Zadania z Procesów stochastycznych II - 18 listopada 2005

1. Niech $X \in \Lambda^2_T$. Rozważmy $0 \leqslant t_1 < t_2 \leqslant T$ oraz $\xi-$ $\mathcal{F}_{t_1}$ mierzalną zmienną losową (niekoniecznie ograniczoną). Wykazać, że $\xi X \mathbf{1}_{(\mathbf{t_1},\mathbf{t_2}]} \in \Lambda^2_T$ oraz $\int_0^t \xi X_s \mathbf{1}_{(\mathbf{t_1},\mathbf{t_2}]}(s) dW_s = \xi \int_0^t X_s \mathbf{1}_{(\mathbf{t_1},\mathbf{t_2}]}(s) dW_s$.

2. Wykazać, że dla dowolnego $M \in \mathcal{M}^{2,c}$ i momentu zatrzymania τ, zachodzi $\langle M \rangle^\tau = \langle M^\tau \rangle$.

3. Niech ξ_n będą dowolnymi zmiennymi losowymi, zaś A_k wstępującym ciągiem zbiorów, takim, że $\bigcup_k A_k = \Omega$. Wykazać, że jeżeli dla każdego k ciąg $(\mathbf{1}_{\mathbf{A_k}} \xi_n)_n$ jest zbieżny wg prawdopodobieństwa, to również $(\xi_n)_n$ jest zbieżny wg prawdopodobieństwa.

4. Załóżmy, że $\xi_n \geqslant 0$, $\xi_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \xi$, $\mathbb{E}\xi_n = \mathbb{E}\xi < \infty$. Wykazać, że wówczas $\xi_n \xrightarrow{L^1} \xi$.

5. Niech $M, M' \in \mathcal{M}^{2,c}_T$, $M_0 = M'_0 = 0$. Wykazać, że

$$\mathbb{E}|V_n(M,t) - V_n(M',t)| \leqslant \|M - M'\|^2_{\mathcal{M}^{2,c}_T} + 2\|M'\|_{\mathcal{M}^{2,c}_T} \|M - M'\|_{\mathcal{M}^{2,c}_T}$$

6. Wykazać, że $\mathcal{M}^c_{\text{loc}} = \mathcal{M}^{2,c}_{\text{loc}}$.

7. Wykazać, że

   a) każdy ciągły i ograniczony martyngał lokalny jest martyngałem,

   b) każdy nieujemny, ciągły, całkowalny martyngał lokalny jest nadmartyngałem,

8. Niech $M \in \mathcal{M}^{2,c}_T$. Wykazać, że dla dowolnego momentu zatrzymania τ

$$(\int X dM)^\tau = \int X dM^\tau = (\int \mathbf{1}_{[\mathbf{0},\tau]} X dM)^\tau = \int \mathbf{1}_{[\mathbf{0},\tau]} X dM^\tau.$$