Dodatkowe zadania domowe

Za każde zadanie można otrzymać maksymalnie 5 punktów. Zadania traktowane są jako uzupełniające, tzn. suma uzyskanych z nich punktów oraz punktów już zdobytych z prac domowych nie może przekroczyć maksymalnej możliwej do uzyskania sumy punktów z dotychczasowych prac domowych w poszczególnych grupach (w przypadku przekroczenia zaokrąglamy w dół).

1. Z odcinka $[-1,1]$ wybrano losowo dwie liczby x, y. Jakie jest prawdopodobieństwo, że odległość punktu (x, y) od punktu $(0, 0)$ jest mniejsza od 1?

2. Jest n osób: $A_1, \ldots, A_n$. Osoba A_1 dostaje kartkę ze znakiem $+$. Z prawdopodobieństwem p, $0 < p < 1$, zmienia znak na przeciwny i podaje kartkę osobie A_2, która z prawdopodobieństwem p zmienia znak na przeciwny i podaje kartkę osobie A_3, itd. Na zakończenie, po oddaniu kartki przez osobę A_n, zaobserwowano znak $+$. Jakie jest prawdopodobieństwo, że osoba A_1 nie zmieniła znaku?

3. W mieście działają dwa przedsiębiorstwa taksówkowe: Zielone Taxi (85% samochodów) i Niebieskie Taxi (15%). Świadek nocnego wypadku zakończonego ucieczką kierowcy twierdzi, że samochód był niebieski. Eksperymenty wykazały, że świadek rozpoznaje kolor poprawnie w 80% przypadków, a myli się w 20% przypadków. Jaka jest szansa, że w wypadku uczestniczyła niebieska taksówka?

4. Jeśli μ jest rozkładem prawdopodobieństwa na $\mathbb{R}^n$, to jego rozkładem brzegowym nazywamy rozkład
$$\mu_j(B) = \mu(\mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R} \times B \times \ldots \times \mathbb{R}),$$
gdzie B występuje na j-tym miejscu w iloczynie kartezjańskim, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Udowodnić, że jeśli rozkład μ jest ciągły (tzn. μ ma gęstość), to jego rozkłady brzegowe też są ciągłe. Pokazać, że implikacja przeciwna nie zachodzi.

5. Podać przykład dystrybuanty, której zbiór punktów nieciągłości jest gęsty w $\mathbb{R}$.

6. Niech $Z = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i 2^{-i}$ gdzie ε_i - niezależne zmienne Rademachera, tzn. $\mathbb{P}(\varepsilon_i = 1) = \mathbb{P}(\varepsilon_i = -1) = 1/2$. Wykazać, że Z jest dobrze określoną zmienną losową oraz ma rozkład jednostajny na $[-1, 1]$.

7. W chwili t, $t = 2, 3, \ldots$ cząstka albo znika z prawdopodobieństwem q, albo przekształca się w m takich samych cząstek z prawdopodobieństwem $p = 1-q$. Jaka jest średnia liczba cząstek w n-tym pokoleniu (startujemy z pojedynczej cząstki)?

8. Wyznaczyć rozkład sumy trzech niezależnych zmiennych losowych o rozkładach jednostajnych na przedziale $[0, 1]$.

9. Niech $U = \min(X, Y)$, $V = \max(X, Y) - \min(X, Y)$, gdzie X, Y są niezależne i mają ten sam rozkład wykładniczy z parametrem λ. Wykazać, że U i V są niezależne.