Procesy Stochastyczne 2

Radosław Adamczak, Witold Bendorz

12 listopada 2005

Rozdział 1

Całkowanie przez części

1.1 Proces wariacji kwadratowej

Uwaga 1 *Można powtórzyć całą poprzednią dyskusję (teoria całki), biorąc zamiast W (proces Wienera) dowolny martyngał $M \in \mathcal{M}^{2,c}$ taki, że istnieje proces $\langle M \rangle$ spełniający warunki:*

1. *adaptowalny,*
2. *ciągły,*
3. *niemalejący,*
4. *$M^2 - \langle M \rangle$ jest martyngałem.*

Pokazaliśmy na przykład, że jeśli $M = \int_0^t X dW$, to $\langle M \rangle = \int_0^t X(s)^2 ds$.

Twierdzenie 1 *(Tw. Dooba-Meyera) Dla każdego $M \in \mathcal{M}^{2,c}$ istnieje proces $\langle M \rangle$ spełniający warunki 1.-4. (patrz np. książka Karatzas-Shreve).*

Definiujemy przestrzenie $\mathcal{L}_T^2(M)$ jako klasę procesów prognozowalnych, takich, że

$$\mathbf{E} \int_0^T X(s)^2 d\langle M(s) \rangle < \infty.$$

Dla ułatwienia $\mathcal{L}_T^2 = \mathcal{L}_T^2(W)$. Podobnie $\Lambda_T^2(M)$ oznacza przestrzeń procesów prognozowalnych takich, że

$$\int_0^T X(s)^2 d\langle M(s) \rangle < \infty, \quad p.n.$$

Uwaga 2 *Proces $\langle M \rangle$ jest wyznaczony jednoznacznie.*

Twierdzenie 2 *Niech $M \in \mathcal{M}^{2,c}$, $t < T$, a $(t_j^n)_n$ będzie ciągiem podziałów normalnych odcinka $[0,t]$. To znaczy*

$$0 = t_0^n < t_1^n < \ldots < t_{m_n}^n = t$$

oraz $\max_j(t_j^n - t_{j-1}^n) \to 0$ jeśli $n \to \infty$. Definiujemy

$$V_n(M,t) = \sum_{j=1}^{m_n} (M(t_j^n) - M(t_{j-1}^n))^2.$$

Wówczas $\lim_{n\to\infty} V_n(M,t) = \langle M \rangle$ w $L^1(\Omega)$.

Dowód. Potrzebujemy dwóch prostych faktów (na ćwiczenia).

Lemat 1 *Niech ξ_n $n = 1, 2, \ldots$ będzie ciągiem zmiennych losowych określonych na przestrzeni $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Niech zbiory $A_k \in \mathcal{F}$, $k = 1, 2, \ldots$, będą takie, że $A_k \nearrow \Omega$, a ciąg $(1_{A_k}\xi_n)_n$ zbiega według $\mathbf{P}$. Wówczas $(\xi_n)_n$ zbiega według $\mathbf{P}$.*

Lemat 2 *Jeśli $\xi_n \geqslant 0$, $\xi_n \xrightarrow{\mathbf{P}} \xi$ oraz $\mathbf{E}\xi_n = \mathbf{E}\xi < \infty$, to $\xi_n \to \xi$ w $L^1(\Omega)$.*

Można założyć, że $M(0) = 0$ zastępując M procesem $M - M(0)$. Oczywiście $V_n(M,t) = V_n(M - M(0), t)$ oraz $\langle M - M(0) \rangle = \langle M \rangle$, czyli $(M - M(0))^2 - \langle M \rangle$ jest martyngałem.
1) Załóżmy, że M jest ograniczony, $M(t,\omega) \leqslant c$, dla t, ω. Przypomnijmy, że

$$M(t)^2 = V_n(M,t) + 2\sum_{j=1}^{m_n} M(t_{j-1}^n)(M(t_j^n) - M(t_{j-1})). \tag{1.1}$$

