Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa I - seria 8

1. Niech $X_1, X_2, \dots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o wspólnym rozkładzie bezatomowym. Zdefiniujmy dystrybuanty empiryczne
$$F_n(t) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{\{X_i \leqslant t\}}.$$
Wykazać, że z prawdopodobieństwem 1 F_n zbiega jednostajnie do F. **Uwaga:** Założenie o braku atomów można opuścić, jest to tzw. Twierdzenie Gliwenki-Cantellego.

2. Wykazać, że prawie wszystkie liczby $x \in [0,1]$ są normalne względem każdej podstawy d, tzn. każda cyfra w zapisie x w systemie o podstawie d występuje z częstotliwością $1/d$.

3. Wykazać, że jeżeli $\mathrm{Var} X_n \leqslant C < \infty$ oraz $\mathrm{cor(X_i, X_j)} \to 0$, gdy $|i-j| \to \infty$, to ciąg (X_n) spełnia słabe prawo wielkich liczb.

4. Niech $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągła. Obliczyć
   - $\lim_n \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{[0,1]^n} \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} dx_1 \ldots dx_n$
   - $\lim_n \int_{[0,1]^n} f(\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}) dx_1 \ldots dx_n$
   - $\lim_n \int_{[0,1]^n} f((x_1 \ldots x_n)^{1/n}) dx_1 \ldots dx_n$.

5. Niech $X_1, Y_1, X_2, Y_2, \dots$ będą zmiennymi i.i.d o rozkłądzie jednostajnym na $(0,1)$. Niech $f : [0,1] \to [0,1]$ będzie funkcją mierzalną, zaś $Z_i = \mathbf{1}_{\{f(X_i) > Y_i\}}$. Zbadać zbieżność p.n. ciągu
$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i.$$

6. Niech $X_i, X_2, \dots$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych, takich, że $\mathbb{P}(X_n = 1) = \mathbb{P}(X_n = -1) = p_n, \mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - 2p_n$. Znaleźć warunek konieczny i dostateczny, na to by ciąg (X_n) spełniał MPWL.

7. Niech $X_1, X_2, \dots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o dystrybuantach $F_1, F_2, \dots$ Wykazać, że $\mathbb{P}(\sup_n X_n < \infty) \in \{0,1\}$ oraz, że powyższe prawdopodobieństwo jest równe 1 wtedy i tylko wtedy, gdy $\sum_n (1 - F_n(x)) < \infty$ dla jakiegoś x.

8. Rozważmy szereg $\sum_n a_n \varepsilon_n$, gdzie $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ to niezależne zmienne Rademachera. Wykazać, że powyższy szereg jest zbieżny z prawdopodobieństwem 1 wtedy i tylko wtedy, gdy $\sum_n a_n^2 < \infty$.

9. Niech $X_1, X_2, \dots$ będą niezależnymi zmiennnymi losowymi. Rozważmy losowy szereg potęgowy (tzn. szereg potęgowy z losowymi współczynnikami) $\sum_n X_n z^n$. Niech R oznacza jego promień zbieżności. Wykazać, że zmienna R jest stała p.n.

10. Niech $X_1, X_2, \dots$ będą zmiennymi niezależnymi o wspólnym rozkładzie i skończonej wariancji. Zdefiniujmy średnią i wariancję empiryczną jako
$$m_n = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} \quad \sigma_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n} (X_k - m_n)^2.$$
Udowodnić, że $\mathbb{E} m_n = \mathbb{E} X_1$, $\mathbb{E}\sigma_n^2 = \mathrm{Var} X_1$ oraz, że $m_n \to \mathbb{E} X_1$, $\sigma_n^2 \to \mathrm{Var} X_1$ p.n.