Zadania przygotowawcze z PSII

1. Oblicz granicę w $L_2(\Omega)$ ciągu zmiennych losowych

$$X_n := \sum_{k=0}^{n-1} W_{\frac{t(k+1)}{n}} (W_{\frac{t(k+1)}{n}} - W_{\frac{tk}{n}}).$$

2. Niech $X_t = \int_0^t \sin s dW_s$. Znaleźć $\mathbb{E}(X_1 + X_3)^4$.

3. Niech X_n będzie ciągiem zmiennych losowych $\mathcal{F}_n$-adaptowalnych. Wykaż, że istnieje dokładnie jeden rozkład $X_n = Y_n + Z_n$ taki, że $(Y_n, \mathcal{F}_n)$ jest martyngałem, a Z_n jest ciągiem prognozowalnym, to znaczy $\mathcal{F}_{n-1}$ adaptowalnym. Pokaż, że X_n jest podmartyngałem wtedy i tylko wtedy, gdy Z_n jest niemalejący.

4. Pokaż, że $\mathcal{M}^{2,c}_{loc} = \mathcal{M}^c_{loc}$.

5. Używając wzoru Ito, znaleźć rozkład z definicji martyngału dla procesu Y_t, gdy

   (a) $Y_t = f(W_t, t)$, gdzie f – funkcja klasy C^2 na $\mathbb{R}^2$,

   (b) $Y_t = W_1^2(t) + W_2^2(t)$, gdzie W_1, W_2 - niezależne procesy Wienera,

6. Niech $M_t = B_t^3 - 3tB_t$. Wykazać, że $M \in \mathcal{M}^{2,c}$. Znaleźć $\langle M\rangle_t$.

7. Niech $dX_t = u(t,\omega)dt + dW_t$. Zdefiniujmy

$$Y_t = X_t M_t,$$

   gdzie

$$M_t = \exp\left(-\int_0^t u(r,\omega)dW_r - \frac{1}{2}\int_0^t u^2(r,\omega)dr\right).$$

   Wykazać, że Y_t jest martyngałem lokalnym.

8. Niech $W = (W^1, ..., W^d)$ będzie d-wymiarowym procesem Wienera, a $R_t := \|W_t\|$. Wykaż, że

   (a) $B_t := \sum_{i=1}^d \int_0^t \frac{W_s^i}{R_s} dW_s^i$ jest jednowymiarowym procesem Wienera.

   (b) $R_t = \int_0^t \frac{d-1}{2R_s} ds + B_t$ (proces R nazywamy procesem Bessela)

9. Niech $W_t = (W_t^1, W_t^2)$ będzie dwuwymiarowym procesem Wienera. Niech D będzie zbiorem złożonym z punktów $u = (u^1, u^2)$ takich, że $u^1, u^2 \geqslant 0$. Pokaż, że dla procesu $X_t = x + W_t$ moment zatrzymania $\tau = \inf\{t : \ X_t \notin D\}$ ma nieskończoną wartość oczekiwaną. (Korzystając z zasady odbicia oszacuj ogon zmiennej τ)

10. Zdefiniujmy proces X_t na płaszczyźnie wzorem

$$X_1(t) = a\cos W_t \; X_2(t) = b\sin W_t.$$

O procesie X można myśleć jako o ruchu Browna na elipsie. Wykazać, że X spełnia następujące równanie

$$dX_t = -\frac{1}{2}X_t dt + MX_t dW_t,$$

gdzie

$$M = \begin{bmatrix} 0 & -a/b \\ b/a & 0 \end{bmatrix}$$

11. Proces $(\sin W_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ przedstawić w postaci $\sin W_t = M_t + A_t$, gdzie $M \in \mathcal{M}^{2,c}_{loc}$ zaś A jest procesem o wahaniu skończonym. Znaleźć $\langle M\rangle$. Czy M jest martyngałem?

12. Obliczyć

$$\mathbb{E}\Big(\int_0^t s dW_s \int_0^t W_s^2 dW_s\Big).$$