Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa II - seria 4

Centralne Twierdzenie Graniczne

1. Udowodnij, że układ trójkątny $X_{n,k} = \frac{X_k}{\sqrt{n}}$, gdzie X_n, $n = 1, 2, \ldots$, są niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie, spełnia warunek Lindeberga.

2. Dane są niezależne zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots,$ o wspólnym rozkładzie z wartością oczekiwaną równą 0 i dodatnią wariancją. Wyznaczyć w zależności od $a, \alpha \in \mathbb{R}$
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n^\alpha}\right| > a\right).$$

3. Zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne, mają ten sam rozkład, $\mathbb{E}X_1 = 0$, $\mathrm{Var}(X) = 1$. Zbadać zbieżność względem rozkładu ciągów
$$U_n = \frac{\sqrt{n}(X_1 + \ldots, X_n)}{X_1^2 + \ldots + X_n^2}, \quad V_n = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{\sqrt{X_1^2 + \ldots + X_n^2}}.$$

4. Powiemy, że układ trójkątny $(X_{n,k})$ spełnia warunek Lyapunowa,
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \mathbb{E}|X_{n,k} - \mathbb{E}X_{n,k}|^{2+\delta} = 0.$$
Wykazać, że jeśli ciąg $\mathrm{Var}(\sum_{k=1}^{k_n} X_{n,k})$ jest zbieżny, to warunek Lyapunowa implikuje warunek Lindeberga.

5. Rzucono 1000 razy kostką. Oszacować prawdopodobieństwo, że suma wyrzuconych oczek będzie zawarta między 3410 a 3590.

6. Niech $X_1, X_2, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi, takimi, że
$$\mathbb{P}(X_n = \pm 1) = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{n^2}), \quad \mathbb{P}(X_n = \pm n) = \frac{1}{2n^2}.$$
Wykazać, że
$$\frac{X_1 + \ldots + X_n}{\sqrt{n}} \Rightarrow \mathcal{N}(0, 1),$$
ale $\mathrm{Var}(X_n) \to 2$.

7. Niech X będzie całkowalną z kwadratem zmienną losową, taką, że $X \sim \frac{Y+Z}{\sqrt{2}}$, gdzie Y, Z - niezależne kopie X. Wykazać, że X ma rozkład $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

8. $(*)$ Niech $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Wykazać, że dla dowolnej funkcji gładkiej o zwartym nośniku $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, zachodzi
$$\mathrm{Var} f(X) \leqslant \mathbb{E}|f'(X)|^2.$$