Niech $N_n := \sum_{j=1}^{m_n} M(t_{j-1}^n)(M(t_j^n) - M(t_{j-1}^n))$. Ponadto niech

$$X_n(s) := \sum_{j=1}^{m_n} M(t_{j-1}^n) 1_{(t_{j-1}^n, t_j^n]}.$$

Oczywiście $X_n \in \mathcal{E}$. Zauważmy, że

$$N_n(t) = \int_0^t X_n dM.$$

Ponieważ $X_n \to M$ p.n. oraz w $\mathcal{L}_t^2(M)$, więc dobrze zdefiniowany jest proces $N = \int MdM$ w $\mathcal{M}_t^{2,c}$. Zauważmy, że

$$V_n(M,t) = M(t)^2 - 2N_n(t) \to M(t)^2 - 2N(t) \text{ w } L^1(\Omega).$$

Z definicji $M(t)^2 - 2N(t)$ nie zależy od wyboru ciągu podziałów. Niech $s < t$. Możemy wziąć podział $[0,t]$ zawierający punkt s. Dla takich podziałów $V_n(M,s) \leqslant V_n(M,t)$. Stąd

$$M(s)^2 - 2N(s) \leqslant M(t)^2 - 2N(t).$$

Z ciągłości M, N wynika ciągłość $M^2 - 2N$. Zatem $M^2 - 2N$ jest ciągły , rosnący, 0 w 0. Niech $\langle M\rangle = M^2 - 2N$. Ponieważ N jest martyngałem, więc $M^2 - \langle M\rangle$ jest martyngałem.

2) Niech $M \in \mathcal{M}^{2,c}$, $\tau_n \nearrow T$ takie, że M^{τ_k} jest ograniczonym martyngałem. Na przykład $\tau_k := \inf\{t : \ |M(t)| \geqslant n\}$. Z punktu 1) wiemy

$$V_n(M^{\tau_k}) \to \langle M^{\tau_k}\rangle, \ \text{ w } L^1(\Omega).$$

Potrzebujemy następującej obserwacji (na ćwiczenia).

Lemat 3 $\langle M^{\tau_k}\rangle = \langle M\rangle^{\tau_k}$

Zauważmy, że dla $k \in \mathbb{N}$

$$1_{t\leqslant\tau_k} V_n(M,t) \to 1_{t\leqslant} = 1_{t\leqslant\tau_k} V_n(M^{\tau_k}, t) \to 1_{t\leqslant\tau_k}\langle M^{\tau_k}\rangle = 1_{t\leqslant\tau_k}\langle M\rangle,$$

gdzie zbieżność jest w sensie $L^1(\Omega)$, a więc i względem $\mathbf{P}$. Ponieważ, $\{t \leqslant \tau_k\} \nearrow \Omega$, więc na mocy Lematu 1 dostajemy, że $V_n(M,t) \to V_n(M,t)$ względem $\mathbf{P}$.

3) Żeby pokazać, zbieżność w $L^1(\Omega)$ potrzebujemy następującego oszacowania (na ćwiczenia).

Lemat 4 *Niech $M, M' \in \mathcal{M}^{2,c}$, $M(0) = M'(0) = 0$. Zachodzi nierówność*

$$\mathbf{E}|V_n(M,t) - V_n(M',t)| \leqslant \|M - M'\|^2 + 2\|M'\|\|M - M'\|.$$

Niech teraz τ_k będzie jak w 2). Jest jasne, że $M(\tau_k \wedge t) \to M(t)$ w $L^2(\Omega)$. Z twierdzenia Dooba

$$\mathbf{E}M(\tau_k \wedge t)^2 \leqslant 4\mathbf{E}M(t)^2.$$

Zauważmy, że z 3) wynika $V_n(M^{\tau_k}, t) \to V_n(M,t)$ w $L^1(\Omega)$. Ponadto

$$\mathbf{E}V_n(M,t) \leftarrow \mathbf{E}V_n(M^{\tau_k}, t) = \mathbf{E}M^{\tau_k}(t)^2 \to \mathbf{E}\langle M\rangle(t).$$

To znaczy $\mathbf{E}M^2(t) - \langle M\rangle(t) = 0$. Z Lematu 2 wynika zbieżność $V_n(M,t) \to \langle M\rangle(t)$ w $L^1(\Omega)$.

