Procesy Stochastyczne 2

Radosław Adamczak, Witold Bendorz

30 listopada 2005

Rozdział 1

Wstęp

Niech $W(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$ będzie procesem Wienera, $X(t)$- procesem stochastycznym. Zasadniczym celem teorii jest zdefiniowanie całki stochastycznej $\int_0^t X(s)dW(s)$. Problem polega na tym, że trajektorie procesu Wienera nie mają ograniczonego wahania, a zatem nie można całki definiować dla każdej trajektorii z osobna (na ćwiczenia).

Niech $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ będzie przestrzenią probabilistyczną, zupełną. Niech $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$, $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$, będzie (zupełną) filtracją. Dla uproszczenia określamy $\mathcal{F}_\infty = \sigma(\bigcup_t \mathcal{F}_t)$. Niech $0 < T \leqslant \infty$.

Definicja 1 *Przestrzeń $\mathcal{M}_T^{2,c}$ będą stanowiły ciągłe martyngały, adaptowalne względem filtracji $(\mathcal{F}_t)$ takie, że $\sup_{t\leqslant T} \mathbf{E}M^2(t) < \infty$.*

Zauważmy, że

1. jeśli $T < \infty$ $\sup_{t\leqslant T} \mathbf{E}M^2(t) = \mathbf{E}M^2(t)$.

2. jeśli $T = \infty$, to $\mathcal{M}_\infty^{2,c}$ tworzą martyngały ciągłe takie, że $\sup_{t<\infty} \mathbf{E}M^2(t) < \infty$. Z nierówności Dooba wynika, że

$$\mathbf{E} \sup_{t<\infty} M^2(t) \leqslant 4 \sup_{t<\infty} \mathbf{E}M^2(t) < \infty.$$

   Twierdzenia o zbieżności martyngałów implikują, że $M(t) \to M(\infty)$ p.n. i w $L^2(\Omega)$. Ponadto zachodzi wzór $M(t) = \mathbf{E}(M(s)|\mathcal{F}_t) \to \mathbf{E}(M(\infty)|\mathcal{F}_t)$, gdy $s \to \infty$, $s > t$. Zatem $M(t)$, $0 \leqslant t \leqslant \infty$ tworzą martyngał ciągły taki, że $\sup_{t\leqslant\infty} \mathbf{E}M^2(t) < \infty$.

Uwaga 1 *Przez $\mathcal{M}^{2,c}$, będziemy oznaczać ogólnie martyngały ciągłe takie, że $\mathbf{E}M^2(t) < \infty$ dla każdego $t < \infty$.*

Definicja 2 *Powiemy, że dwa procesy $X(t)$ i $Y(t)$, $t \in [0, T]$ są nieodróżnialne, jeśli*

$$\mathbf{P}(X(t) = Y(t) \;\; \text{dla } t \in [0, T]) = 1.$$

Uwaga 2 *W przestrzeni $\mathcal{M}_T^{2,c}$ identyfikujemy procesy nieodróżnialne.*

Stwierdzenie 1 *Przestrzeń $\mathcal{M}_T^{2,c}$ jest przestrzenią Hilberta z iloczynem skalarnym*

$$(M, N) = (M, N)_T = \mathbf{E}M(T)N(T).$$

Dowód. Zauważmy, że

1. Przestrzeń $\mathcal{M}_T^{2,c}$ jest liniowa.

2. (M, N) jest iloczynem skalarnym, który istotnie definiuje metrykę na $\mathcal{M}_T^{2,c}$. Wystarczy sprawdzić, że $(M, M) = 0$ daje $M = 0$. Tak jest gdyż $0 = (M, M) = \mathbf{E}M^2(T)$. Z nierówności Dooba dostajemy $\mathbf{E}\sup_{t\leqslant T} M^2(t) = 0$, a to znaczy, że proces M jest nieodróżnialny od 0.

3. Rzecz jasna $\|M\|^2 = (M, M)$ wprowadza metrykę $\|\cdot\|$ na przestrzeni $\mathcal{M}_T^{2,c}$. Udowodnimy zupełność $\mathcal{M}_T^{2,c}$ w tej metryce. Niech M_n będzie ciągiem martyngałów spełniających warunek Cauchy'ego (zachodzi $M_n(t) = \mathbf{E}(M(T)|\mathcal{F}_t)$). Ponieważ

$$\|M_n - M_m\| = \mathbf{E}(M_n(T) - M_m(T))^2 \to 0, \text{ gdy } m, n \to \infty,$$

więc z zupełności $L^2(\Omega)$ wynika, że istnieje $M(T)$ takie, że $M_n(T) \to M(T)$ w $L^2(\Omega)$. Ponadto z nierówności Dooba

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\sup_{t\leqslant T}(M_n(t) - M_m(t))^2 &\leqslant 4\sup_{t\leqslant T}\mathbf{E}(M_n(t) - M_m(t))^2 = \\ &= 4\mathbf{E}(M_n(T) - M_m(T))^2 \to 0, \text{ gdy } m, n \to \infty.\end{aligned}$$

Czyli przechodząc do podciągu (n_k) (żeby mieć zbieżność p.n.) dostajemy

$$\mathbf{P}(\sup_{t\leqslant T}(M_{n_k}(t) - M_{n_l}(t))^2 \to 0,\ l, k \to \infty) = 1.$$

Zatem M_{n_k} jest z $\mathbf{P} = 1$ zbieżny jednostajnie na odcinku $[0, T]$ $(k \to \infty)$. Konsekwentnie M_{n_k} jest zbieżny do pewnego procesu ciągłego M. Ponieważ

$$M(t) \leftarrow M_{n_k}(t) = \mathbf{E}(M_{n_k}(T)|\mathcal{F}_t) \to \mathbf{E}(M_T|\mathcal{F}_t),$$

gdzie zbieżność po lewej stronie jest p.n., a po prawej w $L^2(\Omega)$. Stąd dostajemy, że $M_n \to M$ w $\mathcal{M}_T^{2,c}$

■

Wniosek 1 *Przestrzeń $\mathcal{M}_T^{2,c}$ jest izometryczna z domkniętą podprzestrzenią $L^2(\Omega)$.*

Definicja 3 *Przez $\mathcal{E}$ oznaczamy klasę procesów elementarnych, to znaczy procesów postaci*

$$X(t) = \xi_0 1_0 + \sum_{j=1}^{m-1} \xi_j 1_{(t_j, t_{j+1}]},$$

gdzie $0 = t_0 \leqslant t_1 < t_2 < ... < t_m$, ξ_j *jest* $\mathcal{F}_{t_j}$ *mierzalne.*

Zauważmy, że $\mathcal{E}$ jest przestrzenią liniową.

Niech W będzie procesem Wienera względem filtracji $(\mathcal{F}_t)$ (filtracji zupełnej, wyznaczonej przez proces). Zauważmy, że $W(t) - W(s)$ jest niezależnym procesem od $\mathcal{F}_s$.

Definicja 4 *Dla* $X \in \mathcal{E}$ *definiujemy proces*

$$I(X) = I(X)(t) = \int_0^t X dW := \sum_{j=1}^{m-1} \xi_j (W(t_{j+1} \wedge t) - W(t_j \wedge t)).$$

Zauważmy, że $I(X)$ nie zależy od reprezentacji X.

Rozdział 2

Całka stochastyczna Ito

2.1 Całka Ito jako izometria liniowa

W tym rozdziale zdefiniujemy całkę stochastyczną Ito.

Twierdzenie 1 *Dla każdego $X \in \mathcal{E}$, proces $I(X) \in \mathcal{M}_T^{2,c}$, $I(X)(0) = 0$, a ponadto*

$$\|I(X)\|_T^2 = \mathbf{E}(\int_0^T X(s)dW(s))^2 = \mathbf{E}\int_0^T X^2(s)ds.$$

Dowód. Ponieważ $X \in \mathcal{E}$, więc dla pewnego ciągu $0 = t_0 \leqslant t_1 < t_2 < ... < t_m$

$$X(t) = \xi_0 1_{\{0\}} + \sum_{j=1}^{m-1} \xi_j 1_{(t_j,t_{j+1}]},$$

gdzie, ξ_j są $\mathcal{F}_{t_j}$ mierzalne. Z definicji

$$I(X)(t) = \sum_{j=1}^{m-1} \xi_j (W(t_{j+1} \wedge t) - W(t_j \wedge t)).$$

Jest jasne, że $I(X)(0) = 0$. Po drugie jest oczywiste (z definicji), że $I(X)(t) \in L^2(\Omega)$. Po trzecie trajektorie procesu $I(X)$ są ciągłe. Istotnie wystarczy zauważyć, że funkcje

$$t \to (W(t_{j+1} \wedge t) - W(t_j \wedge t)), \quad t \in (t_j, t_{j+1}]$$

są ciągłe, co wynika z ciągłości trajektorii procesu Wienera.

Pozostaje pokazać, że proces $I(X)$ jest martyngałem. Zauważmy zatem, że $I(X)(t)$ $t \in [0, T]$ jest adaptowalny do filtracji $(\mathcal{F}_t)$. Pokażemy, że

$$\mathbf{E}(I(X)(t)|\mathcal{F}_s) = I(X)(s), \quad \text{dla } t_k \leqslant s < t \leqslant t_{k+1}, \quad k \in \{0, 1, ..., m-1\}. \tag{2.1}$$

Powyższa równość łatwo wynika z definicji

$$\mathbf{E}(I(X)(t) - I(X)(s)|\mathcal{F}_s) = \mathbf{E}(\xi_k(W(t) - W(s))|\mathcal{F}_s) = \xi_k\mathbf{E}(W(t) - W(s)|\mathcal{F}_s) = 0.$$

W istocie to wystarcza do udowodnienia, że

$$\mathbf{E}(I(X)(t)|\mathcal{F}_s) = I(X)(s), \ \ \text{dla}0 \leqslant s < t \leqslant T.$$

Przypuśćmy, że $s \in (t_l, t_{l+1}]$, $t \in (t_k, t_{k+1}]$, $l < k$, to

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}(I(X)(t)|\mathcal{F}_s) = \mathbf{E}(\mathbf{E}(I(X)(t)|\mathcal{F}_{t_k})|\mathcal{F}_s) = \mathbf{E}(I(X)(t_k)|\mathcal{F}_s) = \\
&= \mathbf{E}(\mathbf{E}(I(X)(t_k)|F_{t_{k-1}})|\mathcal{F}_s) = \mathbf{E}(I(X)(t_{k-1})|\mathcal{F}_s) = ... = \\
&= \mathbf{E}(I(X)(t_{l+1})|\mathcal{F}_s) = I(X)(s).
\end{aligned}$$

Za każdym razem korzystaliśmy wyłącznie z równości (2.1).

Pozostaje jeszcze udowodnić wzór

$$\|I(X)\| = \mathbf{E}I(X)^2(t) = \mathbf{E}\int_0^T X^2(s)ds.$$

Skorzystamy z następującej równości.

