Zadania z Procesów stochastycznych II - 18 listopada 2005

1. Znaleźć rozkłady skończenie wymiarowe procesu $Y_t = \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} dW_s, \alpha > 0, t \geqslant 0$.

   (a) Pokazać, że Y_t są zbieżna według rozkładu, gdy $t \to \infty$,

   (b) Niech ξ będzie słabą granicą zmiennych Y_t przy $t \to \infty$, niezależną od procesu Wienera W_t. Pokazać, że procs
   $$e^{-\alpha t}\xi + \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} dW_s$$
   jest stacjonarny i znaleźć jego rozkłady skończeniewymiarowe.

2. Niech $W = (W_1, \ldots, W_d)$ będzie d-wymiarowym procesem Wienera. Pokazać, że $\langle W_i, W_j \rangle = 0$ dla $i \neq j$.

3. Niech $h\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ klasy C^2, zaś G niech będzie zbiorem otwartym i ograniczonym w $\mathbb{R}^d$. Załóżmy, że h jest harmoniczna w G. Dla $x \in G$ zdefiniujmy $\tau = \inf\{t\colon W_t + x \notin G\}$. Wykazać, że $h(W^\tau + x)$ jest martyngałem.

4. Niech W będzie procesem Wienera w $\mathbb{R}^3$, $a \in \mathbb{R}^3 \backslash \{0\}$, $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^W$. Wykazać, że $X_t = \frac{1}{|W_t - a|}$ jest martyngałem lokalnym, ale nie jest martyngałem.

5. Znaleźć wielowymiarową wersję twierdzenia Levy'ego

6. Niech W będzie procesem Wienera w $\mathbb{R}^2$, $a =\neq 0$. Pokazać, że z prawdopodobieństwem 1 trajektoria W dochodzi do każdego otoczenia a, ale prawie na pewno nie dotrze do punktu a.