■

Wniosek 1 *Wariacja kwadratowa całki stochastycznej. Niech $(t_j^n)_n$ będzie ciągiem podziałów normalnych, $M = \int X dW$, wówczas*

1. *$X \in \mathcal{L}_T^2 \Rightarrow V_n(M,t) \to \int_0^2 X(s)^2 ds$ w $L^1(\Omega)$;*
2. *$X \in \Lambda_T^2 \Rightarrow V_n(M,t) \to \int_0^2 X(s)^2 ds$ względem $\mathbf{P}$.*

Dowód. Punkt (1) wynika z Twierdzenia 2. Punkt (2) dostajemy z Lematu 1.

■

1.2 Iloczyn skalarny

Definicja 1 *Niech $M, N \in \mathcal{M}^{2,c}$. Definiujemy*

$$\langle M, N\rangle := \frac{1}{4}(\langle M+N\rangle - \langle M-N\rangle).$$

Proces ten będziemy nazywać iloczynem skalarnym procesów M, N.

Stwierdzenie 1 *Tak zdefiniowany proces $\langle M, N\rangle$ jest jedynym procesem ciągłym, 0 w 0, o trajektoriach o wahaniu skończonym ma każdym przedziale ograniczonym takim, że $MN - \langle M, N\rangle$ jest martyngałem. Co więcej, dla każdego ciągu podziałów normalnych $(t_j^n)_n$, to znaczy spełniającego warunki*

$$t < T,\;\; 0 = t_0^n < ... < t_m^n = t,\;\; max_j(t_j^n - t_{j-1}^n) \to 0 \;\; gdy\, n \to \infty,$$

zachodzi

$$\sum_{j=1}^{n_m}(M(t_j^n) - M(t_{j-1}^n))(N(t_j^n) - N(t_{j-1}^n)) \xrightarrow{L_1} \langle M, N\rangle.$$

Dowód. Warto zwrócić uwagę, że dla $a, b \in \mathbb{R}$

$$ab = \frac{1}{4}((a+b)^2 - (a-b)^2).$$

Ponadto $(M+N)^2 - \langle M+N\rangle$ i $(M-N)^2 - \langle M-N\rangle$ są martyngałami. Zatem z uwagi powyżej i z Twierdzenia 2 wynika teza stwierdzenia.

■

Własności iloczynu skalarnego

1. $\langle M, M\rangle = \langle M\rangle$;
2. $\langle M, N\rangle$ jest dwuliniowy;
3. Jeśli $M \in \mathcal{M}^{2,c}$, $X \in \Lambda_T^2(M)$, to

$$(\int XdM)^\tau = \int XdM^\tau = \int 1_{(0,\tau]}XdM.$$

4. Zachodzi równość $\mathcal{M}_{loc}^{2,c} = \mathcal{M}_{loc}^c$. To znaczy każdy martyngał lokalny, ciągły jest w klasie martyngałów lokalnych, ciągłych całkowalnych z kwadratem. Przypomnijmy, że $M \in \mathcal{M}_{loc}^c$ jeśli M jest ciągły, a ponadto istnieje ciąg lokalizujący momentów zatrzymania $(\tau_n)_n$ taki, że $\tau_n \nearrow T$ i M^{τ_n} jest martyngałem.

5. Dla dowolnego $M \in \mathcal{M}^{2,c}_{loc}$ istnieje proces $\langle M \rangle$ rosnący, 0 w 0 i taki, że $M^2 - \langle M \rangle$ jest martyngałem lokalnym. To znaczy $\tau_n \nearrow T$, $M^{\tau_n} \in \mathcal{M}^{2,c}$ oraz $(M^{\tau_n})^2 - \langle M^{\tau_n} \rangle$ jest martyngałem (na ćwiczenia).

