Kolokwium z Rachunku Prawdopodobieństwa II - 27.01.2006

Za każde z zadań można otrzymać 8 punktów. Należy wybrać 5 zadań.

1. Niech X_n, Y_n będą martyngałami względem tej samej filtracji $\mathcal{F}_n$. Załóżmy, że τ jest momentem zatrzymania, takim, że $X_\tau = Y_\tau$. Wykazać, że zmienne Z_n, dane wzorem
$$Z_n = X_n \quad \text{dla} \quad n \leqslant \tau,$$
$$Z_n = Y_n \quad \text{dla} \quad n > \tau$$
również tworzą martyngał (względem $\mathcal{F}_n$).

2. Zmienne $X_1, X_2, \dots$ są niezależne, o tym samym rozkładzie, takim że $\mathbb{E}X_i = 0$, $\mathbb{E}X_i^2 = 1$. Zbadać słabą zbieżność ciągu
$$Y_n = \frac{\sum_{k=1}^n \sqrt{k} X_k}{n}.$$

3. Niech $X_1, X_2, \dots$ będą całkowalnymi zmiennymi losowymi na tej samej przestrzeni probabilistycznej, takimi że $X_n \geqslant 0$ p.n. oraz
$$\mathbb{E}(X_{n+1}|X_1, \dots, X_n) = X_n + \frac{1}{n(n+1)}.$$
Wykazać, że ciąg $(X_n)_n$ jest z prawdopodobieństwem 1 zbieżny do skończonej granicy.

4. Niech $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem zmiennych losowych $\mathcal{F}_n$-adaptowanych, całkowalnych. Wykaż, że istnieje dokładnie jeden rozkład $X_n = Y_n + Z_n$ taki, że $(Y_n, \mathcal{F}_n)$ jest martyngałem, a Z_n spełnia
   (a) $Z_0 = 0$ oraz
   (b) Z_n jest $\mathcal{F}_{n-1}$ mierzalne dla $n \geqslant 1$.

   Udowodnij, że X_n jest podmartyngałem wtedy i tylko wtedy, gdy Z_n jest niemalejący.

5. W czasie szczytu liczba rozmów łączonych przez centralę telefoniczną w ciągu jednej godziny ma rozkład Poissona z parametrem 100. Zakładając niezależność liczby rozmów w różnych godzinach, oszacuj prawdopodobieństwo, że centrala połączy w ciągu 400 kolejnych godzin szczytu pomiędzy 40 tysięcy, a 42 tysiące rozmów.

6. W dużym domu są dwie spiżarnie, kot i mysz. Każdej nocy mysz wybiera jedną spiżarnię na posiłek, zaś kot udaje się do jednej ze spiżarni na łowy. Jeżeli kot i mysz znajdą się w tej samej spiżarni, kot może złapać mysz z prawdopodobieństwem 1/3. Pierwszej nocy kot i mysz wybierają spiżarnie z równym prawdopodobieństwem (niezależnie). Każdej kolejnej nocy (aż do złapania myszy przez kota) mysz zmienia spiżarnię z prawdopodobieństwem 1/3, jeśli poprzedniej nocy nie spotkała kota, z prawdopodobieństwem 2/3, jeśli poprzedniej nocy spotkała kota. Kot zmienia spiżarnię z prawdopodobieństwem 2/3, jeśli poprzedniej nocy nie nastąpiło spotkanie, 1/3 jeśli spotkanie nastąpiło. Wykazać, że kot z prawdopodobieństwem 1 złapie mysz. Niech N oznacza liczbę nocy jakie upłynęły do momentu złapania myszy. Znaleźć $\mathbb{E}N$.

7. Wykaż, że dla dowolnego martyngału X_n, takiego, że $\mathbb{E}X_n^2 < \infty$ dla $n = 1, 2, \dots$, zachodzi wzór
$$\mathbb{E}X_n^2 = \mathbb{E}X_0^2 + \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i - X_{i-1})^2.$$

Powodzenia!!!