Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa I - seria 4

Dystrybuanta i gęstość zmiennej losowej, parametry rozkładów.

1. Wyrazić zdarzenia $\mathbb{P}(X > t)$, $\mathbb{P}(X < t)$, $\mathbb{P}(X = t)$ przy pomocy dystrybuanty F_X.
2. Ciągła dystrybuanta F ma ciągłą pochodną g a) wszędzie, b) poza zbiorem Z bez punktów skupienia. Wykazać, że g jest gęstością dystrybuanty F.
3. Rozwiązać poprzednie zadanie bez założenia o ciągłości g.
4. Niech F będzie dystrybuantą pewnego rozkładu i niech $F(t) = \int_{-\infty}^{t} g(x)dx$ dla pewnej funkcji g. Wykazać że g jest gęstością F.
5. Niech A będzie zdarzeniem o dodatnim prawdopodobieństwie. Czy $\mathbb{P}(\cdot|A)$ ma gęstość względem $\mathbb{P}$?
6. Zmienna X ma rozkład wykładniczy z parametrem 1. Zdefiniujmy nową zmienną $Y = 1 - e^{-X}$. Znaleźć dystrybuantę Y. Czy Y ma gęstość? Jeśli tak, znaleźć ją.
7. Nieujemna zmienna losowa X z gęstością ma własność braku pamięci, tzn. dla $s, t \geqslant 0$ zachodzi $\mathbb{P}(X > t + s|X > s) = \mathbb{P}(X > t)$. Wykazać, że X ma rozkład wykładniczy.
8. Znaleźć wszystkie rozkłady na liczbach naturalnych z własnością braku pamięci. Uwaga: w tym przypadku w definicji z poprzedniego zadania rozpatrujemy tylko t, s naturalne.
9. Znaleźć wartości oczekiwane i wariancje podstawowych rozkładów prawdopodobieństwa.
10. Roztrzepana sekretarka umieściła n listów w n uprzednio zaadresowanych kopertach. Niech X oznacza liczbę listów, które trafiły do właściwych kopert. Znaleźć wartość oczekiwaną i wariancję X.
11. Urna zawiera N kul w tym b kul białych. Losujemy bez zwracania n kul ($n \leqslant N$) i definiujemy zmienną losową X jako liczbę wylosowanych kul białych. Znaleźć wartość oczekiwaną i wariancję X.
12. Udowodnić, że jeśli X, Y są ograniczone i mają takie same momenty, to mają takie same rozkłady.

Zadania domowe

1. Zmienna losowa ma rozkłąd jednostajny na odcinku $[0, 2]$ (czyli rozkład o gęstości $f(t) = \frac{1}{2}\mathbf{1}_{[0,2]}(t)$). Znaleźć rozkłady zmiennych losowych $Y = \min(X, X^2)$, i $Z = \max(1, X)$.