Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa II - seria 6
Martyngały

1. Gracze A i B, startując z kapitałów odp. a, b złotych, grają w następującą grę. Rzucają (niekoniecznie symetryczną) monetą. Jeśli wypadnie orzeł, gracz A otrzymuje złotówkę od gracza B, jeśli reszka – odwrotnie. Grają tak długo, aż jeden z nich zbankrutuje. Obliczyć prawdopodobieństwo wygranej gracza A, korzystając z martyngałów.

2. Rozważmy martyngał X_n, całkowalny z kwadratem, tzn. $\mathbb{E}X_n^2 < \infty$ dla każdego n. Zdefiniujmy przyrosty martyngałowe wzorem
$$D_n = X_n - X_{n-1}.$$
Wykazać, że zmienne D_n są parami nieskorelowane.

3. Niech X_n będzie ciągiem zmiennych losowych, adaptowanych do filtracji $\mathcal{F}_n$. Załóżmy, że $X_0 = 0$. Wykazać, że $(X_n, \mathcal{F}_n)$ jest martyngałem, wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego ograniczonego momentu stopu τ, $\mathbb{E}X_\tau = 0$.

4. Studenta X czeka egzamin. Zna odpowiedź na 10 z 30 pytań, losowanych przez kolejno zdających studentów. Studenci, wychodząc z egzaminu, informują czekających, jakie pytania otrzymali. Jaką strategię powinien przyjąć X, żeby mieć jak największą szansę na zdanie egzaminu?

5. W urnie znajduje się b kul białych i c czarnych. W kolejnych krokach losujemy ze zwracaniem urnę z kuli i dokładamy do urny jeszcze a kul tego samego koloru, co wylosowana. Niech X_n oznacza liczbę białych kul w urnie po n-tym losowaniu. Wykazać, że $\frac{X_n}{b+c+na}$ jest martyngałem względem naturalnej filtracji.

6. W pojemniku znajduje się m cząstek. W każdej sekundzie każda z cząstek, niezależnie od pozostałych może albo zniknąć (z prawdopodobieństwem 2/3), albo podzielić się na trzy cząstki. Wykazać, że z prawdopodobieństwem 1 po pewnym czasie w pojemniku nie będzie żadnej cząstki.

7. Niech $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi Rademachera. Niech ponadto $\mathcal{F}_n = \sigma(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ oraz
$$Z_n = e^{a(\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_n) - na^2/2}.$$
Wykazać, że Z_n jest nadmartyngałem. Zbadać jego zbieżność prawie na pewno i w L_1.