Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa I - seria 1

σ-ciała, prawdopodobieństwo klasyczne i geometryczne

1. Udowodnij, że każde nieskończone σ-ciało jest nieprzeliczalne.

2. Dana jest przestrzeń probabilistyczna $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, gdzie Ω jest zbiorem przeliczalnym oraz $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$. Udowodnij, że istnieją liczby $p_\omega \geqslant 0$, takie że $\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} p_\omega$ dla wszystkich $A \in \mathcal{F}$.

3. a) Opisz wszystkie σ-ciała w przypadku przeliczalnego zbioru Ω.

   b) Niech $\Omega = \mathbb{N}$. Dla dowolnej liczby naturalnej $k > 0$ niech $A_k = \{n \in \Omega \colon k|n\}$. Wyznaczyć $\sigma(\{A_k\}_{k \geqslant 0})$. Rozwiązać to samo zadanie dla $\Omega = \mathbb{Z}$.

4. Dana jest przestrzeń probabilistyczna $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Korzystając z aksjomatów prawdopodobieństwa, wykazać, że

   a) $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$,

   b) $\mathbb{P}(A) \leqslant 1$ dla $A \in \mathcal{F}$,

   c) $\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$ dla $A_i \in \mathcal{F}$

5. Klasa liczy 15 uczniów, na każdej lekcji do odpowiedzi losowany jest jeden uczeń. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że w ciągu 16 lekcji każdy uczeń zostanie przepytany.

6. Z przedziału $[0, 1]$ wybrano losowo liczbę x. Jakie jest prawdopodobieństwo, że x jest niewymierna?

7. Roztrzepana sekretarka rozmieściła losowo N listów w N uprzednio zaadresowanych kopertach. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że dokładnie k listów trafiło do właściwej koperty.

8. Pan X spotyka się z paniami A i B, do których dojeżdża autobusami odpowiednio linii 1 i 2. Gdy czuje się samotny, wychodzi z domu, udaje się na przystanek i wsiada w pierwszy autobus, jaki się pojawi. Oba autobusy kursują przez całą dobę co godzinę, a pan X ma napady samotności codziennie w losowym momencie czasu, a jednak pani A czyni mu wyrzuty, że odwiedza ją zbyt rzadko, zaś pani B ma wrażenie, że pan X jej się narzuca. Jak to wyjaśnić?

9. Z przedziału $[0, 1]$ wybrano losowo dwa punkty, które podzieliły go na trzy odcinki. Jakie jest prawdopodobieństwo, że z tych odcinków da się zbudować trójkąt?

10. (Igła Buffona) Igłę o długości l rzucono na podłogę z desek o szerokości $a \geqslant l$. Jakie jest prawdopodobieństwo, że igła przetnie krawędź deski?

11. **(Paradoks kawalera de Méré)** Co jest bardziej prawdopodobne: wyrzucenie co najmniej jednej jedynki przy rzucie 4 kostkami czy co najmniej raz obu jedynek przy 24 rzutach 2 kostkami?

Zadanie domowe

Udowodnij, że następujące pseudometryki na $\mathcal{F}$ spełniają warunek trójkąta:

$$\begin{aligned} \rho_1(A,B) &= \mathbb{P}(A\Delta B) \\ \rho_2(A,B) &= \begin{cases} \frac{\mathbb{P}(A\Delta B)}{\mathbb{P}(A\cup B)} & \text{jeśli } \mathbb{P}(A\cup B)>0 \\ 0 & \text{w przeciwnym razie.} \end{cases} \end{aligned}$$