Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa II - seria 3

Słaba zbieżność (c.d.), funkcje charakterystyczne

1. Niech X_n ma rozkład geometryczny z parametrem p_n, gdzie $p_n n \to 1$. Zbadać zbieżność ciągu $Y_n = X_n/n$.

2. Obliczyć funkcje charakterystyczne podstawowych rozkładów
   (a) dyskretnych;
   (b) ciągłych.

3. Przy pomocy funkcji charakterystycznych sprawdzić, że zmienna losowa $\sum_{i\geqslant 1} \frac{\epsilon_i}{2^i}$ ma rozkład jednostajny na przedziale $[-1,1]$.

4. Sprawdzić, że splot rozkładów normalnych jest normalny.

5. Niech X będzie zmienną losową taką, że $P(X \in \mathbb{Z}) = 1$. Pokaż, że dla każdego $n \in \mathbb{Z}$,
$$P(X = n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-itn} \phi_X(t) dt.$$

6. Zmienne losowe X, Y, U, V są niezależne o rozkładzie $\mathcal{N}(0,1)$. Obliczyć funkcję charakterystyczną zmiennej a) XY, b) X^2, c) X/Y, d) $\frac{1}{2}(X^2 - Y^2)$ e) $XY + UV$.

7. Udowodnić, że jeśli funkcja charakterystyczna zmiennej losowej ma drugą pochodną w zerze, to $\mathbb{E}X^2 < \infty$.

8. Wiadomo, że ϕ jest funkcją charakterystyczną pewnej zmiennej losowej X. Czy funkcjami charakterystycznymi są : ϕ^2, $\mathrm{Re}\phi$, $|\phi|^2$, $|\phi|$?

9. (Twierdzenie Riemanna-Lebesgue'a) Udowodnić, że jeśli X jest zmienną losową o rozkładzie ciągłym, to $\phi_X(t) \to 0$, gdy $|t| \to \infty$.

10. Udowodnić, że $\phi(t) = e^{-|t|^\alpha}$ nie jest funkcją charakterystyczną dla $\alpha > 2$.

11. $(*)$ Pokazać, że dla $0 < \alpha \leqslant 2$ $\phi(t) = e^{-|t|^\alpha}$ jest funkcją charakterystyczną pewnego rozkładu. Jakie są własności takich rozkładów?