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}I(X)^2(T) = \sum_{k=1}^{m-1}\mathbf{E}(\xi_k^2(W(t_{k+1}) - W(t_k))) + \\
&+2\sum_{l<k}\mathbf{E}(\xi_l\xi_k(W(t_{l+1}) - W(t_l))(W(t_{k+1}) - W(t_k))).
\end{aligned}$$

Niech

$$\begin{aligned}
A &:= \sum_{k=1}^{m-1}\mathbf{E}(\xi_k^2(W(t_{k+1}) - W(t_k))^2). \\
B &:= 2\sum_{l<k}\mathbf{E}(\xi_l\xi_k(W(t_{l+1}) - W(t_l))(W(t_{k+1}) - W(t_k))).
\end{aligned}$$

Zauważmy, że

$$\begin{aligned}
B &= 2\sum_{l<k}\mathbf{E}(\mathbf{E}(\xi_l\xi_k(W(t_{l+1}) - W(t_l))(W(t_{k+1}) - W(t_k))|\mathcal{F}_{t_k})) = \\
&= 2\sum_{l<k}\mathbf{E}(\xi_k\xi_k(W(t_{l+1}) - W(t_l))\mathbf{E}((W(t_{k+1}) - W(t_k))|\mathcal{F}_{t_k})) = 0
\end{aligned}$$

Ostatnia równość wynika z faktu, że $\mathbf{E}((W(t_{k+1}) - W(t_k))|\mathcal{F}_{t_k}) = 0$ (bo W jest martyngałem). Wystarczy obliczyć A. Przypomnijmy, że $W(t)$ i $W^2(t) - t$ są martyngałami, stąd

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}((W(t_{k+1}) - W(t_k))^2|\mathcal{F}_{t_k}) = \mathbf{E}(W^2(t_{k+1})|\mathcal{F}_{t_k}) - 2W(t_k)\mathbf{E}(W(t_{k+1})|\mathcal{F}_{t_k}) + \\
&+W^2(t_k) = \mathbf{E}(W^2(t_{k+1}) - t_{k+1}|\mathcal{F}_{t_k}) + t_{k+1} - W^2(t_k) = t_{k+1} - t_k.
\end{aligned}$$

Zatem

$$A = \sum_{k=1}^{m-1} \mathbf{E}(\xi_k^2(W(t_{k+1}) - W(t_k))^2) = \sum_{k=1}^{m-1} \mathbf{E}(\mathbf{E}(\xi_k^2(W(t_{k+1}) - W(t_k))^2 | \mathcal{F}_{t_k})) =$$
$$= \sum_{k=1}^{m-1} \mathbf{E}(\xi_k^2 \mathbf{E}((W(t_{k+1}) - W(t_k))^2 | \mathcal{F}_{t_k})) = \mathbf{E}(\sum_{k=1}^{m-1} \xi_k^2(t_{k+1} - t_k)) = \mathbf{E} \int_0^T X^2(s)ds.$$

To kończy dowód.

■

Uwaga 3 *Łatwo zauważyć, że I jest przekształceniem liniowym z $\mathcal{E}$ w $\mathcal{M}_T^{2,c}$. Co więcej, jeśli potraktować $\mathcal{E}$ jako liniową podprzestrzeń*

$$L_T^2 := L^2([0,T] \times \Omega, \mathcal{B}([0,T]) \otimes \mathcal{F}, |\cdot| \otimes \mathcal{F}),$$

to I jest liniową izometrią (bo $\|I(X)\| = \|X\|_{L_T^2}^2$).

Ogólnie całkę stochastyczną otrzymamy przechodząc do domknięcia $\mathcal{E}$. Warto zwrócić uwagę, że każda izometria liniowa I z podprzestrzeni L_T^2 w $\mathcal{M}_T^{2,c}$ (przestrzeń Banacha) ma jednoznaczne rozszerzenie na domknięcie $\overline{\mathcal{E}}$ przestrzeni $\mathcal{E}$ w L_T^2.

Definicja 5 *Rozszerzenie I na domknięcie $\overline{\mathcal{E}}$ w L_T^2 nazywamy całką stochastyczną Ito i oznaczamy*

$$I(X)(t) = \int_0^t X(s)dW(s) = \int_0^t XdW.$$

Uwaga 4 *Dla każdego $X \in \overline{\mathcal{E}}$, zachodzi $I(X) \in \mathcal{M}_T^{2,c}$. Ponadto I jest izometrią liniową, to znaczy I jest liniowe i zachodzi wzór*

$$\|I(X)\|^2 = \mathbf{E}(\int_0^T X(s)dW(s))^2 = \mathbf{E} \int_0^T X^2(s)ds.$$

2.2 Opis procesów z klasy $\overline{\mathcal{E}}$.

Definicja 6 *Przez $\mathcal{P}$ będziemy oznaczać σ-ciało zbiorów prognozowalnych, to znaczy σ-ciało podzbiorów $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ generowane przez*

$$\{\{0\} \times A,\ A \in \mathcal{F}_0\} \cup \{(s,t] \times A,\ s < t,\ A \in \mathcal{F}_s\}.$$

Proces X będziemy nazywać prognozowalnym, gdy jest mierzalny względem $\mathcal{P}$ jako funkcja $[0,T] \times \Omega \ni (t,\omega) \to X(t,\omega)$.

Uwaga 5 *Każdy proces prognozowalny jest progresywnie mierzalny.*

Stwierdzenie 2 *Jeśli X jest procesem adaptowalnym, lewostronnie ciągłym, to jest procesem prognozowalnym.*

Dowód. Niech $(t_j^n)_n$ będzie ciągiem podziałów normalnych, to znaczy

$$t < T, \quad 0 = t_0^n < ... < t_m^n = T, \quad \max_j (t_j^n - t_{j-1}^n) \to 0 \text{ gdy } n \to \infty.$$

Definiujemy

$$X_n(t) := X(0)1_{\{0\}}(t) + \sum_{k=1}^{m_n - 1} X(t_k^n) 1_{(t_k^n, t_{k+1}^n]}(t).$$

Z lewostronnej ciągłości wynika, że $X_n(t) \to X(t)$ dla każdego t, dla prawie wszystkich $\omega \in \Omega$. Co więcej procesy X_n są prognozowalne bo są skończonymi sumami procesów progonozwalnych. W istocie Wystarczy zauważyć, że prognozowalne są procesy

$$X(0)1_{\{0\}}, \quad X(t_k^n) 1_{(t_k^n, t_{k+1}^n]}.$$

To z kolei wynika z definicji σ-ciała $\mathcal{P}$

$$\begin{aligned} &\{(t, \omega) : \ X(0)1_{\{0\}} \leqslant a\} = \{0\} \times \{X(0) \leqslant a\} \in \mathcal{P} \\ &\{(t, \omega) : \ X(t_k^n) 1_{(t_k^n, t_{k+1}^n]} \leqslant a\} = (t_k^n, t_{k+1}^n] \times \{X(t_k^n) \leqslant a\} \in \mathcal{P}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

■

Stwierdzenie 3 *Zachodzi równość $\overline{\mathcal{E}} = L^2([0, T] \times \Omega, \mathcal{P}, |\cdot| \otimes \mathbf{P})$.*

Dowód. Zauważmy, że po pierwsze każdy proces z klasy $\overline{\mathcal{E}}$ jest prognozowalny, bo jest granicą według $|\cdot| \otimes \mathbf{P}$ procesów prognozowalnych (a więc granicą p.n. dla pewnego podciągu). Wynika to z faktu, że zbieżność w L^2 implikuje zbieżność według prawdopodobieństwa (ogólnie miary).

Wystarczy pokazać, że procesy z $\mathcal{E}$ są gęste w klasie $L^2([0, T] \times \Omega, \mathcal{P}, |\cdot| \otimes \mathbf{P})$. Jest jasne, że gęste w tej klasie są sumy postaci

$$X := \sum_{k=1}^{m} a_i 1_{\Gamma_i}, \quad \text{gdzie } a_i \in \mathbb{R}, \ \Gamma_i \in \mathcal{P}.$$

Wystarczy udowodnić, że $1_{\Gamma_i} \in \overline{\mathcal{E}}$. Ten fakt dostajemy z lematu o $\pi - \lambda$ układach. Zwróćmy uwagę, że klasa $\mathcal{A}$ zbiorów Γ dla których $1_\Gamma \in \overline{\mathcal{E}}$ zawiera π-układ $\mathcal{B}$ złożony ze zbiorów

$$\Gamma = \{0\} \times A \ \ A \in \mathcal{F}_0, \ \ \Gamma := (s, t] \times A \ \ A \in \mathcal{F}_s.$$

Z definicji 1_Γ dla takich zbiorów należy do $\mathcal{E} \subset \overline{\mathcal{E}}$. Wystarczy pokazać, że klasa $\mathcal{A}$ jest λ-układem (na ćwiczenia).

$\blacksquare$

Wniosek 2 *Jeśli X jest procesem prognozowalnym takim, że $\mathbf{E}\int_0^T X^2(s)ds < \infty$, to całka Ito $\int XdW$ jest dobrze określona. Klasę takich procesów oznaczamy przez $\mathcal{L}_T^2$.*

Uwaga 6 *Można pokazać, że $\int XdW$ jest dobrze określone dla każdego X progresywnie mierzalnego takiego, że $\mathbf{E}\int_0^T X^2(s)ds < \infty$, a nawet dla procesu nieantycypującego, to znaczy adaptowalnego, mierzalnego i spełniającego warunek $\mathbf{E}\int_0^T X^2(s)ds < \infty$ (patrz książka Karatzas-Shreve).*

Uwaga 7 *Niech $X \in \mathcal{L}_T^2$, wówczas $1_{[0,t]}X \in \mathcal{L}_T^2$, dla $t \leqslant T$. Ponadto*

$$\int_0^T 1_{[0,t]}X(s)dW(s) = \int_0^t X(s)dW(s)$$

oraz $\mathbf{E}(\int_0^t X(s)dW(s))^2 = \mathbf{E}\int_0^t X^2(s)ds$

Dowód. Ustalmy $t < T$. Istnieje ciąg procesów $X_n \in \mathcal{E}$ takich, że $X_n \to X$ w $\mathcal{L}_T^2$. Jest jasne, że $1_{[0,t]}X_n \in \mathcal{E}$. Pokażemy, że

$$1_{[0,t]}X_n \to 1_{[0,t]}X \text{ w } \mathcal{L}_T^2.$$

Istotnie

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}\int_0^T (1_{[0,t]}(s)X_n(s) - 1_{[0,t]}(s)X(s))^2 = \mathbf{E}\int_0^t (X_n(s) - X(s))^2 ds \leqslant \\ &\leqslant \mathbf{E}\int_0^T (X_n(s) - X(s))^2 ds \to 0 \text{ gdy } n \to \infty. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Pozostała część tezy jest oczywista.

$\blacksquare$

Rozdział 3

Zatrzymywanie całek stochastycznych

Twierdzenie 2 (o zatrzymywaniu całki stochastycznej) *Jeśli $X \in \mathcal{L}^2_T$, natomiast $\tau \leq T$ jest momentem zatrzymania, to $\mathbf{1}_{[\mathbf{0},\tau]}X \in \mathcal{L}^2_T$ oraz dla każdego $t \in [0,t]$*

$$\int_0^t \mathbf{1}_{[\mathbf{0},\tau]}(s)X_s dW_s = \int_0^{t\wedge\tau} X_s dW_s \ p.n. \tag{3.1}$$

Uwaga Ponieważ oba procesy występujące w (3.1) mają ciągłe trajektorie, z ich równości dla każdego t wynika natychmiast nieodróżnialność.

Dowód.

Proces $\mathbf{1}_{[\mathbf{0},\tau]}$ jest prognozowalny, bo jest lewostronnie ciągły i adaptowany (łatwe). Zatem $\mathbf{1}_{[\mathbf{0},\tau]}X$ też jest prognozowalny. Ponadto

$$\mathbf{E}\int_0^T (\mathbf{1}_{[\mathbf{0},\tau]}(s)X_s)^2 ds \leq \int_0^T X_s^2 ds < \infty.$$

Stąd $\mathbf{1}_{[\mathbf{0},\tau]}X \in \mathcal{L}^2_T$.

Dalsza część dowodu przebiega standardową metodą, polegającą na udowodnieniu twierdzenia najpierw dla τ przyjmującego tylko skończenie wiele wartości oraz $X \in \mathcal{E}$ ($\mathcal{E}$ – procesy elementarne), a następnie rozszerzeniu tezy na przypadek ogólny poprzez prostą aproksymację.

a) Jeżeli τ przyjmuje tylko skończenie wiele wartości oraz $X \in \mathcal{E}$, możemy bez straty ogólności założyć, że

$$X_t = \xi_0 \mathbf{1}_{\{\mathbf{0}\}}(t) + \sum_{k=1}^{m-1} \xi_k \mathbf{1}_{(\mathbf{t_k},\mathbf{t_{k+1}}]}(t)$$
$$\tau \in \{t_1, \ldots, t_k\},$$

dla pewnych liczb $0 \leq t_1 < \ldots < t_k \leq T$.

