Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa II - seria 5

Centralne Twierdzenie Graniczne - c.d. Filtracje, momenty stopu. Martyngały

1. Zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne oraz $\mathbb{P}(X_k = k) = \mathbb{P}(X_k = -k) = 1/2$. Niech $s_n^2 = \sum_{k=1}^n \mathrm{Var}(X_k)$. Zbadać słabą zbieżność ciągu
$$\frac{X_1 + \ldots + X_n}{s_n}.$$

2. Zmienne losowe $X_1, , X_2, \ldots$ są niezależne i mają rozkłady $U(-a_k, a_k)$. Zbadać zbieżność ciągu
$$\frac{X_1 + \ldots + X_n}{s_n}.$$
jeśli
   (a) ciąg (a_k) jest ograniczony i $s_n \to \infty$.
   (b) $\sum_k a_k^2 < \infty$.

3. Zmienna losowa X_λ ma rozkład Poissona z parametrem λ. Zbadać słabą zbieżność $(X_\lambda - \lambda)/\sqrt{\lambda}$ przy $\lambda \to \infty$.

4. Niech $X_1, X_2, \ldots$ będą zmiennymi i.i.d o średniej zero i wariancji σ^2, zaś f funkcją różniczkowalną w 0. Wykazać, że $\sqrt{n}(f(Y_n) - f(0))$ zbiega słabo do rozkładu $\mathcal{N}(0, \sigma^2 f'(0)^2)$, gdzie
$$Y_n = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}.$$

5. Niech τ_1, τ_2 będą momentami stopu. Udowodnić, że momentami stopu są także $\tau_1 \wedge \tau_2$ oraz $\tau_1 \vee \tau_2$. Czy są momentami stopu $t_1 + 1$, $\tau_1 - 1$?

6. Niech $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{N}}$ będzie filtracją, zaś $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ ciągiem zmiennych losowych, adaptowalnym do tej filtracji. Niech τ oznacza moment pierwszej wizyty ciągu X_t w zbiorze borelowskim B. Wykazać, że τ jest momentem zatrzymania.

7. Podać przykład momentu zatrzymania τ , takiego, że $\sigma(\tau) \neq \mathcal{F}_\tau$.

8. Niech $X_1, X_2, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o średniej 0. Zdefiniujmy $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ oraz $Z_n = S_n^2 - \mathrm{Var} S_n$. Wykazać, że $(Z_n, \sigma(X_1, \ldots, X_n))$ jest martyngałem.

9. Niech X_n będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie i średniej 0, $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$. Zdefiniujmy
$$Z_0 = 0, \quad Z_n = \sum_{k=1}^n X_{k-1} X_k$$
Udowodnić, że $(Z_n, \mathcal{F}_n)$ jest martyngałem.

10. Niech ξ_i $(i = 1, 2, \ldots)$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie $\Pr(\xi_i = 1) = p$, $\Pr(\xi_i = -1) = q = 1 - p$. Niech $\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ oraz

$$Z_n = \left(\frac{q}{p}\right)^{\xi_1 + \ldots + \xi_n}$$

Wykazać, że ciąg $(Z_n, \mathcal{F}_n)$ jest martyngałem.

11. Niech (X_i) będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie $\mathcal{U}[0, 1]$. Zdefiniujmy $\tau = \inf\{n\colon X_1 + \ldots + X_n \geqslant 1\}$. Wyznaczyć $\mathbb{E}\tau$.

12. Niech $S_n = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i$, gdzie $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \ldots$ - niezależne zmienne Rademachera. Niech $\tau = \inf\{n\colon S_n = 1\}$. Wykazać, że $\mathbb{E}\tau = \infty$.

13. Rzucamy kostką tak długo, aż otrzymamy wszystkie oczka. Znaleźć wartość średnią sumy wyrzuconych oczek.