając szacowanie $\|S\|_p$ z góry natychmiast otrzymujemy, poprzez standardowe zastosowanie nierówności Czebyszewa, oszacowanie z góry (4.4) na ogony S.

W celu udowodnienia (4.11) zastosujemy następujący

Lemat 9 *Dla $p \geq 0, D = \{k_1, \ldots, k_l\} \subset \{1, 2, \ldots, d\}, j \in D'$ oraz dla liczb rzeczywistych $a_{\mathbf{i}_I}$, gdzie $I = \{j\} \cup D$, zachodzi*

$$E \sup_{b^{(k)} \in \tilde{B}^{(k)}_p, k \in D} \sum a_{\mathbf{i}_I} \hat{X}^{(j)}_{i_j} \prod_{k \in D} b^{(k)}_{i_k} \leq 3E \sup_{b^{(k)} \in \tilde{B}^{(k)}_p, k \in D} \sum a_{\mathbf{i}_I} X^{(j)}_{i_j} \prod_{k \in D} b^{(k)}_{i_k}.$$

Dowód. Mamy

$$\begin{aligned} & E \sup_{b^{(k)} \in \tilde{B}^{(k)}_p, k \in D} \sum a_{\mathbf{i}_I} \hat{X}^{(j)}_{i_j} \prod_{k \in D} b^{(k)}_{i_k} \\ \leq\ & E \sup_{b^{(k)} \in \tilde{B}^{(k)}_p, k \in D} \sum a_{\mathbf{i}_I} \hat{X}^{(j)}_{i_j} I_{\left\{ |\hat{X}^{(r)}_i| \leq 1 \right\}} \prod_{k \in D} b^{(k)}_{i_k} \\ & + E \sup_{b^{(k)} \in \tilde{B}^{(k)}_p, k \in D} \sum a_{\mathbf{i}_I} \hat{X}^{(j)}_{i_j} I_{\left\{ |\hat{X}^{(r)}_i| > 1 \right\}} \prod_{k \in D} b^{(k)}_{i_k}. \end{aligned}$$

Z zasady kontrakcji i z szacowania $E \left| X^{(r)}_i \right| > \frac{1}{2}$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} & E \sup_{b^{(k)} \in \tilde{B}^{(k)}_p, k \in D} \sum a_{\mathbf{i}_I} \hat{X}^{(j)}_{i_j} I_{\left\{ |\hat{X}^{(r)}_i| \leq 1 \right\}} \prod_{k \in D} b^{(k)}_{i_k} \\ \leq\ & 2E \sup_{b^{(k)} \in \tilde{B}^{(k)}_p, k \in D} \sum a_{\mathbf{i}_I} X^{(j)}_{i_j} \prod_{k \in D} b^{(k)}_{i_k}. \end{aligned}$$

Następnie mamy

$$\begin{aligned}
& E \sup_{b^{(k)}\in\tilde{B}_p^{(k)},k\in D} \sum a_{\mathbf{i}_I} \hat{X}_{i_j}^{(j)} I_{\left\{|\hat{X}_i^{(r)}|>1\right\}} \prod_{k\in D} b_{i_k}^{(k)} \\
&= E \sup_{b^{(k)}\in\tilde{B}_p^{(k)},k\in D} \sum a_{\mathbf{i}_I} X_{i_j}^{(j)} I_{\left\{|X_i^{(r)}|>1\right\}} \prod_{k\in D} b_{i_k}^{(k)} \\
&\leq E \sup_{b^{(k)}\in\tilde{B}_p^{(k)},k\in D} \sum a_{\mathbf{i}_I} X_{i_j}^{(j)} \prod_{k\in D} b_{i_k}^{(k)}.
\end{aligned}$$

Z powyższych nierówności otrzymujemy tezę. ■

Stosując Lemat 9 do kolejnych j należących do D' dostajemy (4.11)

$$\begin{aligned}
\hat{M}_{D,p} &= E \sup_{b^{(k)}\in\tilde{B}_p^{(k)},k\in D} \sum a_{\mathbf{i}} \prod_{j\in D'} \hat{X}_{i_j}^{(j)} \prod_{k\in D} b_{i_k}^{(k)} \\
&\leq 3^{\#D'} E \sup_{b^{(k)}\in\tilde{B}_p^{(k)},k\in D} \sum a_{\mathbf{i}} \prod_{j\in D'} X_{i_j}^{(j)} \prod_{k\in D} b_{i_k}^{(k)} \\
&= 3^{\#D'} M_{D,p}.
\end{aligned}$$

Niech teraz $\hat{M}_i^{(r)}$ będzie funkcją odwrotną do $\hat{N}_i^{(r)}$ na $[0;+\infty)$ oraz dla $x\in(-\infty;0)$ zdefiniujmy $\hat{M}_i^{(r)}(x) = -\hat{M}_i^{(r)}(-x)$, wówczas dla dowolnego zbioru borelowskiego $B\subset R^n$ zachodzi

$$\begin{aligned}
& P\left(\hat{S}\in B\right) \\
&= \mu^{\otimes d\cdot n}\left(\left\{\left(x^{(1)},...,x^{(d)}\right)\in R^{dn} : \sum a_{\mathbf{i}} \hat{M}_{i_1}^{(1)}\left(x_{i_1}^{(1)}\right)\cdots\hat{M}_{i_d}^{(d)}\left(x_{i_d}^{(d)}\right)\in B\right\}\right).
\end{aligned}$$

Dla $D\subset\{1,2,...,d\}, p\geq 1$, zdefiniujmy

$$A_{D,p} = \left\{x\in R^{dn} : \sup_{b^{(k)}\in\tilde{B}_p^{(k)},k\in D} \sum a_{\mathbf{i}} \prod_{j\in D'} \hat{M}_{i_j}^{(j)}\left(x_{i_j}^{(j)}\right) \prod_{k\in D} b_{i_k}^{(k)} \leq 2^{d+1}\hat{M}_{D,p}\right\}$$

oraz

$$A_p = \bigcap_{D\subset\{1,2,...,d\}} A_{D,p}.$$

Z nierówności Czebyszewa otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\mu^{\otimes dn}\left(A_{D,p}\right) &= P\left(\sup_{b^{(k)}\in\tilde{B}_p^{(k)},k\in D} \sum a_{\mathbf{i}} \prod_{j\in D'} \hat{X}_{i_j}^{(j)} \prod_{k\in D} b_{i_k}^{(k)} \leq 2^{d+1}\hat{M}_{D,p}\right) \\
&\geq 1-\frac{1}{2^{d+1}}.
\end{aligned}$$

