Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa II - seria 7

Martyngały (c.d.), łańcuchy Markowa

1. Gracze A i B, startując z kapitałów odp. a, b złotych, grają w następującą grę. Rzucają symetryczną monetą. Jeśli wypadnie orzeł, gracz A otrzymuje złotówkę od gracza B, jeśli reszka – odwrotnie. Grają tak długo, aż jeden z nich zbankrutuje. Obliczyć średni czas oczekiwania na ruinę jednego z graczy, korzystając z a) teorii martyngałów, b) teorii łańcuchów Markowa.

2. Rzucamy kostką tak długo, aż pojawi się ciąg 15 lub 55. Jakie jest prawdopodobieństwo, że ciąg 16 pojawi się wcześniej?

3. Rzucamy symetryczną monetą, aż do momentu, gdy wyrzucimy pod rząd cztery orły. Obliczyć wartość oczekiwaną liczby wykonanych rzutów.

4. Macierz przejścia łańcuch Markowa $(X_n)_n \in \mathbb{N}$ na przestrzeni $E = \{1, 2, 3, 4\}$ zadana jest następująco:

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{2}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

   (a) Zakładając, że $X_0 = 1$ p.n., obliczyć prawdopodobieństwo, że X_n będzie w stanie 2 przed stanem 4.

   (b) Zakładając, że $X_0 = 3$ p.n., obliczyć wartość oczekiwaną czasu dojścia do stanu 2

   (c) Wyznaczyć rozkład stacjonarny

   (d) Czy łańcuch jest okresowy? Czy jest nieprzywiedlny?

5. Udowodnić, że łańcuch Markowa o skończonej liczbie stanów nie może składać się tylko ze stanów chwilowych. Czy jest to prawda dla łańcuchów o nieskończonej liczbie stanów?