Wprowadzając dodatkowe oznaczenie $t_0 = 0$, otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\mathbf{1}_{[\mathbf{0},\tau]}(t) &= \mathbf{1}_{\{\mathbf{0}\}}(t) + \sum_{k=1}^{m} \mathbf{1}_{\{\tau=\mathbf{t_k}\}}\mathbf{1}_{(\mathbf{0},\mathbf{t_k}]}(t) = \mathbf{1}_{\{\mathbf{0}\}}(t) + \sum_{k=1}^{m} \mathbf{1}_{\{\tau=\mathbf{t_k}\}} \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{1}_{(\mathbf{t_j},\mathbf{t_{j+1}}]}(t) \\
&= \mathbf{1}_{\{\mathbf{0}\}}(t) + \sum_{j=0}^{m-1} \mathbf{1}_{(\mathbf{t_j},\mathbf{t_{j+1}}]}(t) \sum_{k=j+1}^{m} \mathbf{1}_{\{\tau=\mathbf{t_k}\}} \\
&= \mathbf{1}_{\{\mathbf{0}\}}(t) + \sum_{j=0}^{m-1} \mathbf{1}_{\{\tau>\mathbf{t_j}\}}\mathbf{1}_{(\mathbf{t_j},\mathbf{t_{j+1}}]}(t).
\end{aligned}$$

Zatem

$$\mathbf{1}_{[\mathbf{0},\tau]}(t)X_t = \xi_0\mathbf{1}_{\{\mathbf{0}\}}(t) + \sum_{j=1}^{m-1} \xi_j\mathbf{1}_{\{\tau>\mathbf{t_j}\}}\mathbf{1}_{(\mathbf{t_j},\mathbf{t_{j+1}}]}(t). \tag{3.2}$$

Ponieważ $\xi_j\mathbf{1}_{\{\tau>\mathbf{t_j}\}}$ jest $\mathcal{F}_{t_j}$ mierzalną i ograniczoną zmienną losową, powyższa równość pokazuje, że $\mathbf{1}_{[\mathbf{0},\tau]}X \in \mathcal{E}$ oraz pozwala policzyć wprost z definicji całkę stochastyczną tego procesu. Dokładniej

$$\begin{aligned}
\int_0^t \mathbf{1}_{[\mathbf{0},\tau]}(s)X_s dW_s &= \sum_{j=1}^{m-1} \xi_j\mathbf{1}_{\{\tau>\mathbf{t_j}\}}(W_{t_{j+1}\wedge t} - W_{t_j\wedge t}) = \sum_{j=1}^{m-1}\sum_{k=j+1}^{m} \xi_j\mathbf{1}_{\{\tau=\mathbf{t_k}\}}(W_{t_{j+1}\wedge t} - W_{t_j\wedge t}) \\
&= \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{k-1} \mathbf{1}_{\{\tau=\mathbf{t_k}\}}\xi_j(W_{t_{j+1}\wedge t} - W_{t_j\wedge t}) \\
&= \sum_{k=1}^{m} \mathbf{1}_{\{\tau=\mathbf{t_k}\}}\sum_{j=1}^{k-1} \xi_j(W_{t_{j+1}\wedge t} - W_{t_j\wedge t}) \\
&= \sum_{k=1}^{m} \mathbf{1}_{\{\tau=\mathbf{t_k}\}}\int_0^{t\wedge t_k} X_s dW_s = \int_0^{\tau\wedge t} X_s dW_s,
\end{aligned} \tag{3.3}$$

co kończy dowód w najprostszym przypadku.

Uwaga Powyższe rachunki są dość formalne i sprowadzają się do zmiany kolejności sumowania. Tak naprawdę równość (3.2) można dość łatwo sprawdzić na rysunku, przedstawiając symbolicznie zbiór $[0,T]\times\Omega$, dzieląc oś czasu na przedziały $(t_j, t_{j+1}]$ (na których X jest przy ustalonej ω stały, równy $\xi_j(\omega)$) i patrząc, co się „wyzeruje" po wymnożeniu przez $\mathbf{1}_{[\mathbf{0},\tau]}$. Podobnie równość (3.3) można otrzymać, patrząc które części w sumie definiującej całkę się „wyzerują" dla $\tau = t_k$. Jest to oczywiście w gruncie rzeczy to samo rozumowanie co zapisane powyżej, ale chyba bardziej pokazuje co się dzieje niż formalne napisy.

b) W kolejnym kroku udowodnimy tezę dla τ – dowolnego momentu zatrzymania, ciągle przy założeniu, że $X \in \mathcal{E}$.

W standardowy sposób konstruujemy ciąg τ_n momentów zatrzymania, przyjmujących tylko skończenie wiele wartości, takich że $\tau_n \searrow \tau$. Z ciągłości trajektorii całek stochastycznych, mamy

$$\int_0^{\tau_n \wedge t} X_s dWs \to \int_0^{\tau \wedge t} X_s dW_s \text{ p.n.}$$

Aby uzyskać tezę, wystarczy więc pokazać, że $\int_0^t \mathbf{1}_{[\mathbf{0},\tau_\mathbf{n}]}(s) X_s dW_s \to \int_0^t \mathbf{1}_{[\mathbf{0},\tau]}(s) X_s dW_s$ w $L^2(\Omega)$. Udowodnimy więcej, mianowicie zbieżność $\int \mathbf{1}_{[\mathbf{0},\tau_\mathbf{n}]} X dW \to \int \mathbf{1}_{[\mathbf{0},\tau]} X dW$ w przestrzeni $\mathcal{M}_T^{2,c}$. Ponieważ całka Ito jest izometrią między $\mathcal{L}_T^2$ i $\mathcal{M}_T^{2,c}$, wystarczy pokazać zbieżność $\mathbf{1}_{[\mathbf{0},\tau_\mathbf{n}]} X \to \mathbf{1}_{[\mathbf{0},\tau]} X$ w $\mathcal{L}_T^2$. To jednak jest proste

$$\begin{aligned}\|\mathbf{1}_{[\mathbf{0},\tau_\mathbf{n}]} X - \mathbf{1}_{[\mathbf{0},\tau]} X\|_{\mathcal{L}_T^2}^2 &= \mathbf{E} \int_0^T (\mathbf{1}_{[\mathbf{0},\tau_\mathbf{n}]}(s) X_s - \mathbf{1}_{[\mathbf{0},\tau]}(s) X_s)^2 ds \\ &= \mathbf{E} \int_0^T \mathbf{1}_{(\tau,\tau_\mathbf{n}]}(s) X_s^2 ds \to 0,\end{aligned}$$

z twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej.

c) W ostatnim kroku udowodnimy twierdzenie dla dowolnych τ, X. Niech $X_n \in \mathcal{E}$, $X_n \to X$ w $\mathcal{L}_T^2$. Wówczas, jak łatwo sprawdzić, również $\int_{[0,\tau]} X_n \to \mathbf{1}_{[\mathbf{0},\tau]} X$ w $\mathcal{L}_T^2$, skąd dostajemy $\int_0^t \mathbf{1}_{[\mathbf{0},\tau]}(s) X_n(s) dW_s \to \int_0^t \mathbf{1}_{[\mathbf{0},\tau]}(s) X dW_s$ w $L^2(\Omega)$ (argumentujemy jak w punkcie b)). Wystarczy zatem pokazać, że $\int_0^{\tau \wedge t} X_n(s) dW_s \to \int_0^{\tau \wedge t} X_s dW_s$, również w $L^2(\Omega)$. Ale

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\int_0^{\tau \wedge t} X_n(s) dW_s - \int_0^{\tau \wedge t} X_s dW_s)^2 &\le \mathbf{E}(\int_0^T X_n(s) dW_s - \int_0^T X_s dW_s)^2 \\ &= \|X - X_n\|_{\mathcal{L}_T^2}^2 \to 0,\end{aligned}$$

gdzie nierówność wynika z Twierdzenia Dooba (zastosowanego do ciągłego podmartyngału $(\int (X - X_n) dW)^2$ oraz ograniczonego momentu stopu $\tau \wedge t$) zaś równość, znów z faktu, że całka Ito jest izometrią, między $\mathcal{L}_T^2$ oraz $\mathcal{M}_T^{2,c}$.

■

Wniosek 3 *Niech $X \in \mathcal{L}_T^2$. Wówczas proces*

$$M(t) = \big(\int_0^t X(s) dW(s)\big)^2 - \int_0^t X(s)^2 ds$$

jest martyngałem

Dowód. Wystarczy pokazać, że dla każdego ograniczonego momentu zatrzymania τ, $\mathbf{E}M_\tau = 0$. Ale z Twierdzenia o zatrzymywaniu całki stochastycznej

$$M_\tau = \big(\int_0^\tau X(s)dW(s))^2 - \int_0^\tau X(s)^2 ds = \big(\int_0^T X(s)\mathbf{1}_{[\mathbf{0},\tau]}(s)dW(s)\big)^2 - \int_0^T X(s)^2\mathbf{1}_{[\mathbf{0},\tau]}(s)ds,$$

zatem rzeczywiście

$$\mathbf{E}M_\tau = \mathbf{E}\big(\int_0^T X(s)\mathbf{1}_{[\mathbf{0},\tau]}(s)dW(s)\big)^2 - \mathbf{E}\int_0^T X(s)^2\mathbf{1}_{[\mathbf{0},\tau]}(s)ds = 0,$$

gdzie ostatnia równość wynika z faktu, że całka stochastyczna jest izometrią między $\mathcal{L}_T^2$ oraz $\mathcal{M}_T^{2,c}$.

■

Twierdzenie o zatrzymywaniu całki stochastycznej pozwoli nam na rozszerzenie definicji całki stochastycznej na szerszą klasę procesów niż $\mathcal{L}_T^2$.

Definicja 7 *Niech*

$$\Lambda_T^2 = \{(X(t))_{t\in[0,T)} \colon X - \text{ prognozowalny }, \forall_{t<T} \int_0^t X_s^2 ds < \infty \text{ p.n.}\}$$

Oczywiście $\mathcal{L}_T^2 \subsetneq \Lambda_T^2$. Chcielibyśmy zdefiniować $\int X(s)dW(s)$ dla $X \in \Lambda_T^2$, tak aby „nowa" całka stanowiła rozszerzenie całki Itô. W tym celu dla $X \in |Lambda_T^2$, wprowadźmy ciąg momentów stopu

$$\tau_n = \inf\{t < T \colon \int_0^t X(s)^2 ds \geq n\}, \tag{3.4}$$

gdzie jak zwykle przyjmujemy konwencję $\inf\emptyset = T$. Z definicji Λ_T^2, otrzymujemy natychmiast $\tau_n \nearrow T$ p.n. Ponadto dla dowolnego n, $\mathbf{1}_{[\mathbf{0},\tau_\mathbf{n}]}X \in \mathcal{L}_T^2$, zatem możemy zdefiniować proces

$$M_n(t) = \int_0^t \mathbf{1}_{[\mathbf{0},\tau_\mathbf{n}]}X dW,$$

jako całkę stochastyczną w sensie Itô).

Zachodzi następujący

Lemat 1 *Dla $m \geq n$ oraz $t \leq \tau_n$*

$$M_n(t) = M_m(t),$$

czyli (wobec ciągłości trajektorii) procesy $M_m^{\tau_n}$ oraz M_n są nierozróżnialne.