Stąd

$$\mu^{\otimes dn}(A_p) \geq 1 - \left(\sum_{D \subset \{1,2,\ldots,d\}} A'_{D,p} \right) \geq 1 - 2^d \frac{1}{2^{d+1}} = \frac{1}{2}. \tag{4.13}$$

Niech teraz $R^{dn} \ni x = \left(x^{(1)}, ..., x^{(d)}\right) = \left(y^{(1)}, ..., y^{(d)}\right) + \left(z^{(1)}, ..., z^{(d)}\right) = y + z$, gdzie $y \in A_p$, $z \in V_s = \left\{z \in R^{dn} : \sum \min\left(|z_i|, z_i^2\right) \leq 36s\right\}$. Mamy następujące oszacowanie

$$\begin{aligned}
&\left|\sum a_{\mathbf{i}} \hat{M}^{(1)}_{i_1}\left(x^{(1)}_{i_1}\right) \cdot \ldots \cdot \hat{M}^{(d)}_{i_d}\left(x^{(d)}_{i_d}\right)\right| \\
&= \left|\sum a_{\mathbf{i}} \prod_{j=1}^{d} \left\{\hat{M}^{(j)}_{i_j}\left(y^{(j)}_{i_j}\right) + \hat{M}^{(j)}_{i_j}\left(x^{(j)}_{i_j}\right) - \hat{M}^{(j)}_{i_j}\left(y^{(j)}_{i_j}\right)\right\}\right| \\
&\leq \sum_{D \subset \{1,2,\ldots,d\}} \left|\sum a_{\mathbf{i}} \prod_{j \in D'} \hat{M}^{(j)}_{i_j}\left(y^{(j)}_{i_j}\right) \prod_{k \in D} \left\{\hat{M}^{(k)}_{i_k}\left(x^{(k)}_{i_k}\right) - \hat{M}^{(k)}_{i_k}\left(y^{(k)}_{i_k}\right)\right\}\right|.
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Z wklęsłości $\hat{M}^{(r)}_i$ na $[0; +\infty)$

$$\left|\hat{M}^{(r)}_i\left(x^{(r)}_i\right) - \hat{M}^{(r)}_i\left(y^{(r)}_i\right)\right| \leq 2\hat{M}^{(r)}_i\left(\left|x^{(r)}_i - y^{(r)}_i\right|\right) = 2\hat{M}^{(r)}_i\left(\left|z^{(r)}_i\right|\right).$$

Ponieważ $z \in V_s$, więc

$$\sum_{i,r} \tilde{N}^{(r)}_i\left(\left|\hat{M}^{(r)}_i\left(z^{(r)}_i\right)\right|\right) = \sum_{i,r} \min\left(\left(z^{(r)}_i\right)^2, \left|z^{(r)}_i\right|\right) \leq 36s.$$

Zatem $\left(\hat{M}^{(k)}_i\left(z^{(k)}_i\right)\right) \in \tilde{B}^{(k)}_{36s}$ dla $1 \leq k \leq r$ i zachodzi następujące oszacowanie

$$\begin{aligned}
S_D &:= \left|\sum a_{\mathbf{i}} \prod_{j \in D'} \hat{M}^{(j)}_{i_j}\left(y^{(j)}_{i_j}\right) \prod_{k \in D} \left\{\hat{M}^{(k)}_{i_k}\left(x^{(k)}_{i_k}\right) - \hat{M}^{(k)}_{i_k}\left(y^{(k)}_{i_k}\right)\right\}\right| \\
&\leq \sup_{z \in V_s} \sum a_{\mathbf{i}} \prod_{j \in D'} \hat{M}^{(j)}_{i_j}\left(y^{(j)}_{i_j}\right) \prod_{k \in D} \left\{2\hat{M}^{(k)}_{i_k}\left(z^{(k)}_{i_k}\right)\right\} \\
&\leq 2^{\#D} \sup_{b^{(k)} \in \tilde{B}^{(k)}_{36s}, k \in D} \sum a_{\mathbf{i}} \prod_{j \in D'} \hat{M}^{(j)}_{i_j}\left(y^{(j)}_{i_j}\right) \prod_{k \in D} b^{(k)}_{i_k}.
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Dla $\lambda \geq 1$ mamy $\tilde{B}^{(k)}_{\lambda p} \subset \lambda \tilde{B}^{(k)}_p$. Stąd dla $s \geq p/36$ otrzymujemy

$$\begin{aligned}
S_D &\leq \left(\frac{36s}{p}\right)^{\#D} \sup_{y \in A_p, b^{(k)} \in \tilde{B}^{(k)}_p, k \in D} \sum a_{\mathbf{i}} \prod_{j \in D'} \hat{M}^{(j)}_{i_j}\left(y^{(j)}_{i_j}\right) \prod_{k \in D} b^{(k)}_{i_k} \\
&\leq \left(\frac{36s}{p}\right)^{\#D} \hat{M}_{D,p}.
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Ostatnia nierówność wynika z definicji A_p. Z (4.14), (4.15) oraz (4.16) dla $x \in A_p + V_s$, $s \geq p/36$ otrzymujemy szacowanie

$$\left|\sum a_{\mathbf{i}} \hat{M}_{i_1}^{(1)}\left(x_{i_1}^{(1)}\right) \cdots \hat{M}_{i_d}^{(d)}\left(x_{i_d}^{(d)}\right)\right| \leq \sum_{D \subset \{1,2,\ldots,d\}} 2^{\# D}\left(\frac{36 s}{p}\right)^{\# D} \hat{M}_{D,p}. \tag{4.17}$$

Z nierówności koncentracyjnej (4.9) oraz (4.13)

$$\mu^{\otimes dn}\left(A_p + V_s\right) \geq 1 - 2e^{-s}. \tag{4.18}$$

Z (4.17) oraz (4.18), biorąc $s = mp$, $m = 1, 2, \ldots$, otrzymujemy oszacowanie na $\left\|\hat{S}\right\|_p$ z góry (4.12):

$$\begin{aligned}
\left\|\hat{S}\right\|_p^p &\leq \left(\sum_{D \subset \{1,2,\ldots,d\}} (72)^{\# D} \hat{M}_{D,p}\right)^p \mu^{\otimes dn}\left(A_p + V_p\right) \\
&\quad + \sum_{m=2}^{\infty}\left(\sum_{D \subset \{1,2,\ldots,d\}} (72m)^{\# D} \hat{M}_{D,p}\right)^p \times \\
&\quad \times \mu^{\otimes dn}\left(\left(A_p + V_{mp}\right) \setminus \left(A_p + V_{(m-1)p}\right)\right) \\
&\leq 2\sum_{m=1}^{\infty} (72m)^{dp}\left(\sum_{D \subset \{1,2,\ldots,d\}} \hat{M}_{D,p}\right)^p e^{-(m-1)p} \\
&\leq \left(C(d) \sum_{D \subset \{1,2,\ldots,d\}} \hat{M}_{D,p}\right)^p.
\end{aligned}$$