   W konsekwencji całka stochastyczna $\int XdM$ jest dobrze zdefiniowana dla procesów z klasy $\Lambda^2_T(M)$, gdzie $M \in \mathcal{M}^{2,c}_{loc}$, oraz

$$\int_0^t X^2(s)d\langle M_s \rangle < \infty \;\; mboxp.n.$$

   Zauważmy, że $\int XdM$ jest, przy takich założeniach, martyngałem lokalnym.

6. Definicja $\langle M, N \rangle$ rozszerza się dla dowolnych $M, N \in \mathcal{M}^{2,c}_{loc}$.

7. Z Wniosku 1 wynika, że jeśli $M = \int XdW$, $X \in \Lambda^2_T$, to

$$V_n(M,t) \xrightarrow{\mathbf{P}} \int X^2 ds \;\text{ czyli }\; \langle M \rangle = \int X^2 ds.$$

   Niech teraz $M = \int XdW$, $N = \int YdW$, $X, Y \in \Lambda^2_T$. Wówczas

$$\leftarrow M, N \rightarrow = \int XY ds.$$

8. To samo co w powyższym punkcie zachodzi gdy zamiast pary (W, t), weźmiemy $(M, \langle M \rangle)$.

Definicja 2 *Proces Y nazywamy lokalnie ograniczonym, jeśli istnieje ciąg momentów zatrzymania τ_n taki, że $Y^{\tau_n} - Y(0)$ jest ograniczony.*

Na przykład jeśli Y ciągły, to jest lokalnie ograniczony. Istotnie wystarczy wziąć $\tau_n = \{t : \ |Y(t) - Y(0)| \geqslant n\}$.

Stwierdzenie 2 *Zachodzą następujące fakty*

1. *Niech $X \in \mathcal{L}^2_T$, Y-prognozowalny ograniczony. Definiujemy $M = \int XdW$, wówczas $\int YdM = \int XYdW$.*

2. *Niech $X \in \Lambda^2_T$, Y-prognozowalny, lokalnie ograniczony, to zachodzi ten sam wzór co w punkcie 1., czyli $\int YdM = \int XYdW$.*

Dowód. (Punkt 1.) Niech $X \in \mathcal{E}$, $Y = \eta_0 1_0 + \sum_{j=1}^m \eta_{j-1} 1_{(t_{j-1},t_j]}$, η_j ograniczone $\mathcal{F}_{t_j}$ mierzalne

$$\int_0^t YdM = \sum_{j=1}^m \eta_{j-1}(M(t_j \wedge t) - M(t_{j-1} \wedge t)) =$$
$$= \sum_{j=1}^m \eta_{j-1} \int_0^{t_j \wedge t} XdW - \int_0^{t_{j-1}\wedge t} XdW = \sum_{j=1}^m \eta_{j-1} \int_{t_{j-1}\wedge t}^{t_j \wedge t} XdW =$$
$$= \sum_{j=1}^m \int_{t_{j-1}\wedge t}^{t_j \wedge t} \eta_{j-1} XdW = \int_0^t YdW.$$

Niech teraz $Y_n \in \mathcal{E}$, $Y_n \to Y$ w $\mathcal{L}^2_T(M)$. To znaczy

$$\mathbf{E}\int_0^t |Y_n(s) - Y(s)|^2 d\langle M\rangle \to 0, \text{ gdy } n \to \infty.$$

Zauważmy (Własność 6.), że $\langle M\rangle = \int X^2 ds$. Zatem

$$\mathbf{E}\int_0^t |Y_n(s) - Y(s)|^2 d\langle M\rangle = \mathbf{E}\int_0^t |Y_n(s) - Y(s)|^2 X(s)^2 ds.$$

Stąd

$$\mathbf{E}\int_0^t |Y_n(s)X(s) - Y(s)X(s)|^2 ds \to 0 \text{ gdy } n \to \infty,$$

co oznacza, że $Y_n X \to YX$ w $\mathcal{L}^2_T(W)$.