Dowód. Z twierdzenia o zatrzymywaniu całki stochastycznej oraz nierówności $\tau_n \le \tau_m$ p.n., mamy

$$M_m(\tau_n \wedge t) = \int_0^{t\wedge\tau_n} \mathbf{1}_{[\mathbf{0},\tau_\mathbf{m}]}(s)X(s)dW(s) = \int_0^t \mathbf{1}_{[\mathbf{0},\tau_\mathbf{n}]}(s)\mathbf{1}_{[\mathbf{0},\tau_\mathbf{m}]}(s)X(s)dW(s)$$
$$= \int_0^t \mathbf{1}_{[\mathbf{0},\tau_\mathbf{n}]}(s)X(s)dW(s) = M_n(t).$$

■

Zatem, dla pewnego zbioru $\tilde{\Omega} \subseteq \Omega$ o prawdopodobieństwie 1, dla ustalonych wartości $\omega \in \tilde{\Omega}, t < T$, ciąg $M_n(\omega, t)$ stabilizuje się, tzn. dla $n, m \ge n_0(w, t)$, $M_m(\omega, t) = M_n(\omega, t)$. Pozwala nam to wprowadzić następującą definicję

Definicja 8 *Jedyny (modulo nieodróżnialność) proces $(M(t))_{t\in[0,T)}$, taki że dla każdego $n \in \mathbb{N}$*

$$\int \mathbf{1}_{[\mathbf{0},\tau_\mathbf{n}]}(s)X(s)dW(s) = M^{\tau_n},$$

gdzie wyrażenie po lewej stronie oznacza całkę Itô, nazywamy całką stochastyczną procesu X i oznaczamy

$$M(t) = \int_0^t X(s)dW(s) = \int_0^t XdW.$$

Własności całki stochastycznej

1. M nie zależy od ciągu definiującego τ_n, tzn. gdybyśmy zamiast ciągu τ_n zdefiniowanego wzorem (3.4), użyli w definicji innego ciągu momentów zatrzymania τ_n', takiego że $\tau_n' \nearrow \tau$ oraz $X\mathbf{1}_{[\mathbf{0},\tau_\mathbf{n}']} \in \mathcal{L}_T^2$ (są to jedyne własności, z których korzystaliśmy, konstruując całkę $\int XdW$), w wyniku dostalibyśmy ten sam proces.

2. $\int_0^0 XdW = 0$, ponadto $\int XdW$ ma ciągłe trajektorie (wynika to bezpośrednio z konstrukcji, gdzie całkę stochastyczną otrzymaliśmy poprzez sklejanie procesów ciągłych).

3. Istnieje ciąg momentów zatrzymania $\tau_n \nearrow \tau$, taki że dla każdego $n \in \mathbb{N}$, $(\int XdW)^{\tau_n} \in \mathcal{M}_T^{2,c}$ (co również wynika bezpośrednio z konstrukcji). Własność ta jest ważna i zostanie wraz z konsekwencjami dokładniej przedyskutowana w dalszej części wykładu (patrz Def. 9)

4. Zachodzi analog Twierdzenia 2, tzn. jeśli $X \in \Lambda_T^2$ oraz $\tau \le T$ jest momentem stopu, to również $X\mathbf{1}_{[\mathbf{0},\tau]} \in \Lambda_T^2$ oraz

$$\int_0^{t\wedge\tau} XdW = \int \mathbf{1}_{[\mathbf{0},\tau]} XdW.$$

5. Przekształcenie $\Lambda_T^2 \ni X \mapsto \int XdW$ jest liniowe.

6. Zachodzi *nierówność Dooba*, tzn. dla dowolnego momentu zatrzymania $\tau \leq T$

$$\mathbf{E}(\sup_{t<\tau}(\int_0^t X(s)dW(s))^2) \leq 4\mathbf{E}\int_0^\tau X_s^2 ds$$

Przyjrzyjmy się teraz bliżej własności 3), która ukazuje istotną różnicę między całką izometryczną Ito, a jej rozszerzeniem na Λ_T^2. Całka Ito jest z definicji ciągłym martyngałem, własność 3) jest więc dla niej oczywista, momenty zatrzymania τ_n mogą być wręcz deterministyczne. Okazuje się, że dla $X \in \Lambda_T^2$, proces $M = \int XdW$ nie musi być martyngałem (może się wręcz zdarzyć, że $\mathbf{E}|M_t| = \infty$), niemniej może być w pewnym sensie przybliżany przez martyngały. Jest to bardzo użyteczna własność, motywująca wprowadzenie ogólniejszej definicji.

Definicja 9 *Proces adaptowany $(M_t)_{t\in[0,T)}$ nazwiemy* martyngałem lokalnym, *jeśli istnieje ciąg momentów stopu $\tau_n \nearrow T$, taki że dla każdego n, proces M^{τ_n} jest martyngałem. Ciąg τ_n nazywamy wówczas ciągiem lokalizującym M.*

Łatwo sprawdzić, że proces M jest ciągłym martyngałem lokalnym, wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje ciąg momentów zatrzymania jak w Definicji 9, o tej własności, że dla każdego n, proces M^{τ_n} jest ciągłym martyngałem. Co więcej, dla każdego ciągłego martyngału lokalnego istnieje ciąg $\tau_n \nearrow T$, taki że $M^{\tau_n} \in \mathcal{M}^{2,c}$.

Własność 3) oznacza więc, że całka stochastyczna jest martyngałem lokalnym. Przy pewnych dodatkowych założeniach możemy jednak wnioskować, że całka stochastyczna jest martyngałem, o czym mówi następujące

Twierdzenie 3 *Jeśli dla każdego $t < T$, $\mathbf{E}\int_0^t X(s)^2 ds < \infty$, to $M = \int XdW$ jest martyngałem.*

Dowód. W definicji martyngału rozpatrujemy jedynie pary $M(t_1), M(t_2)$, przy $t_1, t_2 < T$, a nasze założenia mówią, że na odcinkach $[0,t], t < T$, proces M może być zdefiniowany jako całka Ito, więc jest martyngałem.

■

Na zakończenie rozdziału podamy jeszcze kilka własności martyngałów lokalnych, których udowodnienie pozostawimy jako ćwiczenie.

Twierdzenie 4 *Każdy ciągły i ograniczony martyngał lokalny jest martyngałem, zaś każdy ciągły, nieujemny martyngał lokalny jest nadmartyngałem.*

Rozdział 4

Całkowanie przez części

4.1 Proces wariacji kwadratowej

Uwaga 8 *Można powtórzyć całą poprzednią dyskusję (teoria całki), biorąc zamiast W (proces Wienera) dowolny martyngał $M \in \mathcal{M}^{2,c}$ taki, że istnieje proces $\langle M \rangle$ spełniający warunki:*

1. *adaptowalny,*
2. *ciągły, niemalejący, $\langle M \rangle(0) = 0$,*
3. *$M^2 - \langle M \rangle$ jest martyngałem.*

Pokazaliśmy na przykład, że jeśli $M = \int_0^t X dW$, to $\langle M \rangle(t) = \int_0^t X(s)^2 ds$.

Twierdzenie 5 *(Tw. Dooba-Meyera) Dla każdego $M \in \mathcal{M}^{2,c}$ istnieje proces $\langle M \rangle$ spełniający warunki 1.-4. (patrz np. książka Karatzas-Shreve).*

Definiujemy przestrzenie $\mathcal{L}_T^2(M)$ jako klasę procesów prognozowalnych, takich, że

$$\mathbf{E} \int_0^T X(s)^2 d\langle M \rangle < \infty.$$

Dla ułatwienia $\mathcal{L}_T^2 = \mathcal{L}_T^2(W)$. Podobnie $\Lambda_T^2(M)$ oznacza przestrzeń procesów prognozowalnych takich, że

$$\int_0^t X(s)^2 d\langle M \rangle < \infty, \quad p.n., \quad \text{dla } t < T.$$

Uwaga 9 *Proces $\langle M \rangle$ jest wyznaczony jednoznacznie.*

Twierdzenie 6 *Niech $M \in \mathcal{M}^{2,c}$, $t < T$, a $(t_j^n)_n$ będzie ciągiem podziałów normalnych odcinka $[0,t]$. To znaczy*

$$0 = t_0^n < t_1^n < ... < t_{m_n}^n = t$$

oraz $\max_j(t_{j+1}^n - t_j^n) \to 0$ jeśli $n \to \infty$. Definiujemy

$$V_n(M,t) = \sum_{j=0}^{m_n-1} (M(t_{j+1}^n) - M(t_j^n))^2.$$

Wówczas $\lim_{n\to\infty} V_n(M,t) = \langle M\rangle(t)$ w $L^1(\Omega)$.

Dowód. Potrzebujemy dwóch prostych faktów (na ćwiczenia).

Lemat 2 *Niech ξ_n $n = 1,2,...$ będzie ciągiem zmiennych losowych określonych na przestrzeni $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Niech zbiory $A_k \in \mathcal{F}$, $k = 1,2,...$, będą takie, że $A_k \nearrow \Omega$, a ciąg $(1_{A_k}\xi_n)_n$ zbiega według $\mathbf{P}$. Wówczas $(\xi_n)_n$ zbiega według $\mathbf{P}$.*

Lemat 3 *Jeśli $\xi_n \geqslant 0$, $\xi_n \xrightarrow{\mathbf{P}} \xi$ oraz $\mathbf{E}\xi_n = \mathbf{E}\xi < \infty$, to $\xi_n \to \xi$ w $L^1(\Omega)$.*

Można założyć, że $M(0) = 0$ zastępując M procesem $M - M(0)$. W istocie wystarczy pokazać, że $\langle M \rightarrow= \langle M - M(0)\rangle$ oraz $V_n(M,t) = V_n(M - M(0), t)$. Mamy

$$(M - M(0))^2 - \langle M\rangle = M^2 - \langle M\rangle + 2M(0)M + M^2(0).$$

Każdy z trzech składników jest martyngałem (sprawdzić!). Suma martyngałów jest martyngałem, a zatem z jednoznaczności procesu wariacji kwadratowej wynika, że $\langle M\rangle = \langle M - M(0)\rangle$. Oczywiście $V_n(M,t) = V_n(M - M(0), t)$.

(1) Załóżmy, że M jest ograniczony, $M(t,\omega) \leqslant C$, dla t, ω. Przypomnijmy, że

$$M(t)^2 = V_n(M,t) + 2\sum_{j=0}^{m_n-1} M(t_j^n)(M(t_{j+1}^n) - M(t_j)). \tag{4.1}$$

Niech $N_n(t) := \sum_{j=0}^{m_n-1} M(t_j^n)(M(t_{j+1}^n) - M(t_j^n))$. Ponadto niech

$$X_n(s) := \sum_{j=0}^{m_n-1} M(t_j^n) 1_{(t_j^n, t_{j+1}^n]}(s).$$

Oczywiście $X_n \in \mathcal{E}$. Zauważmy, że $N_n(t) = \int_0^t X_n dM$. Ponieważ $X_n \to M$ p.n. oraz w $\mathcal{L}_t^2(M)$, więc dobrze zdefiniowany jest proces $N = \int M dM$ w $\mathcal{M}_t^{2,c}$. Zauważmy, że

$$V_n(M,t) = M(t)^2 - 2N_n(t) \to M(t)^2 - 2N(t) \text{ w } L^2(\Omega).$$

Z definicji $M(t)^2 - 2N(t)$ nie zależy od wyboru ciągu podziałów. Niech $s < t$, możemy brać podziały normalne $[0, t]$ zawierające punkt s. Dla takich podziałów $V_n(M, s) \leqslant V_n(M, t)$. Stąd

$$M(s)^2 - 2N(s) \leqslant M(t)^2 - 2N(t).$$

Z ciągłości M, N wynika ciągłość $M^2 - 2N$. Zatem $M^2 - 2N$ jest ciągły , rosnący, 0 w 0. Ponieważ N jest martyngałem, więc $M^2 - (M^2 - 2N)$ jest martyngałem. Stąd $M^2 - 2N = \langle M \rangle$.

(2) Niech $M \in \mathcal{M}^{2,c}$, $\tau_n \nearrow T$ takie, że M^{τ_k} jest ograniczonym martyngałem. Na przykład $\tau_k := \inf\{t : \ |M(t)| \geqslant n\}$. Z punktu (1) wiemy

$$V_n(M^{\tau_k}, t) \to \langle M^{\tau_k} \rangle(t), \ \text{ w } L^2(\Omega).$$

Potrzebujemy następującej obserwacji (na ćwiczenia).

