Kolokwium z Rachunku Prawdopodobieństwa II - 25.11.2005

Za każde z zadań można otrzymać 8 punktów. Należy wybrać 5 zadań.

1. Niech wektor losowy $(X, Y) \in \mathbb{R}^2$ ma rozkład jednostajny na kole o środku w punkcie $(0, 0)$ i promieniu 1. Znaleźć $\mathbb{E}(X + Y|X - Y)$.

2. Rozważmy zbiór $\Lambda \subseteq \mathbb{R}_+$ oraz rodzinę rozkładów na prostej $\mathcal{M} = \{\mathrm{Exp}(\lambda)\colon \lambda \in \Lambda\}$, gdzie $\mathrm{Exp}(\lambda)$ oznacza rozkład wykładniczy z parametrem λ. Wykazać, że rodzina $\mathcal{M}$ jest ciasna wtedy i tylko wtedy, gdy $\inf \Lambda > 0$

3. Niech $X_1, X_2, \ldots,$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie jednostajnym na odcinku $(0, 1)$. Zbadać słabą zbieżność ciągu $Z_n = n \min(X_1, \ldots, X_n)$.

4. Niech X_n, Y_n będą rzeczywistymi zmiennymi losowymi, określonymi na tej samej przestrzeni probabilistycznej, takimi że $X_n Y_n \Rightarrow X$ oraz $Y_n \Rightarrow 0$. Niech ponadto $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją rózniczkowalną. Wykazać, że

$$X_n(f(Y_n) - f(0)) \Rightarrow X f'(0).$$

   Wskazówka: Zauważyć, że $X_n(f(Y_n) - f(0)) = X_n Y_n g(Y_n)$, gdzie

$$g(y) = \begin{cases} \frac{f(y)-f(0)}{y} & \text{gdy} \quad y \neq 0 \\ f'(0) & \text{gdy} \quad y = 0. \end{cases}$$

   Zbadać zbieżność $g(Y_n)$, a następnie skorzystać z Lematu Słuckiego.

5. Niech X, Y będą niezależnymi zmiennymi Poissona z parametrem 1. Wyznaczyć funkcję charakterystyczną zmiennej losowej $Z = X - Y$.

6. Niech X, Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie jednostajnym na odcinku $[0, 1]$ zaś ε zmienną Rademachera, niezależną od X, Y. Znaleźć $\mathbb{E}(\cos(\varepsilon X + Y)|X)$.

7. Rozważmy niezależne zmienne losowe $N, X_1, X_2, \ldots$, gdzie N ma rozkład Poissona z parametrem 1, zaś X_i mają taki sam rozkład o funkcji charakterystycznej φ. Wyznaczyć funkcję charakterystyczną zmiennej $Z = \sum_{i=1}^{N} X_i$.

Powodzenia!!!