Teraz udowodnimy oszacowania na ogony i momenty S z dołu:

$$\|S\|_p \geq c(d) \sum_{D \in \{1,2,\ldots,d\}} M_{D,p},$$

$$P\left(|S| \geq c(d) \sum_{D \in \{1,2,\ldots,d\}} M_{D,p}\right) \geq \min\left(c(d), e^{-p}\right).$$

Przeprowadzimy dowód indukcyjny ze względu na rząd d. Dla $d = 1$ powyższa nierówność jest udowodniona w [19]. Załóżmy teraz, że jest ona prawdziwa dla chaosów rzędu $1, \ldots, d-1 \geq 1$ i niech

$$S = \sum a_{\mathbf{i}} X_{i_1}^{(1)} \cdots X_{i_{d-1}}^{(d-1)} \cdot X_{i_d}^{(d)}.$$

Dla $D=\emptyset$ mamy $M_{D,p}=E\,|S|$ i nierówność

$$\|S\|_p \geq c\,(d)\,M_{D,p} \tag{4.19}$$

jest spełniona dla $p\geq 1$ z $c\,(d)=1$. Dla $D=\{1,2,...,d\}$ mamy

$$M_{D,p}=\sup_{b^{(k)}\in\tilde{B}_p^{(k)},k=1,\dots,d}\sum a_{\mathbf{i}}b_{i_1}^{(1)}\cdots b_{i_{d-1}}^{(d-1)}\cdot b_{i_d}^{(d)}.$$

Z hipotezy indukcyjnej

$$\begin{aligned}
\|S\|_p &= \left(E_{1,\dots,d-1}\left(\left(E_d\left|\sum a_{\mathbf{i}}X_{i_1}^{(1)}\cdots X_{i_{d-1}}^{(d-1)}X_{i_d}^{(d)}\right|^p\right)^{1/p}\right)^p\right)^{1/p}\\
&\geq \left(E_{1,\dots,d-1}\left(c\,(1)\sup_{b^{(d)}\in\tilde{B}_p^{(d)}}\sum a_{\mathbf{i}}X_{i_1}^{(1)}\cdots X_{i_{d-1}}^{(d-1)}b_{i_d}^{(d)}\right)^p\right)^{1/p}\\
&\geq c\,(1)\sup_{b^{(d)}\in\tilde{B}_p^{(d)}}\left(E_{1,\dots,d-1}\left|\sum a_{\mathbf{i}}X_{i_1}^{(1)}\cdots X_{i_{d-1}}^{(d-1)}b_{i_d}^{(d)}\right|^p\right)^{1/p}\\
&\geq c\,(1)\cdot c\,(d-1)\sup_{b^{(d)}\in\tilde{B}_p^{(d)}}\sup_{b^{(k)}\in\tilde{B}_p^{(k)},k\in D\setminus\{d\}}\sum a_{\mathbf{i}}b_{i_1}^{(1)}\cdots b_{i_{d-1}}^{(d-1)}b_{i_d}^{(d)}\\
&= c\,(d)\,M_{D,p}.
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Dla $D\neq\emptyset$ i $D\neq\{1,2,...,d\}$ mamy nawet prostsze oszacowania. Znów, z założenia indukcyjnego

$$\begin{aligned}
\|S\|_p &= \left(E_{j,j\in D'}\left(\left(E_{k,k\in D}\left|\sum a_{\mathbf{i}}X_{i_1}^{(1)}\cdots X_{i_d}^{(d)}\right|^p\right)^{1/p}\right)^p\right)^{1/p}\\
&\geq \left(E_{j,j\in D'}\left(c\,(\#D)\sup_{b^{(k)}\in\tilde{B}_p^{(k)}k\in D}\sum a_{\mathbf{i}}\prod_{j\in D'}X_{i_j}^{(j)}\prod_{k\in D}b_{i_k}^{(k)}\right)^p\right)^{1/p}\\
&\geq c\,(\#D)\,E_{j,j\in D'}\sup_{b^{(k)}\in\tilde{B}_p^{(k)},k\in D}\sum a_{\mathbf{i}}\prod_{j\in D'}X_{i_j}^{(j)}\prod_{k\in D}b_{i_k}^{(k)}\\
&= c\,(d)\,M_{D,p}.
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Z (4.19), (4.20) i (4.21) otrzymujemy oszacowanie $\|S\|_p$ z dołu:

$$\|S\|_p\geq c\,(d)\sum_{D\subset\{1,2,\dots,d\}}M_{D,p},$$

które razem z oszacowaniem z góry daje (4.6).

Teraz (4.5) wynika bezpośrednio z semihiperkontraktywności S (zauważmy, że nierówność (4.7) jest już udowodniona) i z Twierdzenia 2 z rozdziału 1.

4.2 Oszacowania za pomocą momentów chaosów rademacherowych

Niech $r_i^{(k)}, 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq d$, oznaczają niezależne zmienne rademacherowskie (niezależne także od zmiennych $X_i^{(k)}, 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq d$). Dla $p \geq 1, 1 \leq k \leq d$ zdefiniujmy zbiory

$$B_p^{(k)} = \left\{ x^{(k)} \in R^n : \sum N_i^{(k)} \left(\left| x_i^{(k)} \right| \right) \leq p \ \& \ \left(x_i^{(k)} = 0 \text{ lub} \left| x_i^{(k)} \right| \geq 1 \text{ dla } i = 1, ..., n \right) \right\}.$$

Udowodnimy następujące

Twierdzenie 9 *Rozważmy chaos S rzędu d, generowany przez zmienne $X_i^{(r)}$,*

$$S = \sum a_{\mathbf{i}} X_{i_1}^{(1)} \cdots X_{i_d}^{(d)}.$$

Dla $p \geq 1$ zachodzą następujące oszacowania

$$\|S\|_p \leq C(d) \sum_{I \subset \{1,2,\dots,d\}} \max(1, \ln p)^{d\#I} \sup_{x^{(j)} \in B_p^{(j)}, j \in I} \left\| \sum a_{\mathbf{i}} \prod_{j \in I} x_{i_j}^{(j)} \prod_{k \in I'} r_{i_k}^{(k)} \right\|_p \tag{4.22}$$

oraz

$$\|S\|_p \geq c(d) \sum_{I \subset \{1,2,\dots,d\}} \sup_{x^{(j)} \in B_p^{(j)}, j \in I} \left\| \sum a_{\mathbf{i}} \prod_{j \in I} x_{i_j}^{(j)} \prod_{k \in I'} r_{i_k}^{(k)} \right\|_p. \tag{4.23}$$