Lemat 4 *Zachodzi równość* $\langle M^{\tau_k} \rangle = \langle M \rangle^{\tau_k}$

Zauważmy, że dla $k \in \mathbb{N}$

$$1_{\{t \leqslant \tau_k\}} V_n(M, t) = 1_{\{t \leqslant \tau_k\}} V_n(M^{\tau_k}, t) \to 1_{\{t \leqslant \tau_k\}} \langle M^{\tau_k} \rangle(t) = 1_{\{t \leqslant \tau_k\}} \langle M \rangle(t),$$

gdzie zbieżność jest w sensie $L^2(\Omega)$, a więc i względem $\mathbf{P}$. Ponieważ, $\{t \leqslant \tau_k\} \nearrow \Omega$, więc na mocy Lematu 2 dostajemy, że $V_n(M, t) \to \langle M \rangle(t)$ względem $\mathbf{P}$.

(3) Żeby pokazać, zbieżność w $L^1(\Omega)$ potrzebujemy następującego oszacowania (na ćwiczenia).

Lemat 5 *Niech* $M, M' \in \mathcal{M}^{2,c}$, $M(0) = M'(0) = 0$. *Zachodzi nierówność*

$$\mathbf{E}|V_n(M, t) - V_n(M', t)| \leqslant \|M - M'\|^2 + 2\|M'\|\|M - M'\|.$$

Niech teraz τ_k będzie jak w (2). Z twierdzenia Dooba wynika

$$\mathbf{E} \sup_k M^2(\tau_k \wedge t) \leqslant 4\mathbf{E} M^2(t),$$

co implikuje, że $M(\tau_k \wedge t) \to M(t)$ w $L^2(\Omega)$. Zatem z Lematu 5 wynika zbieżność $V_n(M^{\tau_k}, t) \to \langle M \rangle$(t) względem $\mathbf{P}$. Ponadto

$$\mathbf{E} V_n(M, t) \leftarrow \mathbf{E} V_n(M^{\tau_k}, t) = \mathbf{E}(M^{\tau_k})^2(t) \to \mathbf{E}\langle M \rangle(t).$$

To znaczy $\mathbf{E} V_n(M, t) = \mathbf{E}\langle M \rangle(t)$. Z Lematu 3 wynika zbieżność $V_n(M, t) \to \langle M \rangle(t)$ w $L^1(\Omega)$.

■

Wniosek 4 *Wariacja kwadratowa całki stochastycznej. Niech* $(t_j^n)_n$ *będzie ciągiem podziałów normalnych,* $M = \int XdW$*, wówczas*

1. $X \in \mathcal{L}_T^2 \Rightarrow V_n(M,t) \to \int_0^2 X(s)^2 ds$ *w* $L^1(\Omega)$*;*

2. $X \in \Lambda_T^2 \Rightarrow V_n(M,t) \to \int_0^2 X(s)^2 ds$ *względem* $\mathbf{P}$.

Dowód. Punkt (1) wynika z Twierdzenia 6. Punkt (2) dostajemy z Lematu 2.

■

4.2 Iloczyn skośny

Definicja 10 *Niech* $M, N \in \mathcal{M}^{2,c}$*. Definiujemy*

$$\langle M, N \rangle := \frac{1}{4}(\langle M + N \rangle - \langle M - N \rangle).$$

Proces ten będziemy nazywać iloczynem skośnym procesów M, N.

Stwierdzenie 4 *Tak zdefiniowany proces* $\langle M, N \rangle$ *jest jedynym procesem ciągłym,* 0 *w* 0*, o trajektoriach o wahaniu skończonym ma każdym przedziale ograniczonym takim, że* $MN - \langle M, N \rangle$ *jest martyngałem. Co więcej, dla każdego ciągu podziałów normalnych* $(t_j^n)_n$*, to znaczy spełniającego warunki*

$$t < T, \;\; 0 = t_0^n < \ldots < t_m^n = t, \;\; max_j(t_{j+1}^n - t_j^n) \to 0 \;\; gdy\, n \to \infty,$$

zachodzi

$$\sum_{j=0}^{n_m - 1} (M(t_{j+1}^n) - M(t_j^n))(N(t_{j+1}^n) - N(t_j^n)) \xrightarrow{L_1} \langle M, N \rangle.$$

Dowód. Warto zwrócić uwagę, że dla $a, b \in \mathbb{R}$

$$ab = \frac{1}{4}((a+b)^2 - (a-b)^2).$$

Ponadto $(M+N)^2 - \langle M + N \rangle$ i $(M-N)^2 - \langle M - N \rangle$ są martyngałami. Zatem z uwagi powyżej i z Twierdzenia 6 wynika teza stwierdzenia.

■

Własności iloczynu skośnego

1. $\langle M, M \rangle = \langle M \rangle$;

2. $\langle M, N \rangle$ jest dwuliniowy;

3. Jeśli $M \in \mathcal{M}^{2,c}$, $X \in \Lambda^2_T(M)$, to
$$(\int XdM)^\tau = \int XdM^\tau = \int 1_{(0,\tau]}XdM.$$

4. Zachodzi równość $\mathcal{M}^c_{loc} = \mathcal{M}^{2,c}_{loc}$. To znaczy każdy martyngał lokalny, ciągły jest w klasie martyngałów lokalnych, ciągłych całkowalnych z kwadratem. Przypomnijmy, że $M \in \mathcal{M}^c_{loc}$ jeśli M jest ciągły, a ponadto istnieje ciąg lokalizujący momentów zatrzymania $(\tau_n)_n$ taki, że $\tau_n \nearrow T$ i M^{τ_n} jest martyngałem.

5. Dla dowolnego $M \in \mathcal{M}^{2,c}_{loc}$ istnieje proces $\langle M\rangle$ rosnący, 0 w 0 i taki, że $M^2 - \langle M\rangle$ jest martyngałem lokalnym. To znaczy $\tau_n \nearrow T$, $M^{\tau_n} \in \mathcal{M}^{2,c}$ oraz $(M^{\tau_n})^2 - \langle M^{\tau_n}\rangle$ jest martyngałem (na ćwiczenia).

   W konsekwencji całka stochastyczna $\int XdM$ jest dobrze zdefiniowana dla procesów z klasy $\Lambda^2_T(M)$, gdzie $M \in \mathcal{M}^{2,c}_{loc}$, oraz
$$\int_0^t X^2(s)d\langle M\rangle < \infty \text{ p.n.}$$

   Zauważmy, że $\int XdM$ jest, przy takich założeniach, martyngałem lokalnym takim, że
$$\int_0^{t\wedge\tau_k} XdM := \int_0^t 1_{[0,\tau_k)}XdM^{\tau_k}.$$
   Poprawność tej definicji zostanie wykazana na ćwiczeniach.

6. Definicja $\langle M, N\rangle$ rozszerza się dla dowolnych $M, N \in \mathcal{M}^{2,c}_{loc}$.

7. Z Wniosku 4 wynika, że jeśli $M = \int XdW$, $X \in \Lambda^2_T$, to
$$V_n(M,t) \xrightarrow{\mathbf{P}} \int X^2ds \text{ czyli } \langle M\rangle = \int X^2ds.$$

   Niech teraz $M = \int XdW$, $N = \int YdW$, $X, Y \in \Lambda^2_T$. Wówczas
$$\langle M, N\rangle = \int XYds.$$

8. To samo co w powyższym punkcie zachodzi gdy zamiast pary (W,t), weźmiemy $(M, \langle M\rangle)$.

Definicja 11 *Proces Y nazywamy lokalnie ograniczonym, jeśli istnieje ciąg momentów zatrzymania τ_n taki, że $Y^{\tau_n} - Y(0)$ jest ograniczony.*

Na przykład jeśli Y ciągły, to jest lokalnie ograniczony. Istotnie wystarczy wziąć $\tau_n = \{t : |Y(t) - Y(0)| \geqslant n\}$. Warto też zwrócić uwagę, że jeśli Y jest lokalnie ograniczony, to $Y \in \Lambda_T^2(M)$ dla dowolnego martyngału $M \in \mathcal{M}_{loc}^{2,c}$ (na ćwiczenia).

Stwierdzenie 5 *Zachodzą następujące fakty*

1. *Niech $X \in \mathcal{L}_T^2$, Y-prognozowalny ograniczony. Definiujemy $M = \int XdW$, wówczas $\int YdM = \int XYdW$.*

2. *Niech $X \in \Lambda_T^2$, Y-prognozowalny, lokalnie ograniczony, to zachodzi ten sam wzór co w punkcie 1., czyli $\int YdM = \int XYdW$.*

Dowód. (Punkt 1.) Niech $X \in \mathcal{E}$, $Y = \eta_0 1_0 + \sum_{j=1}^{m-1} \eta_j 1_{(t_j, t_{j+1}]}$, η_j ograniczone $\mathcal{F}_{t_j}$ mierzalne

$$\int_0^t YdM = \sum_{j=1}^{m-1} \eta_j (M(t_{j+1} \wedge t) - M(t_j \wedge t)) =$$
$$= \sum_{j=1}^{m-1} \eta_j \int_0^{t_{j+1}\wedge t} XdW - \int_0^{t_j \wedge t} XdW = \sum_{j=1}^{m-1} \eta_j \int_{t_j\wedge t}^{t_{j+1}\wedge t} XdW =$$
$$= \sum_{j=1}^{m-1} \int_{t_j\wedge t}^{t_{j+1}\wedge t} \eta_j XdW = \int_0^t YdW.$$

Niech teraz $Y_n \in \mathcal{E}$, $Y_n \to Y$ w $\mathcal{L}_T^2(M)$. To znaczy

$$\mathbf{E} \int_0^t |Y_n(s) - Y(s)|^2 d\langle M \rangle \to 0, \text{ gdy } n \to \infty.$$

Zauważmy (Własność 6.), że $\langle M \rangle = \int X^2 ds$. Zatem

$$\mathbf{E} \int_0^t |Y_n(s) - Y(s)|^2 d\langle M \rangle = \mathbf{E} \int_0^t |Y_n(s) - Y(s)|^2 X(s)^2 ds.$$

Stąd

$$\mathbf{E} \int_0^t |Y_n(s)X(s) - Y(s)X(s)|^2 ds \to 0 \text{ gdy } n \to \infty,$$

co oznacza, że $Y_n X \to YX$ w $\mathcal{L}_T^2(W)$.

(Punkt 2.) (na ćwiczenia)

■

Uwaga 10 *Teza Stwierdzenia 4 pozostaje prawdziwa, gdy zamiast W, weźmiemy dowolny martyngał $Z \in \mathcal{M}^{2,c}$.*

4.3 Całkowanie przez części

Udowodnimy teraz zasadniczy wzór, jak się okaże niezbędny przy dowodzeniu wzoru Ito.

Twierdzenie 7 *Niech* $X, Y \in \Lambda_T^2$, $M = \int XdW$, $N = \int YdW$, *wówczas*

$$MN = \int MdN + \int NdM + \int XYds =$$
$$= \int MYdW + \int NXdW + \int XYds.$$

Zauważmy, że druga równość wynika ze Stwierdzenia 4 (dla procesów lokalnie ograniczonych). Pierwsza równość wynika ze znacznie ogólniejszego faktu.

