Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa I - seria 7

1. **(Wielomiany Bernsteina)** Niech f będzie funkcją ciągłą określoną na przedziale $[0,1]$. Określmy ciąg wielomianów

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

Wykazać, że B_n zbiegają jednostajnie do funkcji f.

2. Udowodnić, że jeśli zmienne X, Y są ograniczone oraz mają takie same momenty, to mają ten sam rozkład.

3. Rozważmy zmienną losową X o rozkładzie logarytmiczno-normalnym, tzn. o gęstości

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{x} e^{-\log^2 x/2} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$$

oraz zmienną Y o gęstości $g(x) = f(x)(1+\sin(2\pi \log x))$. Wykazać, że zmienne X, Y mają takie same momenty oraz różne rozkłady.

4. Skonstruować ciąg zmiennych losowych, który zbiega w L^p, ale nie zbiega p.n.

5. Skonstruować ciąg zmiennych losowych, który jest zbieżny według prawdopodobieństwa, ale nie zbiega w L^p dla żadnego p.

6. Dana jest przestrzeń probabilistyczna $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Wykazać, że jeśli P jest rozkładem dyskretnym to zbieżność według prawdopodobieństwa na Ω jest równoważna zbieżności p.n.

7. Udowodnić, że granica względem prawdopodobieństwa jest wyznaczona jednoznacznie.

8. Wykazać, że jeśli dla pewnego ciągu ε_n o wyrazach dodatnich, zbiegającego monotonicznie do 0 mamy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon_n) < \infty,$$

to $X_n \to X$ p.n.

9. Niech $L^0 = L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ będzie przestrzenią wszystkich zmiennych losowych (utożsamiamy zmienne równe p.n.) Zdefiniujmy

$$\rho(X,Y) = \mathbb{E}\left(\frac{|X-Y|}{1+|X-Y|}\right).$$

Wykazać, że (L^0, ρ) jest przestrzenią metryczną zupełną, w której zbieżność jest równoważna zbieżności według prawdopodobieństwa. Wykazać, że jeśli zbieżność według prawdopodobieństwa na Ω nie jest równoważna zbieżności p.n., to zbieżność p.n. nie jest metryzowalna.

10. Niech $X_1, X_2, \ldots$ będą niezależnymi całkowalnymi zmiennymi losowymi o wspólnym rozkładzie. Wykazać, że $\frac{1}{n}\max_{i \leqslant n} |X_i|$ zbiega do 0 wg prawdopodobieństwa.