Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa II - seria 2

Słaba zbieżność rozkładów i zmiennych losowych.

1. Udowodnij, że dla dowolnych punktów w przestrzeni metrycznej (E, d), $\delta_{x_n} \Rightarrow \delta_x$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x_n \to x$.

2. Niech $X, X_1, X_2, \ldots$ będą zmiennymi losowymi o wartości w przestrzeni metrycznej (E, d). Wykazać, że jeśli $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$, to $X_n \xrightarrow{D} X$, ale implikacja odwrotna nie musi zachodzić.

3. Wykazać, że jeśli zmienna X z poprzedniego zadania jest stała, to implikacja odwrotna zachodzi.

4. Niech $\mu, \mu_1, \mu_2, \ldots$ będą miarami probabilistycznymi, skupionymi na pewnym zbiorze przeliczalnym $S \subseteq E$ Wykazać, że

   a) jeśli dla każdego $x \in S$, $\mu_n(\{x\}) \to \mu(\{x\})$, to $\mu_n \Rightarrow \mu$,

   b) jeśli każdy punkt zbioru S jest izolowany, to implikację w punkcie a) można odwrócić,

   c) w ogólności implikacji z punktu a) nie można odwrócić.

5. Wykazać, że $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \delta_{k/n} \xrightarrow{D} \lambda$, gdzie λ jest miarą Lebesgue'a na $(0, 1)$.

6. (Twierdzenie Słuckiego) Niech X_n, Y_n będą rzeczywistymi zmiennymi losowymi, takimi że $X_n \xrightarrow{D} X$, $Y_n \xrightarrow{D} c$, gdzie c jest pewną stałą. Wykazać, że wówczas

   a) $X_n + Y_n \xrightarrow{D} X + c$,

   b) $X_n Y_n \xrightarrow{D} cX$.

   W szczególności, jeśli $X_n \xrightarrow{D} X$, $a_n \to a, b_n \to b$, to $a_n X_n + b_n \xrightarrow{D} aX + b$.

7. (Twierdzenie Scheffe'go) Niech μ będzie miarą σ-skończoną, ν, ν_n miarami probabilistycznymi z gęstościami odpowiednio f, f_n względem μ. Wykazać, że jeśli $f_n \to f$ μ-p.n., to

   $$\sup_A |\nu(A) - \nu_n(A)| \leqslant \int_\Omega |f - f_n| d\mu \to 0.$$

   W szczególności $\nu_m \Rightarrow \nu$.

8. Niech $P_\alpha = \mathcal{N}(m_\alpha, \sigma_\alpha^2)$. Udowodnić, że rodzina $\{P_\alpha \colon \alpha \in \Lambda\}$ jest ciasna, wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje stała K, taka że $|m_\alpha|, |\sigma_\alpha^2| \leqslant K$ dla $\alpha \in \Lambda$.

9. Udowodnić, że $\mathcal{N}(m_n, \sigma_n^2)$ jest zbieżny, wtedy i tylko wtedy gdy istnieją $m = \lim m_n$, $\sigma^2 = \lim \sigma_n^2$ i wówczas $\mathcal{N}(m_n, \sigma_n^2) \Rightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

10. (Obserwacja Poincaré) Niech X_n będzie pierwszą współrzędną zmiennej losowej o rozkładzie jednostajnym na kuli (bądź sferze) jednostkowej w $\mathbb{R}^n$. Wykazać, że

$$\sqrt{n}X_n \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0,1).$$

11. Udowodnij, że jeśli $X_n \xrightarrow{D} X$, $p > 0$ oraz $\sup_n \mathbb{E}|X_n|^p < \infty$, to $\mathbb{E}|X| < \infty$, ale niekoniecznie $\mathbb{E}|X_n|^p \to \mathbb{E}|X|^p$. Jest to jednak prawdą jeśli $\sup_n \mathbb{E}|X_n|^{p+\varepsilon} < \infty$ dla pewnego $\varepsilon > 0$.

12. Niech α będzie liczbą zespoloną o module 1, nie będącą pierwiastkiem z jedynki. Wykazać, że

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \delta_{\alpha^k} \Rightarrow \lambda,$$

gdzie λ jest miarą Lebesgue'a na okręgu jednostkowym. Co się dzieje, gdy α jest pierwiastkiem z jedynki?

13. (Twierdzenie Skorohoda) Wykazać, że jeśli X_n, X są rzeczywistymi zmiennymi losowymi oraz $X_n \xrightarrow{D} X$, to istnieją zmienne Y_n, Y, takie że $Y_n \sim X_n, Y \sim X$ oraz $Y_n \to Y$ p.n.