Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa I - seria 6

1. Dysponujemy dwoma wynikami pomiarów pewnej wielkości fizycznej. Błędy poszczególnych pomiarów to zmienne losowe X_1, X_2 o średniej 0 i wariancjach odpowiednio σ_1^2, σ_2^2. Jako ostateczny wynik chcielibyśmy przyjąć średnią ważoną z wyników poszczególnych pomiarów. Jakie wagi przyjąć by błąd średniokwadratowy (czyli wariancja ostatecznego wyniku) był jak najmniejszy? Zakładamy, że pomiary są niezależne.

2. **(Nierówność Bernsteina)** Niech $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych Rademachera, zaś $S_n = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i$. Wykazać, że
$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} > r\right) \leqslant e^{-r^2/2}$$
dla $r \geqslant 0$.

3. Niech X będzie rzeczywistą zmienną losową. Przypuśćmy, że F_X jest prawie wszędzie różniczkowalna oraz
$$\int_{-\infty}^{\infty} F'(s)ds = 1.$$
Wykazać, że wówczas F_X' jest gęstością X.

4. Zmienne losowe X, Y są niezależne, przy czym dystrybuanta X jest ciągła. Wykazać, że $\mathbb{P}(X = Y) = 0$.

5. Zmienne X, Y są niezależne i mają ten sam rozkład wykładniczy. Znaleźć rozkład zmiennej $X - Y$.

6. Niech $U = X \wedge Y$, zaś $V = X \vee Y - U$, gdzie X, Y są niezależne i mają ten sam rozkład wykładniczy. Wykazać, że zmienne U, V są niezależne.

7. Roztrzepana sekretarka umieściła n listów w n uprzednio zaadresowanych kopertach. Niech X oznacza liczbę listów, które trafiły do właściwych kopert. Znaleźć wartość oczekiwaną i wariancję X.

8. Urna zawiera N kul w tym b kul białych. Losujemy bez zwracania n kul ($n \leqslant N$) i definiujemy zmienną losową X jako liczbę wylosowanych kul białych. Znaleźć wartość oczekiwaną i wariancję X.

9. Znaleźć gęstość i dystrybuantę zmiennej $X_1 + \ldots + X_n$, gdzie X_i są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie wykładniczym z parametrem λ.

10. Niech X_i będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie wykładniczym z parametrem λ. Zdefiniujmy $N_t = \sup\{n\colon X_1 + \ldots + X_n \geqslant t\}$. Znaleźć rozkład zmiennej N_t.

11. Niech $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ będą niezależnymi zmiennymi Rademachera, natomiast $a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots, b_n$ liczbami rzeczywistymi, takimi że $|a_i| \leqslant |b_i|$ dla $i = 1, \ldots, n$. Wykazać, że dla $p \geqslant 1$
$$\mathbb{E}\left|\sum_{i=1}^n a_i\varepsilon_i\right|^p \leqslant \mathbb{E}\left|\sum_{i=1}^n b_i\varepsilon_i\right|^p$$

12. Niech $X_1, \ldots, X_n$ oraz $Y_1, \ldots, Y_n$ będą dwoma ciągami niezależnych symetrycznych zmiennych losowych, takimi że $\mathbb{P}(|X_i| > t) \leqslant \mathbb{P}(|Y_i| > t)$ dla $i = 1, \ldots, n$ oraz $t \in \mathbb{R}$. Wykazać, że dla $p \geqslant 1$
$$\mathbb{E}\left|\sum_{i=1}^n X_i\right|^p \leqslant \mathbb{E}\left|\sum_{i=1}^n Y_i\right|^p$$