(Punkt 2.) (na ćwiczenia)

■

Uwaga 3 *Teza Stwierdzenia 1 pozostaje prawdziwa, gdy zamiast W, weźmiemy dowolny martyngał $Z \in \mathcal{M}^{2,c}$.*

1.3 Całkowanie przez części

Udowodnimy teraz zasadniczy wzór, jak się okaże niezbędny przy dowodzeniu wzoru Ito.

Twierdzenie 3 *Niech $X, Y \in \Lambda^2_T$, $M = \int XdW$, $N = \int YdW$, wówczas*

$$MN = \int MdN + \int NdM + \int XYds =$$
$$= \int MYdW + \int NXdW + \int XYds.$$

Zauważmy, że druga równość wynika ze Stwierdzenia 1 (dla procesów lokalnie ograniczonych). Pierwsza równość wynika ze znacznie ogólniejszego faktu.

Twierdzenie 4 *Niech $M, N \in \mathcal{M}^{2,c}_{loc}$, wówczas*

$$MN = M(0)N(0) + \int MdN + \int NdM + \langle M, N\rangle.$$

Dowód. (1) Po pierwsze zauważmy, że całki $\int MdN, \int NdM$ są dobrze określone, bo M, N są adaptowalne i ciągłe (stąd prognozowalne i lokalnie ograniczone). Zatem $M \in \Lambda^2_T(N)$, $N \in \Lambda^2_T(M)$. Zauwżmy, że

$$\langle \int MdN\rangle = \int M^2 d\langle N\rangle, \;\; \langle \int NdM\rangle = \int N^2 d\langle M\rangle.$$

(2) Można założyć, że $M(0) = N(0) = 0$. Istotnie z definicji

$$\begin{aligned}&\langle M - M(0), N - N(0)\rangle = \langle M, N\rangle,\\ &\int Nd(M - M(0)) = \int NdM, \;\; \int Md(N - N(0)) = \int MdN\end{aligned}$$

oraz $\int M(0)dN = M(0)(N - N(0))$, $\int N(0)dM = N(0)(M - M(0))$. Jeśli zatem pokażemy twierdzenie dla $M - M(0)$, $N - N(0)$, to

$$\begin{aligned}&(M - M(0))(N - N(0)) = \int (M - M(0))d(N - N(0)) + \\ &+ \int (N - N(0))d(M - M(0)) + \langle (M - M(0)), (N - N(0))\rangle = \\ &= \int MdN - M(0)(N - N(0)) + \int NdM - N(0)(N - N(0)) + \langle M, N\rangle.\end{aligned}$$

Wystarczy zauważyć, że

$$(M - M(0))(N - N(0)) = MN - M(0)(N - N(0)) - N(0)(N - N(0)) + M(0)N(0).$$

Zatem zachodzi równość $MN = M(0)N(0) + \int MdN + \int NdM + \langle M, N\rangle$.

(3) Wystarczy udowodnić tezę dla $M = N$, to znaczy

$$M^2 = 2\int MdM + \langle M\rangle.$$

Istotnie stosując powyższą równość do $M + N$, $M - N$ dostajemy

$$\begin{aligned}&MN = \frac{1}{4}((M + N)^2 - (M - N)^2) = \frac{1}{4}(2\int (M + N)d(M + N) + \langle M + N\rangle - \\ &-2\int (M - N)d(M - N) - \langle M - N\rangle) = \int MdN + \int NdM + \langle M, N\rangle,\end{aligned}$$

gdzie w ostatniej linijce skorzystaliśmy ze wzoru na $\langle M, N\rangle$ oraz z liniowści całki stochastycznej, to znaczy

$$\int (X+Y)d(Z_1+Z_2) = \int XdZ_1 + \int XdZ_2 + \int YdZ_1 + \int YdZ_2.$$

Dokonane uproszczenia pozwalają nam przystąpić do zasadniczego dowodu.