Twierdzenie 8 *Niech* $M, N \in \mathcal{M}_{loc}^{2,c}$, *wówczas*

$$MN = M(0)N(0) + \int MdN + \int NdM + \langle M, N \rangle.$$

Dowód. (1) Po pierwsze zauważmy, że całki $\int MdN, \int NdM$ są dobrze określone, bo M, N są adaptowalne i ciągłe (stąd prognozowalne i lokalnie ograniczone). Zatem $M \in \Lambda_T^2(N)$, $N \in \Lambda_T^2(M)$. Zauważmy, że

$$\langle \int MdN \rangle = \int M^2 d\langle N \rangle, \ \ \langle \int NdM \rangle = \int N^2 d\langle M \rangle.$$

(2) Można założyć, że $M(0) = N(0) = 0$. Istotnie z definicji

$$\langle M - M(0), N - N(0) \rangle = \langle M, N \rangle,$$
$$\int Nd(M - M(0)) = \int NdM, \ \ \int Md(N - N(0)) = \int MdN$$

oraz $\int M(0)dN = M(0)(N - N(0))$, $\int N(0)dM = N(0)(M - M(0))$. Jeśli zatem pokażemy twierdzenie dla $M - M(0)$, $N - N(0)$, to

$$(M - M(0))(N - N(0)) = \int (M - M(0))d(N - N(0)) +$$
$$+ \int (N - N(0))d(M - M(0)) + \langle (M - M(0)), (N - N(0)) \rangle =$$
$$= \int MdN - M(0)(N - N(0)) + \int NdM - N(0)(N - N(0)) + \langle M, N \rangle.$$

Wystarczy zauważyć, że

$$(M - M(0))(N - N(0)) = MN - M(0)(N - N(0)) - N(0)(N - N(0)) + M(0)N(0).$$

Zatem zachodzi równość $MN = M(0)N(0) + \int MdN + \int NdM + \langle M, N\rangle$.

(3) Wystarczy udowodnić tezę dla $M = N$, to znaczy

$$M^2 = 2\int MdM + \langle M\rangle.$$

Istotnie stosując powyższą równość do $M + N$, $M - N$ dostajemy

$$MN = \frac{1}{4}((M+N)^2 - (M-N)^2) = \frac{1}{4}(2\int (M+N)d(M+N) + \langle M+N\rangle -$$
$$-2\int (M-N)d(M-N) - \langle M-N\rangle) = \int MdN + \int NdM + \langle M, N\rangle,$$

gdzie w ostatniej linijce skorzystaliśmy ze wzoru na $\langle M, N\rangle$ oraz z liniowści całki stochastycznej, to znaczy

$$\int (X+Y)d(Z_1+Z_2) = \int XdZ_1 + \int XdZ_2 + \int YdZ_1 + \int YdZ_2.$$

Dokonane uproszczenia pozwalają nam przystąpić do zasadniczego dowodu.

(4) Niech $\tau_n = \inf\{t : \ |M(t)| \geqslant n\}$. Zatem M^{τ_n} jest martyngałem ograniczonym. Przypomnijmy, że analogicznie jak dla procesu Wienera można pokazać, że

$$(M^{\tau_n})^2 = 2\int M^{\tau_n} dM^{\tau_n} + \langle M^{\tau_n}\rangle. \tag{4.2}$$

Zachodzi równość $\langle M\rangle^{\tau_n} = \langle M^{\tau_n}\rangle$, a ponadto

$$\int_0^t M^{\tau_n} dM^{\tau_n} = \int_0^{t\wedge\tau_n} M^{\tau_n} dM = \int_0^{t\wedge\tau_n} 1_{[0,\tau_n]} M^{\tau_n} dM =$$
$$= \int_0^t 1_{[0,\tau_n]} MdM = \int_0^{t\wedge\tau_n} MdM.$$

Przechodząc z n do ∞ w równości

$$(M^{\tau_n})^2(t) = 2\int_0^{t\wedge\tau_n} MdM + \langle M\rangle^{\tau_n}(t)$$

kończymy dowód twierdzenia.

■

Definicja 12 *Oznaczmy przez $\mathcal{V}^c$ procesy ciągłe adaptowalne o skończonym wahaniu na każdym odcinku $[0,t] \subset [0,T)$.*

Lemat 6 *Niech $M \in \mathcal{M}^{2,c}_{loc}$, $A \in \mathcal{V}^c$, wówczas*

$$MA = M(0)A(0) + \int AdM + \int MdA,$$

gdzie całka $\int AdM$ jest całką stochastyczną, a $\int MdA$ zwykłą całką Stiltjesa (zdefiniowaną dla każdego ω).

Dowód. (1) Można założyć, że $M(0) = A(0) = 0$ oraz, że M, A są ograniczone.
(2) Niech $(t^n_j)_n$ będzie ciągiem podziałów normalnych, to znaczy

$$t < T, \;\; 0 = t^n_0 < t^n_1 ... < t^n_m = t, \;\; \max_j (t^n_{j+1} - t^n_j) \to 0 \text{ gdy } n \to \infty.$$

Wówczas

$$M(t)A(t) = \sum_{j=0}^{m_n - 1} (M(t^n_{j+1}) - M(t^n_j))(A(t^n_{j+1}) - A(t^n_j)) +$$
$$+ \sum_{j=0}^{m_n - 1} M(t^n_j)(A(t^n_{j+1}) - A(t^n_j)) + \sum_{j=1}^{m_n} A(t^n_j)(M(t^n_{j+1}) - M(t^n_j)).$$

Zauważmy, że

$$\sum_{j=0}^{m_n - 1} M(t^n_j)(A(t^n_{j+1}) - A(t^n_j)) \to \int_0^t MdA, \;\; \sum_{j=0}^{m_n - 1} A(t^n_{j-1})(M(t^n_{j+1}) - M(t^n_j)) \to \int_0^t AdM$$

oraz

$$|\sum_{j=0}^{m_n - 1} (M(t^n_{j+1}) - M(t^n_j))(A(t^n_{j+1}) - A(t^n_j))| \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{(\sum_{j=0}^{m_n - 1} (M(t^n_{j+1}) - M(t^n_j))^2)(\sum_{j=0}^{m_n - 1} (A(t^n_{j+1}) - A(t^n_j))^2)} \leqslant$$
$$\leqslant \langle M \rangle(t) \max_j |A(t^n_{j+1}) - A(t^n_j)| \|A\|(t) \to 0,$$

gdzie $\|A\|(t)$ oznacza wahanie procesu A w punkcie t.

■

Mamy więc wzory na całkowanie przez części dla $M, N \in \mathcal{M}^{2,c}_{loc}$ jak również w przypadku gdy $A \in \mathcal{V}^c$, $M \in \mathcal{M}^{2,c}_{loc}$. Dla kompletnego zobrazowania zjawiska potrzebujemy następującego lematu.

Lemat 7 *Jeśli $A, B \in \mathcal{V}^c$, to*

$$AB = A(0)B(0) + \int AdB + \int BdA.$$

Dowód lematu przebiega podobnie jak dowód Lematu 6.

Rozdział 5

Wzór Ito

Zaczniemy od następującego faktu (twierdzenia o zbieżności zdominowanej całek stochastycznych).

Stwierdzenie 6 *Niech $M \in \mathcal{M}^{2,c}_{loc}$, X_n prognozowalne takie, że*

$$X_n(t,\omega) \to X(t,\omega).$$

Zakładamy ponadto, że X_n są zdominowane, to znaczy istnieje $Y \in \Lambda^2_T(M)$ takie, że $|X_n(t,\omega)| \leqslant Y(t,\omega)$. Wówczas $X_n, X \in \Lambda^2_T(M)$ oraz

$$\int_0^t X_n dM \xrightarrow{\mathbf{P}} \int_0^t X dM.$$

Dowód. Jest jasne, że $X_n, X \in \Lambda^2_T(M)$ (bo $Y \in \Lambda^2_T(M)$ dominuje te zmienne). Ponadto

$$\int_0^t X_n^2 d\langle M\rangle \leqslant \int_0^t Y^2 \langle M\rangle < \infty.$$

Załóżmy, że τ_k jest ciągiem lokalizującym, czyli $M^{\tau_k} \in \mathcal{M}^{2,c}_T$. Twierdzenie o zatrzymywaniu całki stochastycznej daje nam $1_{(0,\tau_k]}Y \int \mathcal{L}^2_T(M^{\tau_k})$. Zatem z nierówności $1_{(0,\tau_k]}X_n^2 \leqslant 1_{(0,\tau_k]}Y$ wynika, że również $1_{(0,\tau_k]}X_n \in \mathcal{L}^2_T(M^{\tau_k})$. Z klasycznego twierdzenia Lebesgue'a o zmajoryzowanej zbieżności

$$1_{(0,\tau_k]}X_n \to 1_{(0,\tau_k]}X, \quad \text{w} \quad \mathcal{L}^2_T(M^{\tau_k}).$$

Czyli

$$\mathbf{E}\int_0^t 1_{(0,\tau_k]}(X_n - X)^2 d\langle M\rangle \to 0, \quad \text{gdy}, \quad n \to \infty.$$

Co daje zbieżność w $L^2(\Omega)$

$$\int_0^t 1_{(0,\tau_k]}X_n dM^{\tau_k} \to \int_0^t 1_{(0,\tau_k]}X dM^{\tau_k}$$

Zatem z definicji

$$\int_0^{t\wedge\tau_k} X_n dM \to \int_0^{t\wedge\tau_k} X dM$$

Uwaga, że $A_k = \{\tau_k \geqslant t\} \nearrow \Omega$ razem z Lematem 2 kończy dowód stwierdzenia.

■

Kluczowym pojęciem w teorii całki stochastycznej jest pojęcie semimartyngału.

Definicja 13 *Proces $Z(t)$, $t < T$ nazywamy semimartyngałem ciągłym jeśli*

$$Z = Z(0) + M + A, \quad gdzie$$

$Z(0)$ jest $\mathcal{F}_0$ mierzalne, $M \in \mathcal{M}^{2,c}_{loc}$ natomiast $A \in \mathcal{V}^c$. Ponadto $M(0) = A(0) = 0$.

Uwaga 11 *Jeśli $Z = Z(0) + M + A$ semimartyngałem ciągłym, to M, A są wyznaczone jednoznacznie.*

Dowód. Korzystamy z argumentu dyskutowanego na ćwiczeniach. Gdyby istniały dwa przedstawienia $Z = Z(0) + M + A$, $Z = Z(0) + M' + A'$, to

$$M - M' = -(A - A') \in \mathcal{V}^c.$$

Ponadto $M - M' \in \mathcal{M}^{2,c}_{loc}$ oraz $M(0) - M'(0) = 0$. Stąd $M - M' \equiv 0$. Pokazaliśmy wprawdzie ten fakt dla martyngałów, ale przez zatrzymywanie można go rozszerzyć na martyngały lokalne.

■

Najważniejszym przykładem są procesy

$$Z = Z(0) + \int X dW + \int Y ds,$$

gdzie $X \in \Lambda^2_T$, Y prognozowalny, mierzalny.

Wniosek 5 *Jeśli Z_1, Z_2 są semimartyngałami ciągłymi, to $Z_1 Z_2$ też jest semimartyngałem. Ponadto jeśli*

$$Z_1 = Z_1(0) + M_1 + A_1, \quad Z_2 = Z_2(0) + M_2 + A_2.$$

to

$$Z_1 Z_2 = Z_1(0) Z_2(0) + \int Z_1 dZ_2 + \int Z_2 dZ_1 + \langle M_1, M_2\rangle. \tag{5.1}$$

Definicja 14 *Niech Z_1, Z_2 będą semimartyngałami takimi, że $Z_1 = Z_1(0) + M_1 + A_1$, $Z_2 = Z_2(0) + M_2 + A_2$. Dla uproszczenia zapisu definiujemy $\langle Z_1, Z_2\rangle = \langle M_1, M_2\rangle$.*

W myśl powyższej uwagi wzór na całkowanie przez części przyjmuje szczególnie prostą postać

$$Z_1Z_2 = Z_1(0)Z_2(0) + \int Z_1 dZ_2 + \int Z_2 dZ_1 + \langle Z_1, Z_2\rangle.$$

Zachodzi następujące uogólnienie Uwagi 10.

Uwaga 12 *Niech $Z = Z(0) + M + A$ będzie semimartyngałem. Niech $X \in \Lambda^2_T(M)$, Y-prognozowalny, lokalnie ograniczony. Definiujemy $Z' = \int X dZ$. Zachodzi równość*

$$\int Y dZ' = \int XY dZ.$$

Twierdzenie 9 *(Wzór Ito) Niech $Z = Z(0) + M + A$ będzie ciągłym semimartyngałem. Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, będzie klasy C^2. Wówczas zachodzi wzór*

$$f(Z(t)) = f(Z(0)) + \int_0^t f'(Z(s))dZ(s) + \frac{1}{2}\int_0^t f''(Z(s))d\langle M\rangle(s).$$

Innymi słowy $f(Z)$ jest semimartyngałem, działanie funkcji f na semimartyngały (to znaczy $Z \to f \circ Z$) nie wyprowadza poza tą klasę.