Uwaga. Niedawno Latała (cf. [22]) udowodnił następujące szacowania dla chaosów gaussowskich rzędu 3

$$\begin{aligned} c\left(\sqrt{p}\,\|A\|_{HS} + p\left(\|A\|_{\{1\}\{2,3\}} + \|A\|_{\{2\}\{1,3\}} + \|A\|_{\{3\}\{1,2\}}\right) + p^{3/2}\,|||A|||\right) \\ \leq \left\| \sum a_{ijk} g_i^{(1)} g_j^{(2)} g_k^{(3)} \right\|_p \\ \leq\ C\left(\sqrt{p}\,\|A\|_{HS} + p\left(\|A\|_{\{1\}\{2,3\}} + \|A\|_{\{2\}\{1,3\}} + \|A\|_{\{3\}\{1,2\}}\right) + p^{3/2}\,|||A|||\right). \end{aligned}$$

W powyższych nierównościach A oznacza macierz (a_{ijk}) oraz

$$\|A\|_{HS} = \|A\|_{\{1,2,3\}} := \sup\left\{ \sum_{ijk} a_{ijk} x_{ijk} : \sum_{ijk} x_{ijk}^2 \leq 1 \right\} = \sqrt{\sum_{ijk} a_{ijk}^2},$$

$$\|A\|_{\{1\}\{2,3\}} := \sup\left\{ \sum_{ijk} a_{ijk} x_i y_{jk} : \sum_i x_i^2 \leq 1, \sum_{jk} y_{jk}^2 \leq 1 \right\}.$$

Podobnie definiujemy $\|A\|_{\{2\}\{1,3\}}$, $A_{\{3\}\{1,2\}}$, oraz

$$|||A||| = \|A\|_{\{1\},\{2\},\{3\}} := \sup\left\{\sum a_{ijk}x_iy_jz_k : \sum_i x_i^2 \le 1, \sum_j y_j^2 \le 1, \sum_k z_k^2 \le 1\right\}.$$

W [22] udowodnione są również analogiczne oszacowania dla chaosów rzędu $d > 3$ z dokładnością do czynnika $\max(1, \ln p)^{d-3}$.

Uwaga. Wydaje się jednak, że istnieje duża różnica między zachowaniem się chaosów gaussowskich i chaosów rademacherowych. Jeżeli niezależne zmienne losowe $g_{ij}, 1 \le i, j \le n$ mają rozkład taki jak iloczyn g_1g_2 dwóch niezależnych zmiennych o standardowym rozkładzie normalnym $N(0,1)$, wówczas istnieje taka stała dodatnia C, że dla dowolnego $p \ge 1$, dla niezależnych zmiennych $g_i^{(1)}, g_j^{(2)}$ o rozkładzie $N(0,1)$ i liczb rzeczywistych $a_{ij}, 1 \le i, j \le n$, zachodzi nierówność

$$\left\|\sum a_{ij}g_i^{(1)}g_j^{(2)}\right\|_p \ge C\left\|\sum a_{ij}g_{ij}\right\|_p,$$

wynika to bezpośrednio z ogólnych oszacowań (4.2), z których mamy

$$\left\|\sum a_{ij}g_i^{(1)}g_j^{(2)}\right\|_p \sim \sqrt{p}\sqrt{\sum a_{ij}^2} + p \sup_{|x|\le 1, |y|\le 1} \sum a_{ij}x_iy_j,$$
$$\left\|\sum a_{ij}g_{ij}\right\|_p \sim \sqrt{p}\sqrt{\sum a_{ij}^2}.$$

Analogiczna nierówność nie zachodzi dla chaosów generowanych przez zmienne rademacherowskie. Przykład jest następujący.

Niech $r_{ij}, 1 \le i, j \le n$, oznaczają niezależne zmienne rademacherowskie. Dla $n = 2^k, k = 1, 2, ...$, istnieje macierz ortogonalna $n \times n$ o współczynnikach ± 1. (Przykładem takich macierzy są macierze Walsha: $W_0 = 1$, i indukcyjnie $W_{k+1} = \begin{bmatrix} W_k & W_k \\ W_k & -W_k \end{bmatrix}$, $k = 1, 2, ...$) Niech (a_{ij}) będzie taką macierzą, oraz $p = n^2$, wówczas z oszacowań (4.2)

$$\left\|\sum a_{ij}\varepsilon_i^{(1)}\varepsilon_j^{(j)}\right\|_p \sim n^{3/2} = 2^{3k/2},$$
$$\left\|\sum a_{ij}\varepsilon_{ij}\right\|_p \sim p = n^2 = 2^{2k}.$$

Uwaga. Ponieważ momenty chaosów rademacherowych są dominowane przez momenty chaosów gaussowskich (o tych samych współczynnikach), więc Twierdzenie 9 w połączeniu z wynikami Latały dla chaosów gaussowskich daje górne oszacowania momentów dowolnych chaosów generowanych przez zmienne losowe z logarytmicznie wklęsłymi ogonami. Analogiczne oszacowania z dołu są prawdziwe dla chaosów generowanych przez zmienne z ogonami ubywającymi szybciej niż ogony zmiennych gaussowskich.

Przejdźmy do dowodu Twierdzenia 9.

Dowód. Wpierw udowodnimy (4.23), tj. oszacowanie z dołu. Z własności kontrakcji zmiennych rademacherowskich oraz z (4.6) dla dowolnego $I \subset \{1,2,...,d\}$ mamy