(4) Niech $\tau_n = \inf\{t : \ |M(t)| \geqslant n\}$. Zatem M^{τ_n} jest martyngałem ograniczonym. Przypomnijmy, że analogicznie jak dla procesu Wienera można pokazać, że

$$(M^{\tau_n})^2 = 2\int M^{\tau_n} dM^{\tau_n} + \langle M^{\tau_n}\rangle. \tag{1.2}$$

Zachodzi równość $\langle M\rangle^{\tau_n} = \langle M^{\tau_n}\rangle$, a ponadto

$$\begin{aligned}\int_0^t M^{\tau_n} dM^{\tau_n} &= \int_0^{t\wedge\tau_n} M^{\tau_n} dM = \int_0^{t\wedge\tau_n} 1_{[0,\tau_n]} M^{\tau_n} dM = \\ &= \int_0^t 1_{[0,\tau_n]} M dM = \int^{t\wedge\tau_n} MdM.\end{aligned}$$

Przechodząc z n do ∞ w równości

$$(M^{\tau_n})^2(t) = 2\int^{t\wedge\tau_n} MdM + \langle M\rangle^{\tau_n}(t)$$

kończymy dowód twierdzenia.

■

Definicja 3 *Oznaczmy przez $\mathcal{V}^c$ c-procesy ciągłe adaptowalne o skończonym wahaniu na każdym odcinku $[0,t] \subset [0,T)$.*

Lemat 5 *Niech $M \in \mathcal{M}^{2,c}_{loc}$, $A \in \mathcal{V}^c$, wówczas*

$$MA = M(0)A(0) + \int AdM + \int MdA,$$

gdzie całka $\int AdM$ jest całką stochastyczną, a $\int MdA$ zwykłą całką Stiltjesa (zdefiniowaną dla każdego ω).

Dowód. (1) Można założyć, że $M(0) = A(0) = 0$ oraz, że M, A są ograniczone.

(2) Niech $(t_j^n)_n$ będzie ciągiem podziałów normalnych, to znaczy

$$t < T, \ \ 0 = t_0^n < ... < t_m^n = t, \ \ \max_j (t_j^n - t_{j-1}^n) \to 0 \ \text{ gdy } n \to \infty.$$

Wówczas

$$
\begin{aligned}
M(t)A(t) = &\sum_{j=1}^{m_n}(M(t_j^n) - M(t_{j-1}^n))(A(t_j^n) - A(t_{j-1}^n)) + \\
+ &\sum_{j=1}^{m_n} M(t_{j-1}^n)(A(t_j^n) - A(t_{j-1}^n)) + \sum_{j=1}^{m_n} A(t_{j-1}^n)(M(t_j^n) - M(t_{j-1}^n)).
\end{aligned}
$$

Zauważmy, że

$$
\sum_{j=1}^{m_n} M(t_{j-1}^n)(A(t_j^n) - A(t_{j-1}^n)) \to \int_0^t MdA, \quad \sum_{j=1}^{m_n} A(t_{j-1}^n)(M(t_j^n) - M(t_{j-1}^n)) \to \int_0^t AdM
$$

oraz

$$
\begin{aligned}
&|\sum_{j=1}^{m_n}(M(t_j^n) - M(t_{j-1}^n))(A(t_j^n) - A(t_{j-1}^n))| \leqslant \\
&\leqslant \sqrt{(\sum_{j=1}^{m_n}(M(t_j^n) - M(t_{j-1}^n))^2)(\sum_{j=1}^{m_n}(A(t_j^n) - A(t_{j-1}^n))^2)} \leqslant \\
&\leqslant \langle M \rangle(t) \max_j |A(t_j^n) - A(t_{j-1}^n)| \|A\|(t) \to 0,
\end{aligned}
$$

gdzie $\|A\|(t)$ oznacza wahanie procesu A w punkcie t.

■