

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa I - seria 2

1. W kolejce po bilety na mecz stoi n kibiców. Każdy z nich nosi szalik w kolorze A lub B. Załóżmy, że wszystkie możliwe układy kolorów są jednakowo prawdopodobne. Jakie jest prawdopodobieństwo, że żadne dwie kolejne osoby nie mają szalików w tym samym kolorze? Jakie jest prawdopodobieństwo, że żadne dwie kolejne osoby nie mają szalików w kolorze A?
2. Miasto N. zbudowane jest na planie kwadratu i poszatowane ulicami biegnącymi ze wschodu na zachód i z północy na południe, przy czym ulic każdego typu jest po $N = 2n + 1$. Kierowca jedzie z południowo-zachodniego wierzchołka miasta na kraniec północno-wschodni, wybierając losowo jedną z najkrótszych dróg. Oblicz prawdopodobieństwo, że kierowca przejedzie przez środek miasta.
3. Do k rozróżnialnych urn wrzucono losowo n rozróżnialnych kul. Jakie jest prawdopodobieństwo, że dokładnie k urn pozostanie pustych?
4. Rozwiązać powyższe zadanie dla kul nierozróżnialnych.
5. (**Paradoks Bertranda**) Jakie jest prawdopodobieństwo, że losowo wybrana cięciwa okręgu ma długość większą niż bok trójkąta równobocznego wpisanego w ten okrąg?
6. Z jeziora wyłowiono 200 ryb, oznakowano je i wpuszczono do wody. Po pewnym czasie wyłowiono 100 ryb, a wśród nich było 8 oznakowanych. Za rozsądną ocenę liczby ryb w jeziorze można uznać liczbę ryb, dla której zrealizowało się zdarzenie o największym prawdopodobieństwie. Jaka to liczba?
7. Dana są liczby $k, n \in \mathbb{N}$ ($k > 1$), spełniające nierówność $n < 2^{k/2}$. Udowodnić, że liczby ze zbioru $A_n = \{1, \dots, n\}$ można pokolorować dwoma kolorami w ten sposób, by w każdym ciągu arytmetycznym długości k , o elementach ze zbioru A_n występowały liczby w obu kolorach.
8. Każdy z n chromosomów w komórce wystawionej na promieniowanie dzieli się na dwie części różnych typów (powiedzmy typu A i typu B). Części te następnie ponownie łączą się w pary, przy czym możliwe jest także połączenie w parę 2 części tego samego typu. Jakie jest prawdopodobieństwo, że części te połączą się w takich samych kombinacjach, jak przed podziałem? Jakie jest prawdopodobieństwo, że po połączeniu każda z par będzie się składać z części różnych typów?
9. (**Paradoks kawalera de Méré**) Co jest bardziej prawdopodobne: wyrzucenie co najmniej jednej jedynki przy rzucie 4 kostkami czy co najmniej raz obu jedynek przy 24 rzutach 2 kostkami?