Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa I - seria 4

1. Gracz dostał 13 kart z 52, obejrzał 8 z nich i stwierdził, że nie ma asa. Jaka jest szansa, że w ogóle nie ma asa?

2. W pierwszej urnie są 3 kule białe i 2 czarne, w drugiej urnie są 4 czarne i 1 biała. Rzucamy kostką. Jeśli wypadnie mniej niż 5 oczek, to losujemy kulę z pierwszej urny, w przeciwnym razie z drugiej. Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej?

3. W teleturnieju gracz ma do wyboru trzy koperty, dwie puste, jedną z nagrodą pieniężną. Gdy dokona wyboru, prowadzący otwiera jedną z odrzuconych kopert i pokazuje, że jest pusta. Gracz może w tym momencie zatrzymać wybraną wcześniej kopertę lub zmienić wybór i wziąć pozostałą z odrzuconych wcześniej kopert. Która strategia jest lepsza?

4. **(Paradoks Simpsona)** Podać przykład zdarzeń A, B, C, takich, że
$$\mathbb{P}(A|B) < \mathbb{P}(A|B'),$$
ale
$$\mathbb{P}(A|B \cap C) \geqslant \mathbb{P}(A|B' \cap C) \quad \text{oraz} \quad \mathbb{P}(A|B \cap C') \geqslant \mathbb{P}(A|B' \cap C').$$

5. (**Schemat urnowy Polya**) W urnie mamy b kul białych i c czarnych. Powtarzamy n razy następującą operację: losujemy kulę z urny, następnie wkładamy ją z powrotem, dokładając dodatkowo jeszcze a kul tego samego koloru.
   - Jakie jest prawdopodobieństwo, że wylosowano dokładnie k razy kulę czarną?
   - Wykazać, że pawdopodobieństwo wylosowania za n-tym razem kuli białej wynosi $\frac{b}{b+c}$.

6. Na loterii jest 10 losów wygrywających, 100 przegrywających i 1000 uprawniających do kolejnego losowania. Jakie jest prawdopodobieństwo wygrania?

7. Król Artur urządza turniej rycerski, w którym rycerze spotykają się systemem turniejowym. Obaj uczestnicy każdego pojedynku mają równe szanse na zwycięstwo. Wśród 2^n uczestników jest dwóch braci. Jakie jest prawdopodobieństwo, że spotkają się w pojedynku?

8. **(Zagadnienie ruiny)** Dwóch graczy (nazwijmy ich A i B) gra w „orła i reszkę”, rzucając (niekoniecznie symetryczną) monetą. Gracz A zaczyna z kapitałem a zł, gracz B - z kapitałem b zł. W każdej kolejce stawką jest 1 zł, gracz A wygrywa, gdy wypadnie orzeł (powiedzmy z prawdopodobieństwem p). Gra toczy się, dopóki jeden z graczy nie zbankrutuje. Obliczyć prawdopodobieństwo ruiny gracza A.

9. Podać przykład zmiennych losowych X, Y, Z, które są parami niezależne, ale nie są niezależne.

10. Danych jest n wektorów $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$, takich że $\|v_i\| = 1$ dla każdego i. Udowodnić, że można tak dobrać liczby $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in \{-1, +1\}$, żeby
$$\|\varepsilon_1 v_1 + \ldots + \varepsilon_n v_n\| \leqslant \sqrt{n} \ (\geqslant \sqrt{n}).$$