$$\begin{aligned}
\|S\|_p &= \left(E_{j,j\in I}E_{k,k\in I'}\left|\sum a_{\mathbf{i}}\prod_{j\in I}X_{i_j}^{(j)}\prod_{k\in I'}X_{i_k}^{(k)}\right|^p\right)^{1/p}\\
&= \left(E_{j,j\in I}E_{k,k\in I'}\left|\sum a_{\mathbf{i}}\prod_{j\in I}X_{i_j}^{(j)}\prod_{k\in I'}\left(\left|X_{i_k}^{(k)}\right|r_{i_k}^{(k)}\right)\right|^p\right)^{1/p}\\
&\geq \left(E_{j,j\in I}E_{k,k\in I'}\left|\sum a_{\mathbf{i}}\prod_{j\in I}X_{i_j}^{(j)}\prod_{k\in I'}\left(\left(E\left|X_{i_k}^{(k)}\right|\right)r_{i_k}^{(k)}\right)\right|^p\right)^{1/p}\\
&\geq c(d)\left(E_{k,k\in I'}E_{j,j\in I}\left|\sum a_{\mathbf{i}}\prod_{j\in I}X_{i_j}^{(j)}\prod_{k\in I'}r_{i_k}^{(k)}\right|^p\right)^{1/p}\\
&\geq c(d)\left(E_{k,k\in I'}\sup_{x^{(j)}\in\tilde{B}_p^{(j)},j\in I}\left|\sum a_{\mathbf{i}}\prod_{j\in I}x_{i_j}^{(j)}\prod_{k\in I'}r_{i_k}^{(k)}\right|^p\right)^{1/p}\\
&\geq c(d)\sup_{x^{(j)}\in\tilde{B}_p^{(j)},j\in I}\left\|\sum a_{\mathbf{i}}\prod_{j\in I}x_{i_j}^{(j)}\prod_{k\in I'}r_{i_k}^{(k)}\right\|_p.
\end{aligned}$$

Ponieważ $B_p^{(k)} \subset \tilde{B}_p^{(k)}$, więc

$$\begin{aligned}
\|S\|_p &\geq c(d)\sup_{x^{(j)}\in\tilde{B}_p^{(j)},j\in I}\left\|\sum a_{\mathbf{i}}\prod_{j\in I}x_{i_j}^{(j)}\prod_{k\in I'}r_{i_k}^{(k)}\right\|_p\\
&\geq c(d)\sup_{x^{(j)}\in B_p^{(j)},j\in I}\left\|\sum a_{\mathbf{i}}\prod_{j\in I}x_{i_j}^{(j)}\prod_{k\in I'}r_{i_k}^{(k)}\right\|_p.
\end{aligned}$$

Zatem

$$\begin{aligned}
\|S\|_p &\geq \frac{1}{2^d}\sum_{I\subset\{1,2,...,d\}}c(d)\sup_{x^{(j)}\in B_p^{(j)},j\in I}\left\|\sum a_{\mathbf{i}}\prod_{j\in I}x_{i_j}^{(j)}\prod_{k\in I'}r_{i_k}^{(k)}\right\|_p\\
&\geq c(d)\sum_{I\subset\{1,2,...,d\}}\sup_{x^{(j)}\in B_p^{(j)},j\in I}\left\|\sum a_{\mathbf{i}}\prod_{j\in I}x_{i_j}^{(j)}\prod_{k\in I'}r_{i_k}^{(k)}\right\|_p
\end{aligned}$$

co dowodzi (4.23).

Oszacowanie z góry wynika bezpośrednio przez iterację następującej nierówności.

$$\|S\|_p \leq C(d)\left\|\sum a_{\mathbf{i}} r_{i_1}^{(1)} \cdot X_{i_2}^{(2)} \cdots X_{i_d}^{(d)}\right\|_p + C(d)\max(1,\ln p)^d \sup_{x^{(1)}\in B_p^{(1)}}\left\|\sum a_{\mathbf{i}} x_{i_1}^{(1)} \cdot X_{i_2}^{(2)} \cdots X_{i_d}^{(d)}\right\|_p . \tag{4.24}$$

Dowód (4.24) prezentujemy w następnym podrozdziale. ■

4.2.1 Dowód nierówności (4.24)

Dla $d=1$ i $(a_i)\in R^n$ mamy

$$\frac{1}{C}\left\|\sum a_i X_i^{(1)}\right\|_p \leq \left\|\sum a_i r_i^{(1)}\right\|_p + \sup\left\{\sum a_i x_i^{(1)} : \left(x_i^{(1)}\right)\in B_p^{(1)}\right\}. \tag{4.25}$$

Szacowanie to wynika z (4.1) i jest nawet mocniejsze niż (4.22). Załóżmy teraz, że $d\geq 2$. Wpierw udowodnimy, że suma $S=\sum a_{\mathbf{i}} X_{i_1}^{(1)}\cdots X_{i_d}^{(d)}$ może być przedstawiona w postaci S_1+S_2, gdzie S_1 składniki odpowiadające wielowskaźnikom $\mathbf{i}=(i_1,i_2,...,i_d)$, w których $1\leq i_1\leq p^{C(d)}$ zaś $\|S_2\|_p$ jest porównywalna z $C(d)\left\|\sum a_{\mathbf{i}} r_{i_1}^{(1)}\cdot X_{i_2}^{(2)}\cdots X_{i_d}^{(d)}\right\|_p$. Zauważmy wpierw, że wielowskaźniki $\mathbf{i}$ mogą być tak przenumerowane, że

$$\text{jeżeli } i\leq j \text{ to } \sum_{\mathbf{i}:i_1=i} a_{\mathbf{i}}^2 \geq \sum_{\mathbf{i}:i_1=j} a_{\mathbf{i}}^2. \tag{4.26}$$

Z (4.25) otrzymujemy

$$\begin{aligned}\frac{1}{C}\left\|\sum a_i X_i^{(1)}\right\|_p &\leq \left\|\sum a_i r_i^{(1)}\right\|_p + \sup\left\{\sum a_i x_i^{(1)} : \left(x_i^{(1)}\right)\in B_p^{(1)}\right\}\\ &\leq \left\|\sum a_i r_i^{(1)}\right\|_p + p\max|a_i|.\end{aligned} \tag{4.27}$$

Następnie, z (4.27) dostajemy

$$\begin{aligned}&\left\|\sum_{\mathbf{i}:i_1>p^{C(d)}} a_{\mathbf{i}} X_{i_1}^{(1)}\cdots X_{i_d}^{(d)}\right\|_p\\ &\leq C\left\|\sum a_{\mathbf{i}} r_{i_1}^{(1)}\cdot X_{i_2}^{(2)}\cdots X_{i_d}^{(d)}\right\|_p\\ &\quad + Cp\left\|\max_{i>p^{C(d)}}\sum_{\mathbf{i}:i_1=i} a_{\mathbf{i}} X_{i_2}^{(2)}\cdots X_{i_d}^{(d)}\right\|_p .\end{aligned} \tag{4.28}$$

Korzystając z (4.26), oszacujemy

$$\left\|\max_{i>p^{C(d)}}\sum_{\mathbf{i}:i_1=i}a_{\mathbf{i}}X_{i_2}^{(2)}\cdots X_{i_d}^{(d)}\right\|_p.$$

