Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa I - seria 4

Wzór Bayesa, niezależność zdarzeń, Lemat Borela-Cantelliego, zmienne losowe.

1. Wśród n monet k jest asymetrycznych, orzeł wypada na nich z prawdopodobieństwem 1/3. W wyniku rzutu wybraną losowo monetą wypadł orzeł. Jakie jest prawdopodobieństwo, że ta moneta jest asymetryczna?

2. Niech $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ będą niezależnymi π-układami. Udowodnić, że $(\sigma(\mathcal{A}_i))_{i\in I}$ także są niezależne.

3. Rozpatrzmy X_i - nieskończony ciąg niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie $p = \mathbb{P}(X_i = 1) = 1 - \mathbb{P}(X_i = 0) = 1 - q$. Wykazać, że jeśli $p \notin \{0, 1\}$, to z prawdopodobieństwem 1, każdy skończony ciąg zero-jedynkowy powtarza się nieskończenie wiele razy w ciągu (X_i).

4. Podać przykład zmiennych losowych X, Y, Z, parami niezależnych, ale nie niezależnych.

5. Dwaj gracze rzucają po n razy symetryczną monetą. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wyrzucą tę samą liczbę orłów?

6. Niech X będzie zmienną losową o rozkładzie wykładniczym z parametrem λ. Znaleźć $\mathbb{P}(X > t + s|X > s)$.

7. Niech X_i $(i = 1, 2)$ będzie zmienną losową z gęstością f_i. Wykazać, że jeśli X_1, X_2 są niezależne, to (X_1, X_2) jest wektorem losowym o rozkładzie ciągłym, z gęstością $f(x, y) = f_1(x)f_2(y)$.

8. Zmienne losowe X, Y są niezależne i mają gęstości odp. f_1, f_2. Znaleźć rozkład zmiennej losowej $Z = X/Y$.

9. Wykazać, że funkcje $r_n(t) = \operatorname{sgn}\cos(2^n\pi t)$ potraktowane jako zmienne losowe na przestrzeni $([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), |\cdot|)$ są niezależne.

10. Niech $Z = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i 2^{-i}$, gdzie ε_i – niezależne zmienne Rademachera. Wykazać, że Z ma rozkład jednostajny na przedziale $[-1, 1]$.

11. Niech X, Y będą niezależnymi zmiennymi o rozkladach

    a) Bernoulliego z parametrami odp. p, n i p, m

    b) Poissona z parametrami odp. λ_1, λ_2.

    c) normalnych z parametrami a_1, σ_1^2 i a_2, σ_2^2.

    d) jednostajnych na $[0, 1]$

    Znaleźć rozkład zmiennej $Z = X + Y$.

Zadania domowe

1. Test na rzadką chorobę, którą dotknięta jest średnio jedna osoba na tysiąc, daje fałszywą odpowiedź pozytywną w 5% przypadków (u osoby chorej zawsze daje odpowiedź pozytywną). Jaka jest szansa, że osoba u której test dał wynik pozytywny, jest naprawdę chora?

2. Wykazać, że jeśli $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest niemalejąca, prawostronnie ciągła, $F(-\infty) = 0$, $F(\infty) = 1$, to funkcja $f\colon (0,1) \to \mathbb{R}$, dana wzorem

$$f(s) = \sup\{u\colon F(u) < s\}$$

jest dobrze określona oraz jeśli spojrzymy na $(0,1)$ jak na przestrzeń probabilistyczną, gdzie prawdopodobieństwem jest miara Lebesgue'a, to f jest zmienną losową o dystrybuancie F.