Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa II - seria 1
Warunkowa wartość oczekiwana

1. Niech $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), |\cdot|)$ będzie przestrzenią probabilistyczną, a $\mathcal{F}$ będzie σ-ciałem generowanym przez zbiory $[0, \frac{1}{2})$, $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$. Zmienna losowa X dana jest wzorem $X(\omega) = \omega$. Wyznaczyć $\mathbb{E}(X|\mathcal{F})$.

2. Zmienne losowe X, Y są niezależne i mają rozkłady

   a) Poissona z parametrami λ, μ, odpowiednio,

   b) Bernoulliego $B(n,p)$, $B(m,p)$, odpowiednio.

   Wyznaczyć $\mathbb{E}(X|X+Y)$.

3. Zmienna losowa X ma rozkład jednostajny $U([0,n])$. Wyznaczyć $\mathbb{E}(X|[X])$, gdzie $[x]$ oznacza część całkowitą liczby x.

4. Podać przykład niezależnych zmiennych losowych X, Y i σ-ciała $\mathcal{F}$ takich, że

$$\mathbb{E}(XY|\mathcal{F}) \neq \mathbb{E}(X|\mathcal{F})\mathbb{E}(Y|\mathcal{F}).$$

5. Podać przykład zmiennych losowych X, Y, które nie są niezależne, ale $\mathbb{E}(X|Y) = \mathbb{E}X$.

6. X i Y są niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie i skończonej wartości oczekiwanej. Wyznaczyć $E(X|X+Y)$. Wynik uogólnić na n zmiennych losowych.

7. Niech X, Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi, zaś f mierzalną funkcją dwu zmiennych, taką że $\mathbb{E}|f(X,Y)| < \infty$. Niech $g(x) = \mathbb{E}f(x,Y)$. Udowodnić, że $\mathbb{E}(f(X,Y)|X) = g(X)$ p.n.

8. Zmienne losowe X, Y są niezależne i mają rozkład jednostajny $U(0,1)$. Wyznaczyć

   a) $\mathbb{E}(X-Y|X+Y)$,

   b) $\mathbb{E}(X+Y|X-Y)$,

   c) $\mathbb{E}(X^2Y|Y)$

   d) $\mathbb{E}(\cos(XY)|Y)$,

   e) $E(U|V)$,

   f) $E(V|U)$, gdzie $U = \min(X,Y)$, $V = \max(X,Y)$.

9. Udowodnić, że zmienna losowa X ma rozkład symetryczny wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbb{E}(X|X^2) = 0$.

10. Zmienne X, Y są niezależne i mają rozkład $N(0,1)$. Wyznaczyć

    a) $\mathbb{E}(X|aX + bY)$, gdzie a, b są ustalonymi liczbami rzeczywistymi takimi, że $(a,b) \neq (0,0)$,

    b) $\mathbb{E}(XY|X+Y)$.