Mamy

$$\begin{aligned}&\left\|\max_{i>p^{C(d)}}\sum_{\mathbf{i}:i_1=i}a_{\mathbf{i}}X_{i_2}^{(2)}\cdots X_{i_d}^{(d)}\right\|_p\\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty}\left\|\max_{2^kp^{C(d)}<i\leq 2^{k+1}p^{C(d)}}\sum_{\mathbf{i}:i_1=i}a_{\mathbf{i}}X_{i_2}^{(2)}\cdots X_{i_d}^{(d)}\right\|_p.\end{aligned}$$

Używając Wniosku 3 z poprzedniego podrozdziału), otrzymujemy

$$\left\|\sum_{\mathbf{i}:i_1=i}a_{\mathbf{i}}X_{i_2}^{(2)}\cdots X_{i_d}^{(d)}\right\|_p\leq C\left(d\right)p^d\sqrt{\sum_{\mathbf{i}:i_1=i}a_{\mathbf{i}}^2}.$$

Stąd i z nierówności Czebyszewa dla $t\geq 1$ dostajemy

$$P\left(\left|\sum_{\mathbf{i}:i_1=i}a_{\mathbf{i}}X_{i_2}^{(2)}\cdots X_{i_d}^{(d)}\right|\geq C\left(d\right)t\sqrt{\sum_{\mathbf{i}:i_1=i}a_{\mathbf{i}}^2}\right)\leq e^{-t^{1/d}}.$$

Z powyższej nierówności, całkując przez części dla $t_0\geq 1$ otrzymujemy

$$\begin{aligned}&\left\|\left(\left|\sum_{\mathbf{i}:i_1=i}a_{\mathbf{i}}X_{i_2}^{(2)}\cdots X_{i_d}^{(d)}\right|-C\left(d\right)t_0\sqrt{\sum_{\mathbf{i}:i_1=i}a_{\mathbf{i}}^2}\right)_+\right\|_p\\ &\leq C\left(d\right)\left(\sup_{t_0\leq t\leq\infty}te^{-t^{1/d}/(2p)}\right)\sqrt{\sum_{\mathbf{i}:i_1=i}a_{\mathbf{i}}^2}.\end{aligned}\tag{4.29}$$

Dobierzmy tak $t_0\left(k\right)$ by zachodziła nierówność

$$\sup_{t_0(k)\leq t\leq\infty}te^{-t^{1/d}/(2p)}\leq\frac{1}{2^kp^{C(d)}},$$

na przykład

$$t_0\left(k\right)=C\left(d\right)\left[p\ln p+pk\right]^d.\tag{4.30}$$

Dla uproszczenia notacji niech I_k oznacza zbiór liczb całkowitych z przedziału $\left(2^k p^{C(d)}; 2^{k+1} p^{C(d)}\right]$. Wobec (4.29), biorąc $t_0 = t_0(k)$ zdefiniowane jak w (4.30), otrzymujemy

$$\begin{aligned}
&\left\| \max_{i \in I_k} \sum_{\mathbf{i}: i_1 = i} a_{\mathbf{i}} X_{i_2}^{(2)} \cdots X_{i_d}^{(d)} \right\|_p \leq C(d)\, t_0 \max_{i \in I_k} \sqrt{\sum_{\mathbf{i}: i_1 = i} a_{\mathbf{i}}^2} \\
&\qquad + \sum_{i = 2^k p^{C(d)} + 1}^{2^{k+1} p^{C(d)}} \left\| \left(\sum_{\mathbf{i}: i_1 = i} a_{\mathbf{i}} X_{i_2}^{(2)} \cdots X_{i_d}^{(d)} - C(d)\, t_0 \max_{i \in I_k} \sqrt{\sum_{\mathbf{i}: i_1 = i} a_{\mathbf{i}}^2} \right)_+ \right\|_p \\
&\leq \; C(d) \left[p \ln p + pk \right]^d \max_{i \in I_k} \sqrt{\sum_{\mathbf{i}: i_1 = i} a_{\mathbf{i}}^2} \\
&\qquad + C(d) \sum_{i = 2^k p^{C(d)} + 1}^{2^{k+1} p^{C(d)}} \left(\sup_{t_0 \leq t \leq \infty} t e^{-t^{1/d}/(2p)} \right) \sqrt{\sum_{\mathbf{i}: i_1 = i} a_{\mathbf{i}}^2} \\
&\leq \; C(d) \left[2p \ln p + pk \right]^d \max_{i \in I_k} \sqrt{\sum_{\mathbf{i}: i_1 = i} a_{\mathbf{i}}^2} + \max_{i \in I_k} \sqrt{\sum_{\mathbf{i}: i_1 = i} a_{\mathbf{i}}^2} \\
&\leq \; C(d) \left[2p \ln p + pk \right]^d \max_{i \in I_k} \sqrt{\sum_{\mathbf{i}: i_1 = i} a_{\mathbf{i}}^2}.
\end{aligned}$$

Teraz, korzystając z oszacowania

$$\max_{i \in I_k} \sqrt{\sum_{\mathbf{i}: i_1 = i} a_{\mathbf{i}}^2} \leq \sqrt{\frac{1}{2^k p^{C(d)}} \sum_{\mathbf{i}} a_{\mathbf{i}}},$$

które wynika z (4.26), dostajemy

$$\begin{aligned}
&Cp \left\| \max_{i > p^{C(d)}} \sum_{\mathbf{i}: i_1 = i} a_{\mathbf{i}} X_{i_2}^{(2)} \cdots X_{i_d}^{(d)} \right\|_p \\
&\quad \leq \; Cp \sum_{k=0}^{\infty} \left\| \max_{2^k p^{C(d)} < i \leq 2^{k+1} p^{C(d)}} \sum_{\mathbf{i}: i_1 = i} a_{\mathbf{i}} X_{i_2}^{(2)} \cdots X_{i_d}^{(d)} \right\|_p \\
&\quad \leq \; \sum_{k=0}^{\infty} C(d)\, p \left[2p \ln p + pk \right]^d \sqrt{\frac{1}{2^k p^{C(d)}} \sum_{\mathbf{i}} a_{\mathbf{i}}^2}.
\end{aligned}$$

Zauważmy, że dla dostatecznie dużego $C(d)$, ostatnia suma może być oszacowana z góry przez

$$C(d) \sqrt{\sum_{\mathbf{i}} a_{\mathbf{i}}^2}$$

a stąd

$$\begin{aligned} Cp \left\| \max_{i>p^{C(d)}} \sum_{\mathbf{i}:i_1=i} a_{\mathbf{i}} X^{(2)}_{i_2} \cdots X^{(d)}_{i_d} \right\| \\ \leq \; C(d) \sqrt{\sum_{\mathbf{i}} a^2_{\mathbf{i}}} \leq C(d) \left\| \sum_{\mathbf{i}} a_{\mathbf{i}} r^{(1)}_{i_1} \cdot X^{(2)}_{i_2} \cdots X^{(d)}_{i_d} \right\|_2 . \end{aligned} \tag{4.31}$$