Dowód. Warto zwrócić uwagę, że całki powyższych wzorach są dobrze określone. Ponadto wystarczy pokazać twierdzenie dla każdego t z osobna, bo stąd już wynika równość w sensie nieodróżnialności. (Np. dlatego, że trajektorie procesów po lewej i prawej stronie są ciągłe, a zatem równość na przeliczalnym zbiorze indeksów daje równość trajektorii). Będziemy systematycznie upraszczać zagadnienie.

(1) Można założyć, że $Z(0)$ jest ograniczone. Istotnie jeśli $Z(0)$ nie jest ograniczone, to możemy zdefiniować

$$Z_n(0) := Z(0)1_{\{|Z(0)|\leqslant n\}}.$$

Niech $Z_n := Z_n(0)+M+A$. Zauważmy, że $Z_n(t) \to Z(t)$ p.n. dla każdego $t \leqslant T$. Ponadto

$$|f'(Z_n(s)| \leqslant \sup_{n\geqslant 1}|f'(Z_n(s))| \leqslant C(t), \ \ \text{dla } s \leqslant t,$$

gdzie $C(t)$ jest zmienną losową. Stąd wynika, że $\sup_{n\geqslant 1}|f'(Z_n)| \in \Lambda^2_T(M)$, gdyż

$$\int_0^t \sup_{n\geqslant 1}|f'(Z_n)|d\langle M\rangle \leqslant C(t)\langle M\rangle(t) < \infty.$$

Zatem na mocy Stwierdzenia 6 dostajemy, że

$$\int_0^t f'(Z_n)dM \xrightarrow{\mathbf{P}} \int_0^t f'(Z)dM.$$

Ponieważ w oczywisty sposób pozostałe całki we wzorze Ito zbiegają według $\mathbf{P}$, więc po lewej stronie mamy ciąg zmiennych $\xi_n := f(Z_n)(t)$ zbieżny p.n. do $\xi := f(Z)(t)$, a po prawej ciąg zmiennych

$$\eta_n := f(Z_n(0)) + \int_0^t f'(Z_n)dZ_n + \frac{1}{2}\int_0^t f''(Z_n)d\langle M\rangle(s)$$

zbieżny według $\mathbf{P}$ do zmiennej η. Równość $\xi_n = \eta_n$ wraz z jednoznacznością granic dają $\xi = \eta$.

(2) Można założyć, że Z jest ograniczony. Przypuśćmy, że mamy wzór Ito dla Z ograniczonych. Niech Z dowolny taki, że $Z(0)$ ograniczony. Definiujemy momenty zatrzymania

$$\tau_n' := \inf\{t\ |M(t)| \geqslant n\} \wedge T; \ \ \tau_n'' := \inf\{t\ |A(t)| \geqslant n\} \wedge T.$$

Niech wreszcie $\tau_n := \tau_n' \wedge \tau_n''$. Mamy $\tau_n \nearrow T$, ponadto

$$Z_n := Z(0) + M^{\tau_n} + A^{\tau_n}$$

jest semimartyngałem ciągłym, ograniczonym. Zauważmy, że $Z_n(t) \to Z(t)$ p.n. Ponadto jeśli wzór Ito jest prawdziwy dla Z_n, to

$$f(Z_n(t)) = f(Z(0)) + \int_0^t f'(Z_n)dM^{\tau_n} + \int_0^t f'(Z_n)dA^{\tau_n} + \frac{1}{2}\int_0^t f''(Z_n)d\langle M^{\tau_n}\rangle =$$
$$= f(Z(0)) + \int_0^{t\wedge\tau_n} f'(Z_n)dM + \int_0^{t\wedge\tau_n} f'(Z_n)dA\frac{1}{2}\int_0^{t\wedge\tau_n} f''(Z_n)d\langle M\rangle.$$

Dla $s \leqslant \tau_n$ mamy równości $A^{\tau_n}(s) = A(s)$, $M^{\tau_n}(s) = M(s)$, $Z_n(s) = Z(s)$. Stąd wynika

$$f(Z_n(t)) = f(Z(0)) + \int_0^{t\wedge\tau_n} f'(Z)dZ\frac{1}{2}\int_0^{t\wedge\tau_n} f''(Z)d\langle M\rangle.$$

Pozostaje zauważyć, że

$$\text{p.n.}\ \ f(Z) \leftarrow f(Z_n) = f(Z(0)) + \int_0^{t\wedge\tau_n} f'(Z)dZ\frac{1}{2}\int_0^{t\wedge\tau_n} f''(Z)d\langle M\rangle \to$$
$$\to f(Z(0)) + \int_0^t f'(Z)dZ + \frac{1}{2}\int_0^t f''(Z)d\langle M\rangle\ \ \text{p.n.}$$

Możemy przejść do najważniejszej części dowodu.

(3) Wystarczy pokazać wzór Ito dla wielomianu. Przypuśćmy, że wiemy, że wzór Ito jest prawdziwy dla wielomianu. Ponieważ f jest klasy C^2, więc istnieje ciąg wielomianów f_n taki, że

$$f_n \to f,\ f_n' \to f',\ f_n'' \to f'',\ \ \text{jednostajnie na}\ \ [-k, k],$$

gdzie k dowolne naturalne. Zauważmy, że skoro Z jest ograniczony, to istnieje $k \in \mathbb{N}$ takie, że $Z(s) \in [-k, k]$ dla każdego $s \leqslant t$. Zatem $f_n(Z) \to f(Z)$ jednostajnie. Podobnie ponieważ

$$|f_n'(Z(s))| \leqslant \sup_n \sup_{x\in[-k,k]} |f'(x)| \leqslant C < \infty,$$

(jest oczywiste, proces stały $C \in \Lambda_T^2(M)$), więc korzystając ze Stwierdzenia 6

$$\int_0^t f_n'(Z)dZ \to \int_0^t f'(Z)dZ, \text{ według } \mathbf{P}.$$

Analogicznie dla $f_n''(Z)$ dostajemy zbieżność

$$\int_0^t f_n''(Z)d\langle M\rangle \to \int_0^t f'(Z)d\langle M\rangle, \text{ według } \mathbf{P}.$$

Zatem znowu korzystając z jednoznaczności granic dostajemy

$$f(Z(t)) = f(Z(0)) + \int_0^t f'(Z)dZ + \frac{1}{2}\int_0^t f''(Z)d\langle M\rangle.$$

Pozostaje nam sprawdzić wzór Ito dla wielomianów.

(4) Zauważmy najpierw, że obie strony wzoru Ito są liniowe względem f. Wystarczy zatem sprawdzić wzór Ito dla $f = x^n$, $n \in \mathbb{N}$. Dla $f \equiv 1$ wzór Ito jest oczywisty. Udowodnimy teraz, że jeśli wzór Ito jest prawdziwy dla wielomianu f to jest prawdziwy dla $g(x) \equiv xf(x)$. Potrzebujemy wzorów

$$g'(x) = f(x) + xf'(x), \;\; g''(x) = 2f'(x) + xf''(x).$$

W istocie musimy wykazać, że

$$g(Z(t)) = Z(t)f(Z(t)) = Z(0)f(Z(0)) + \int_0^t (f(Z) + Zf'(Z))dZ +$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^t (2f'(Z) + Zf''(Z))d\langle M\rangle = g(Z(0)) + \int_0^t g'(Z)dZ\frac{1}{2}\int_0^t g''(Z)d\langle M\rangle.$$

Zauważmy, że do $Zf(Z)$ możemy zastosować wzór na całkowanie przez części. To znaczy

$$Zf(Z) = Z(0)f(Z(0)) + \int Zdf(Z) + \int f(Z)dZ + \langle Z, f(Z)\rangle.$$

Korzystając ze wzoru Ito dla f mamy równość

$$\int Zdf(Z) = \int Zd(\int f'(Z)dZ + \frac{1}{2}\int f''(Z)\langle M\rangle)$$

Warto przypomnieć, że $\int Zdf(Z) = \int Zd(f(Z) - f(0))$. Na mocy Uwagi 12

$$\int Zd(\int f'(Z)dZ) = \int Zf'(Z)dZ. \tag{5.2}$$

Podobnie

$$\int Zd(\frac{1}{2}\int f''(Z)\langle M\rangle) = \frac{1}{2}\int Zf''(Z)d\langle M\rangle. \tag{5.3}$$

Pozostaje obliczyć $\langle Z, f(Z)\rangle$. Ze wzoru Ito

$$\begin{aligned} f(Z) &= f(Z(0)) + \int f'(Z)dZ + \frac{1}{2}\int f''(Z)d\langle M\rangle = \\ &= f(Z(0)) + \int f'(Z)d(M+A) + \frac{1}{2}\int f''(Z)d\langle M\rangle \end{aligned}$$

a zatem martyngałem lokalnym w rozkładzie $f(Z)$ jest $\int f'(Z)dM$. Z definicji

$$\langle Z, f(Z)\rangle = \langle M, \int f'(Z)dM\rangle = \langle \int 1dM, \int f'(Z)dM\rangle.$$

Zatem z własności nawiasu skośnego

$$\langle Z, f(Z)\rangle = \int f'(Z)\langle M\rangle. \tag{5.4}$$

Równości (5.2), (5.3), (5.4) dają

$$\begin{aligned} &Z(0)f(Z(0)) + \int Zdf(Z) + \int f(Z)dZ + \langle Z, f(Z)\rangle = \\ &= Z(0)f(Z(0)) + \int (f(Z) + Zf'(Z))dZ + \frac{1}{2}\int (f'(Z) + Zf''(Z))\langle M\rangle. \end{aligned}$$

Zatem wzór Ito jest prawdziwy dla funkcji g. To kończy dowód twierdzenia.

■

Możemy sformułować wersję wielowymiarową twierdzenia Ito.

Twierdzenie 10 *Niech $Z_1, ..., Z_d$ będą semimartyngałami ciągłymi, $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ klasy C^2. Oznaczmy $Z = (Z_1, ..., Z_d)$, $Z = Z(0) + M + A$. Zachodzi równość*

$$f(Z) = f(Z(0)) + \int \nabla f(Z)dZ + \frac{1}{2}\int \nabla^2 f(Z)d\langle M\rangle,$$

gdzie

$$\begin{aligned} \int \nabla f(Z)dZ &= \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial f(Z)}{\partial x_i}, \\ \int \nabla^2 f(Z)d\langle M\rangle &= \sum_{i,j=1}^{d} \int \frac{\partial^2 f(Z)}{\partial x_i \partial x_j} d\langle M_i, M_j\rangle. \end{aligned} \tag{5.5}$$

Rozdział 6

Charakteryzacje procesu Wienera

6.1 Twierdzenie Levy'ego

Twierdzenie 11 *(TW. Levy'ego) Niech M będzie ciągłym martyngałem lokalnym takim, że $M(0) = 0$. Proces M jest procesem Wienera wtedy i tylko wtedy, gdy $M^2(t) - t$ jest martyngałem lokalnym, to znaczy $\langle M\rangle(t) = t$.*

Dowód. Jeśli $M = W$, to oczywiście $\langle M\rangle = t$. Cała trudność jest w dowodzie twierdzenia przeciwnego.

