

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa I - seria 3

Prawdopodobieństwo całkowite, wzór Bayesa

1. Gracz dostał 13 kart z 52, obejrzał 8 z nich i stwierdził, że nie ma asa. Jaka jest szansa, że w ogóle nie ma asa?
2. W pierwszej urnie są 3 kule białe i 2 czarne, w drugiej urnie są 4 czarne i 1 biała. Rzucamy kostką. Jeśli wypadnie mniej niż 5 oczek, to losujemy kulę z pierwszej urny, w przeciwnym razie z drugiej. Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej?
3. Wybrano losowo rodzinę z dwojgiem dzieci i okazało się, że jedno z dzieci ma na drugie imię Franek. Jaka jest szansa, że drugie dziecko jest chłopcem (nie wykluczamy, że też ma na drugie imię Franek)?
4. W rodzinie z poprzedniego zadania wylosowano dziecko, które ma zrobić zakupy. W sklepie spotykamy dziecko, ma ono na drugie Franek, jaka jest szansa, że w domu został jego brat?
5. (**Paradoks Simpsona**) Podać przykład zdarzeń A, B, C , takich, że

$$\mathbb{P}(A|B) < \mathbb{P}(A|B'),$$

ale

$$\mathbb{P}(A|B \cap C) \geq \mathbb{P}(A|B' \cap C) \quad \text{oraz} \quad \mathbb{P}(A|B \cap C') \geq \mathbb{P}(A|B' \cap C').$$

6. (**Schemat urnowy Polya**) W urnie mamy b kul białych i c czarnych. Powtarzamy n razy następującą operację: losujemy kulę z urny, następnie wkładamy ją z powrotem, dokładając dodatkowo jeszcze a kul tego samego koloru.
 - Jakie jest prawdopodobieństwo, że wylosowano dokładnie k razy kulę czarną?
 - Wykazać, że prawdopodobieństwo wylosowania za n -tym razem kuli białej wynosi $\frac{b}{b+c}$.
7. Na loterii jest 10 losów wygrywających, 100 przegrywających i 1000 uprawniających do kolejnego losowania. Jakie jest prawdopodobieństwo wygrania?
8. Król Artur urządza turniej rycerski, w którym rycerze spotykają się systemem turniejowym. Obaj uczestnicy każdego pojedynku mają równe szanse na zwycięstwo. Wśród 2^n uczestników jest dwóch braci. Jakie jest prawdopodobieństwo, że spotkają się w pojedynku?
9. (**Zagadnienie ruiny**) Dwóch graczy (nazwijmy ich A i B) gra w „orła i reszkę”, rzucając (niekoniecznie symetryczną) monetą. Gracz A zaczyna z kapitałem a zł, gracz B - z kapitałem b zł. W każdej kolejce stawką jest 1 zł, gracz A wygrywa, gdy wypadnie orzeł (powiedzmy z prawdopodobieństwem p). Gra toczy się, dopóki jeden z graczy nie zbankrutuje. Obliczyć prawdopodobieństwo ruiny gracza A.

Zadanie domowe

1. W teleturnieju gracz ma do wyboru trzy koperty, dwie puste, jedną z nagrodą pieniężną. Gdy dokona wyboru, prowadzący otwiera jedną z odrzuconych kopert i pokazuje, że jest pusta. Gracz może w tym momencie zatrzymać wybraną wcześniej kopertę lub zmienić wybór i wziąć pozostałą z odrzuconych wcześniej kopert. Która strategia jest lepsza?