Z (4.28) i (4.31) dostajemy

$$\left\| \sum_{i>p^{C(d)}} \sum_{\mathbf{i}:i_1=i} a_{\mathbf{i}} X^{(1)}_{i_1} \cdots X^{(d)}_{i_d} \right\|_p \leq C(d) \left\| \sum a_{\mathbf{i}} r^{(1)}_{i_1} \cdot X^{(2)}_{i_2} \cdots X^{(d)}_{i_d} \right\|_p . \tag{4.32}$$

Rozważmy teraz

$$S_1 = \sum_{\mathbf{i}:i_1 \leq p^{C(d)}} a_{\mathbf{i}} X^{(1)}_{i_1} \cdots X^{(d)}_{i_d}. \tag{4.33}$$

Z (4.25) otrzymujemy

$$\begin{aligned} \frac{1}{C} \|S_1\|_p \;\leq\; & \left\| \sum_{\mathbf{i}:i_1 \leq p^{C(d)}} a_{\mathbf{i}} r^{(1)}_{i_1} \cdot X^{(2)}_{i_2} \cdots X^{(d)}_{i_d} \right\|_p \\ & + \left\| \sup_{x^{(1)} \in B^{(1)}_p} \sum_{\mathbf{i}:i_1 \leq p^{C(d)}} a_{\mathbf{i}} x^{(1)}_{i_1} \cdot X^{(2)}_{i_2} \cdots X^{(d)}_{i_d} \right\|_p . \end{aligned} \tag{4.34}$$

Przypomnijmy definicję $B^{(1)}_p$,

$$B^{(1)}_p = \left\{ x^{(1)} \in R^n : \sum N^{(1)}_i \left(\left| x^{(1)}_i \right| \right) \leq p \;\&\; \left(x^{(1)}_i = 0 \text{ lub } \left| x^{(1)}_i \right| \geq 1 \text{ dla } i = 1, ..., n \right) \right\}.$$

Ponieważ $i_1 \leq p^{C(d)}$, więc można założyć, że $B^{(1)}_p \subset R^{p^{C(d)}}$. Zdefiniujmy

$$\hat{B}^{(1)}_p = \left\{ (\hat{x}_i) \in R^{p^{C(d)}} : \exists (x_i) \in B^{(1)}_p, \hat{x}_i = \operatorname{sign}(x_i) \cdot \lfloor |x_i| \rfloor \right\}.$$

Udowodnimy, że $\hat{B}^{(1)}_p$ ma moc nie większą niż $p^{C(d)p}$ oraz, że dla dowolnego ciągu $(a_i) \in R^{p^{C(d)}}$

$$\sup_{x \in B^{(1)}_p} \sum a_i x_i \geq \max_{x \in \hat{B}^{(1)}_p} \sum a_i x_i \geq \frac{1}{3} \sup_{x \in B^{(1)}_p} \sum a_i x_i. \tag{4.35}$$

Rzeczywiście, na podstawie definicji $B_p^{(1)}$, dla $(x_i) \in B_p^{(1)}$ mamy

$$\#\{i : x_i \neq 0\} \leq p, \ \#\{i : |x_i| > p\} = 0$$

a ponieważ punkty z $\hat{B}_p^{(1)}$ mają całkowite współrzędne, więc

$$\#\hat{B}_p^{(1)} \leq \binom{p^{C(d)}}{p}(2p+1)^p \leq p^{C(d)p}.$$

Aby udowodnić (4.35) zauważmy, że $\hat{B}_p^{(1)} \subset B_p^{(1)}$, co natychmiast daje pierwszą nierówność. Aby udowodnić drugą, weźmy takie $(x_i^0) \in B_p^{(1)}$, że

$$\sum a_i x_i^0 \geq \frac{2}{3} \sup_{x \in B_p^{(1)}} \sum a_i x_i.$$

Możemy dodatkowo założyć, że dla wszystkich i, $a_i x_i^0 \geq 0$. Weźmy $\hat{x}_i^0 = \mathrm{sign}(x_i^0) \cdot \lfloor |x_i^0| \rfloor$. Ponieważ dla każdego i, $x_i^0 = 0$ lub $|x_i^0| \geq 1$, więc

$$a_i x_i^0 \geq a_i \hat{x}_i^0 \geq \frac{1}{2} a_i x_i^0 \text{ dla wszystkich } i.$$

Stąd

$$\sup_{x \in \hat{B}_p^{(1)}} \sum a_i x_i \geq \frac{1}{2} \sum a_i x_i^0 \geq \frac{1}{3} \sup_{x \in B_p^{(1)}} \sum a_i x_i.$$

Korzystając z własności zbioru $\hat{B}_p^{(1)}$, dla $q \geq p$ mamy

$$\begin{aligned}
&\left\| \sup_{x^{(1)} \in B_p^{(1)}} \sum_{\mathbf{i}: i_1 \leq p^{C(d)}} a_{\mathbf{i}} x_{i_1}^{(1)} \cdot X_{i_2}^{(2)} \cdots X_{i_d}^{(d)} \right\|_p \\
\leq\ & 3 \left\| \max_{x^{(1)} \in \hat{B}_p^{(1)}} \sum_{\mathbf{i}: i_1 \leq p^{C(d)}} a_{\mathbf{i}} x_{i_1}^{(1)} \cdot X_{i_2}^{(2)} \cdots X_{i_d}^{(d)} \right\|_p \\
\leq\ & 3 \left(\sum_{x^{(1)} \in \hat{B}_p^{(1)}} E \left| \sum_{\mathbf{i}: i_1 \leq p^{C(d)}} a_{\mathbf{i}} x_{i_1}^{(1)} \cdot X_{i_2}^{(2)} \cdots X_{i_d}^{(d)} \right|^q \right)^{1/q} \\
\leq\ & 3 \left(\#\hat{B}_p^{(1)} \right)^{1/q} \max_{x^{(1)} \in \hat{B}_p^{(1)}} \left\| \sum_{\mathbf{i}: i_1 \leq p^{C(d)}} a_{\mathbf{i}} x_{i_1}^{(1)} \cdot X_{i_2}^{(2)} \cdots X_{i_d}^{(d)} \right\|_q .
\end{aligned} \tag{4.36}$$