(1) Pokażemy najpierw, że $M \in \mathcal{M}^{2,c}$. Niech τ_n będzie lokalizacją martyngału lokalnego M. Z definicji $M^2(t \wedge \tau_n) - t \wedge \tau_n$ jest martyngałem. Stosujemy nierówność Dooba

$$\mathbf{E} \sup_{s \leqslant t} M^2(s \wedge \tau_n) = \mathbf{E} \sup_{s \leqslant t \wedge \tau_n} M^2(s) \leqslant 4\mathbf{E}M^2(t \wedge \tau_n).$$

Z lematu Fatou dostajemy

$$\mathbf{E} \sup_{s \leqslant t} M^2(s) \leqslant \lim_{n\to\infty} 4\mathbf{E}(t \wedge tau_n) = 4 \lim_{n\to\infty} (t \wedge \tau_n) = 4t.$$

Czyli

$$\mathbf{E} \sup_{s \leqslant t} M^2(s \wedge \tau_n) \leqslant \mathbf{E} \sup_{s \leqslant t} M^2(s) \leqslant 4t, \tag{6.1}$$

co w szczególności oznacza, że rodzina $M^2(s)$ dla $s \in [0, t]$ jest jednostajnie całkowalna. Niech $s < t$. Wiemy, że dla każdego n

$$\mathbf{E}(M(t \wedge \tau_n)|\mathcal{F}_s) = M(s \wedge \tau_n),$$

zatem ponieważ $M(t \wedge \tau_n) \to M(t)$, $M(s \wedge \tau_n) \to M(s)$ p.n., więc

$$\mathbf{E}(M(t)|\mathcal{F}_s) \leftarrow \mathbf{E}(M(t \wedge \tau_n)|\mathcal{F}_s) = M(s \wedge \tau_n) \to M(s), \quad \text{p.n.}$$

Korzystamy tu z faktu, że rodzina zmiennych $(M(t \wedge \tau_n))$ jest jednostajnie całkowalna (nierówność (6.1)). Pokazaliśmy, że M jest martyngałem oraz $\mathbf{E}M^2(t) < \infty$, dla każdego $t < \infty$, co daje $M \in \mathcal{M}^{2,c}$.

(2) Wystarczy pokazać, że dla każdego $h \in \mathbb{R}$, $t \geqslant s$ mamy

$$\mathbf{E}(e^{ih(M(t)-M(s))}|\mathcal{F}_s) = e^{-\frac{1}{2}(t-s)h^2} \tag{6.2}$$

W szczególności

$$\mathbf{E}(e^{ih(M(t)-M(s))}) = e^{-\frac{1}{2}(t-s)h^2}$$

czyli przyrosty $M(t) - M(s)$ są gaussowskie. Pokażemy, że z (5.2) wynika niezależność $M(t) - M(s)$ od σ-ciała $\mathcal{F}_s$. Równoważnie dla każdej zmiennej η mierzalnej względem $\mathcal{F}_s$ zmienne $M(t) - M(s), \eta$ są niezależne. Korzystamy z równości

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}(e^{ih_1(M(t)-M(s))+ih_2\eta}) = \mathbf{E}(\mathbf{E}(e^{ih_1(M(t)-M(s))+ih_2\eta}|\mathcal{F}_s)) = \\
&= \mathbf{E}(e^{ih_2\eta}\mathbf{E}(e^{ih_1(M(t)-M(s))}|\mathcal{F}_s)) = e^{-\frac{1}{2}(t-s)h_1^2}\mathbf{E}(e^{ih_2\eta}) = \mathbf{E}(e^{ih(M(t)-M(s))})\mathbf{E}(e^{ih_2\eta}),
\end{aligned}$$

dla każdego $h_1, h_2 \in \mathbb{R}$, co jest równoważne niezależności $M(t) - M(s), \eta$.

(3) Udowodnimy równość (5.2). Stosujemy wzór Ito do funkcji $f(x) = e^{ihx}$. Wzór Ito dla funkcji o wartościach zespolonych jest prostym uogólnieniem klasycznego wzoru Ito (sprawdza oddzielnie dla części rzeczywistej i urojonej). Mamy wzory

$$f'(x) = ihe^{ihx}, \quad f''(x) = -h^2e^{ihx}.$$

Zatem na mocy wzoru Ito zachodzi równość

$$\begin{aligned}
e^{ihM(t)} &= 1 + ih\int_0^t e^{ihM(u)}dM(u) - \frac{h^2}{2}\int_0^t e^{ihM(u)}du = \\
&= e^{ihM(s)} + \int_s^t e^{ihM(u)}dM(u) - \frac{h^2}{2}\int_s^t e^{ihM(u)}du.
\end{aligned}$$

Wiemy, że $M \in \mathcal{M}^{2,c}$, oraz $|e^{ihM(u)}| = 1$, zatem $\int e^{ihM}dM \in \mathcal{L}_t^2(M)$ (dla każdego $t < \infty$). Ustalmy dowolny zbiór $A \in \mathcal{F}_s$. Z definicji martyngału wynika, że

$$\mathbf{E}(1_A\int_s^t e^{ihM}dM) = \mathbf{E}(1_A(\int_0^t e^{ihM}dM - \int_0^s e^{ihM}dM)) = 0.$$

Zatem

$$\mathbf{E}(1_Ae^{ihM(t)}) = \mathbf{E}(1_Ae^{ihM(s)}) - \frac{h^2}{2}\mathbf{E}(1_A\int_0^t e^{ihM(u)}du).$$

Oznaczmy $g(r) := \mathbf{E}(1_Ae^{ihM(u+s)})$. Możemy przepisać powyższe równanie

$$g(t-s) = g(0) - \frac{h^2}{2}\int_s^t g(u-s)du = g(0) - \frac{h^2}{2}\int_0^{t-s} g(u)du.$$

Jest to równanie liniowe, które ma dokładnie jedno rozwiązanie

$$g(r) = g(0)e^{-\frac{1}{2}h^2(t-s)}.$$

Co oznacza, że

$$\mathbf{E}(1_A e^{ihM(t)}) = e^{-\frac{1}{2}h^2(t-s)}\mathbf{E}(1_A e^{ihM(s)}).$$

Ponieważ tak jest dla każdego $A \in \mathcal{F}_s$, więc z definicji warunkowej wartości oczekiwanej

$$\mathbf{E}(e^{ihM(t)}|\mathcal{F}_s) = e^{-\frac{1}{2}h^2(t-s)}e^{ihM(s)}.$$

To kończy dowód twierdzenia. Z definicji proces gaussowski, ciągły o przyrostach niezależnych, taki, że $\mathbf{E}M(t) = 0$, $\mathbf{E}M^2(t) = t$ (wnioski z (5.2) jest procesem Wienera.

■

Zachodzi następujące uogólnienie twierdzenia Levy'ego (na ćwiczenia).

Twierdzenie 12 *Niech $M_1, ..., M_d$ będą martyngałami lokalnymi, $M_i(0) = 0$, $i = 1, ..., d$. Wówczas $M = (M_1, ..., M_d)$ jest d-wymiarowym procesem Wienera wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\langle M_i, M_j\rangle(t) = \delta_{i,j}t, \quad \textit{dla } 1 \leqslant i, j \leqslant d.$$

6.2 Martyngały eksponencjalne

Twierdzenie 13 *Niech M będzie procesem ciągłym adaptowalnym, $M(0) = 0$. Wówczas M jest procesem Wienera względem filtracji $(\mathcal{F}_t)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $e^{\lambda M(t) - \frac{\lambda^2}{2}t}$ dla każdego $\lambda \in \mathbb{R}$ jest martyngałem lokalnym.*

Dowód. Podobnie jak w twierdzeniu Levy'ego jeśli $M = W$, to w oczywisty sposób $e^{\lambda M(t) - \frac{\lambda^2}{2}t}$ jest martyngałem lokalnym dla każdego $\lambda \in \mathbb{R}$.
Definiujemy momenty zatrzymania

$$\tau_n = \inf\{t : \ |M(t)| \geqslant n\} \wedge n.$$

Stąd $|M(t \wedge \tau_n)| \leqslant n$ oraz

$$e^{\lambda M(t\wedge\tau_n) - \frac{\lambda^2}{2}(t\wedge\tau_n)} \leqslant e^{|\lambda n|}.$$

Ograniczony martyngał lokalny jest martyngałem. Niech $s < t$, $A \in \mathcal{F}_s$. Mamy równość

$$\mathbf{E}(1_A e^{\lambda M(t\wedge\tau_n) - \frac{\lambda^2}{2}(t\wedge\tau_n)}) = \mathbf{E}(1_A e^{\lambda M(s\wedge\tau_n) - \frac{\lambda^2}{2}(s\wedge\tau_n)}) \tag{6.3}$$

Oznaczmy

$$g(\lambda) = e^{\lambda M(t\wedge\tau_n) - \frac{\lambda^2}{2}(t\wedge\tau_n)}.$$

Mamy

$$|g'(\lambda)| = |(M(t\wedge\tau_n) - \lambda(t\wedge\tau_n))g(\lambda)| \leqslant n(1+|\lambda|)e^{n|\lambda|}.$$

W szczególności $|g'(\lambda)| \leqslant n(1+\lambda_0)e^{n\lambda_0}$, dla $|\lambda| \leqslant \lambda_0$. Zatem można przejść z różniczkowaniem pod znak całki w równości (6.3). Stąd

$$\mathbf{E}(1_A(M(t\wedge\tau_n) - \lambda(t\wedge\tau_n))e^{\lambda M(t\wedge\tau_n)-\frac{\lambda^2}{2}(t\wedge\tau_n)}) =$$
$$= \mathbf{E}(1_A(M(s\wedge\tau_n) - \lambda(s\wedge\tau_n))e^{\lambda M(s\wedge\tau_n)-\frac{\lambda^2}{2}(s\wedge\tau_n)})$$

w pewnym otoczeniu 0 ($|\lambda| < \lambda_0$). Kładąc $\lambda = 0$ dostajemy

$$\mathbf{E}(1_A M(t\wedge\tau_n)) = \mathbf{E}(1_A M(s\wedge\tau_n)).$$

To oznacza, że $\mathbf{E}(M(t\wedge\tau_n)|\mathcal{F}_s) = M(s\wedge\tau_n)$, czyli M jest martyngałem lokalnym. Analogicznie dowodzi sie, że $g''(\lambda) \leqslant C(n,\lambda_0)$, dla $|\lambda| < \lambda_0$. Ponadto zachodzą wzory

$$g''(\lambda) = (M(t\wedge\tau_n) - \lambda(t\wedge\tau_n))^2 g(\lambda) - (t\wedge\tau_n)g(\lambda)$$

oraz

$$g''(0) = M^2(t\wedge\tau_n) - (t\wedge\tau_n).$$

Zatem możemy dwukrotnie przejść z różniczkowaniem pod znak całki w równości (6.3). Dla $\lambda = 0$ dostajemy równość

$$\mathbf{E}(1_A(M^2(t\wedge\tau_n) - (t\wedge\tau_n))) = \mathbf{E}(1_A(M^2(s\wedge\tau_n) - (s\wedge\tau_n))),$$

czyli $\mathbf{E}(M^2(t\wedge\tau_n) - (t\wedge\tau_n)|\mathcal{F}_s) = M^2(s\wedge\tau_n) - (s\wedge\tau_n)$. Stąd $M^2(t) - t$ jest martyngałem lokalnym. Na mocy twierdzenia Levy'ego dostajemy tezę.

■

6.3 Zanurzenie Skorohoda

Bibliografia

[1] Elliot, R. (1982) Stochastic calculus and applications. *Applications of Mathematics*, **18**, viii+302 pp., Springer, New York

[2] Karatzas, I. and Shreve, S. (1988). Brownian Motion and Stochastic Calculus *Graduate Texts in Mathematics*, **113**, xxiii+470 pp., Springer, New York.

[3] Wentzel, A.D. (1980). Wykłady z teorii procesów stochastycznych. *Podręcznik akademicki*, 383 pp., PWN, Warszawa.

[4] Revuz, D. and Yor, M. (1999) Continuous Martingales and Brownian Motion *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*, **293**, 599 pp., Springer, New York.

[5] Watanabe, S. and Ikeda, N. (1981) Stochastic differential equations and diffusion processes. *North-Holland Mathematical Library*, **24**, xiv+464 pp., Kodansha, North-Holland.