Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa I - seria 1

1. Dana jest przestrzeń probabilistyczna $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, gdzie Ω jest zbiorem przeliczalnym oraz $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$. Udowodnij, że istnieją liczby $p_\omega \geqslant 0$, takie że $\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} p_\omega$ dla wszystkich $A \in \mathcal{F}$.

2. Udowodnij, że każde nieskończone σ-ciało jest nieprzeliczalne.

3. Klasa liczy 15 uczniów, na każdej lekcji do odpowiedzi losowany jest jeden uczeń. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że w ciągu 16 lekcji każdy uczeń zostanie przepytany.

4. Roztrzepana sekretarka rozmieściła losowo N listów w N uprzednio zaadresowanych kopertach. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że dokładnie k listów trafiło do właściwej koperty.

5. (Igła Buffona) Igłę o długości l rzucono na podłogę z desek o szerokości $a \leqslant l$. Jakie jest prawdopodobieństwo, że igła przetnie krawędź deski?

6. Z przedziału $[0, 1]$ wybrano losowo liczbę x. Jakie jest prawdopodobieństwo, że x jest niewymierna?

7. W n rozróżnialnych urnach rozmieszczono losowo n rozróżnialnych kul. Jakie jest prawdopodobieństwo, że dokładnie jedna urna zostanie pusta?

8. Na przyjęciu dla n osób podano k identycznych (nierozróżnialnych) ciastek. Wszystkie ciastka zostały zjedzone. Jakie jest prawdopodobieńtwo, że dokładnie jedna osoba nie zjadła ani jednego ciastka?

9. Udowodnij, że następujące pseudometryki na $\mathcal{F}$ spełniają warunek trójkąta:

$$\begin{aligned} \rho_1(A, B) &= \mathbb{P}(A \Delta B) \\ \rho_2(A, B) &= \begin{cases} \frac{\mathbb{P}(A \Delta B)}{\mathbb{P}(A \cup B)} & \text{jeśli } \mathbb{P}(A \cup B) > 0 \\ 0 & \text{w przeciwnym razie.} \end{cases} \end{aligned}$$

10. Pan X spotyka się z paniami A i B, do których dojeżdża autobusami odpowiednio linii 1 i 2. Gdy czuje się samotny, wychodzi z domu, udaje się na przystanek i wsiada w pierwszy autobus, jaki się pojawi. Oba autobusy kursują przez całą dobę co godzinę, a pan X ma napady samotności codziennie w losowym momencie czasu, a jednak pani A czyni mu wyrzuty, że odwiedza ją zbyt rzadko, zaś pani B ma wrażenie, że pan X jej się narzuca. Jak to wyjaśnić?

11. Z przedziału $[0, 1]$ wybrano losowo dwa punkty, które podzieliły go na trzy odcinki. Jakie jest prawdopodobieństwo, że z tych odcinków da się zbudować trójkąt?