Biorąc $q = p\max(1, \ln p)$ i korzystając z Wniosku 3 dostajemy

$$\begin{aligned}
&\left(\#\hat{B}_p^{(1)}\right)^{1/q} \max_{x^{(1)}\in\hat{B}_p^{(1)}} \left\| \sum_{\mathbf{i}: i_1 \le p^{C(d)}} a_{\mathbf{i}} x_{i_1}^{(1)} \cdot X_{i_2}^{(2)} \cdots X_{i_d}^{(d)} \right\|_q \\
\le\ & C(d) \left(\#\hat{B}_p^{(1)}\right)^{1/(p\max(1,\ln p))} \left(\frac{p\max(1,\ln p)}{p}\right)^{d-1} \times \\
&\times \max_{x^{(1)}\in\hat{B}_p^{(1)}} \left\| \sum_{\mathbf{i}: i_1 \le p^{C(d)}} a_{\mathbf{i}} x_{i_1}^{(1)} \cdot X_{i_2}^{(2)} \cdots X_{i_d}^{(d)} \right\|_p \\
\le\ & C(d) \max(1, \ln p)^{d-1} \sup_{x^{(1)}\in B_p^{(1)}} \left\| \sum_{\mathbf{i}: i_1 \le p^{C(d)}} a_{\mathbf{i}} x_{i_1}^{(1)} \cdot X_{i_2}^{(2)} \cdots X_{i_d}^{(d)} \right\|_p .
\end{aligned}$$

Teraz, korzystając z nierówności powyżej, z (4.36) oraz z (4.34) otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\|S_1\|_p \le\ & \left\| \sum_{\mathbf{i}: i_1 \le p^{C(d)}} a_{\mathbf{i}} r_{i_1}^{(1)} \cdot X_{i_2}^{(2)} \cdots X_{i_d}^{(d)} \right\|_p \\
&+ C(d) \max(1, \ln p)^{d-1} \sup_{x^{(1)}\in B_p^{(1)}} \left\| \sum_{\mathbf{i}: i_1 \le p^{C(d)}} a_{\mathbf{i}} x_{i_1}^{(1)} \cdot X_{i_2}^{(2)} \cdots X_{i_d}^{(d)} \right\|_p ,
\end{aligned}$$

co wobec (4.32) daje (4.24).

Bibliografia

[1] R. Adamczak, *Logarythmic Sobolev inequalities and concentration of measure for convex functions and polynomial chaoses*, preprint.

[2] M. Arcones and E. Giné, *On decoupling, series expansions, and tail behavior of chaos processes*, J. Theoret. Probab. **6** (1993), 101-122.

[3] C. Borell, *On the Taylor series of a Wiener polynomial,* Seminar Notes on multiple stochastic integration, polynomial chaos and their integration, Case Western Univ., Cleveland 1984.

[4] S. Boucheron, O. Bousquet, G. Lugosi, P. Massart, *Moment inequalities for functions of independent random variables*, przyjęte do Annals of Probability, preprint dostępny pod adresem `http://www.econ.upf.es/~lugosi/efronsob.pdf`.

[5] V. H. de la Peña and E. Giné, *Decoupling: From Dependence to Independence*, Springer Verlag, New York 1999.

[6] P. Hitczenko, *Domination inequality for martingale transforms of Rademacher sequence*, Israel J. Math. **84** (1993), 161-178.

[7] V. H. de la Peña and S. Montgomery-Smith, *Bounds for the tail probabilities of U-statistics and quadratic forms*, Bull. Amer. Math. Soc. **31** (1994), 223-227.

[8] J. D. Esary, F. Proschan and D. W. Walkup, *Association of random variables with applications*, Annals of Math. Stat., **38**, (1967), 1466-1474.

[9] E. Giné, R. Latała and J. Zinn, *Exponential and Moment Inequalities for U-statistics*, High Dimensional Probability II, 13–38, Progr. Probab. 47, Birkhäuser, Boston (2000).

[10] E. D. Gluskin and S. Kwapień, *Tail and moment estimates for sums of independent random variables with logarithmically concave tails*, Studia Math. **114** (1995), 303-309.

[11] D. L. Hanson and F. T. Wright, *A bound on tail probabilities for quadratic forms in independent random variables*, Ann. Math. Statist. **42** (1971), 52-61.

[12] R. Ibragimov and Sh. Sharakhmetov, *Analogues of Khintchin, Marcinkiewicz-Zygmund and Rosenthal inequalities for symmetric statistics*, Scand. J. Statist. **26** (1999), 621-623.

[13] S. Janson, T. Łuczak and A. Ruciński, *Random Graphs,* Wiley, New York, 2000.

[14] S. Janson, K. Oleszkiewicz and A. Ruciński, *Upper tails for subgraph counts in random graphs*, Israel J. Math. **141** (2004), 61-92.

[15] M. Klass and K. Nowicki, *A symmetrization-desymmetrization procedure for uniformly good approximations of expectations involving arbitrary sums of generalized U-statistics*, Ann. Probab. **28** (2000), 1884-1907.

[16] J. H. Kim and V. H. Vu, *Divide and conquer martingales and the number of triangles in a random graph,* przyjęte do Random Structures and Algorithms, preprint dostępny pod adresem `http://research.microsoft.com/theory/jehkim/papers/Divide.pdf`.

[17] M. A. Krasnoselśkiĭ and Ya. B. Rutickiĭ, *Convex functions and Orlicz Spaces,* Noordhoff, Groningen 1961.

[18] S. Kwapień and W. Woyczyński, *Random series and stochastic integrals, single and multiple,* Birkhäuser, Boston 1992.

[19] R. Latała, *Tail and moment estimates for sums of independent random vectors with logarithmically concave tails,* Studia Math. (1996), 301-304.

[20] R. Latała, *Estimation of moments of sums of independent real random variables*, Ann. Probab. 25 (1997), 1502-1513.

[21] R. Latała, *Tail and moment estimates for some type of chaos*, Studia Math. **135** (1999), 39-53.

[22] R. Latała, *Estimates of moments and tails of Gaussian chaoses*, preprint.

[23] R. Latała and R. Łochowski, *Moment and Tail Estimates for Multidimensional Chaos Generated by Positive Random Variables with Logarithmically Concave Tails*, Progr. Probab. 56, Birkhäuser, Basel (2003), 77-92.

[24] R. Łochowski, *Oszacowania momentów sum niezależnych zmiennych losowych i dwuwymiarowego chaosu*, praca magisterska, Uniwersytet Warszawski 2000.

[25] B. Maurey, *Some deviation inequalities*, Geometric and Functional Analysis **1** (1991), 188-197.

[26] M. Talagrand, *A new isoperimetric inequality and the concentration of measure phenomenon*, Israel Seminar (GAFA), Springer Verlag Lecture Notes in Math. 1469 (1991), 94-124.