Uniwersytet Warszawski
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki

Radosław Adamczak
Nr albumu: 181076

Symetryzacje dwupunktowe i radialne, a nierówność izoperymetryczna

Praca licencjacka
na kierunku MATEMATYKA

Praca wykonana pod kierunkiem
dr. Rafała Latały

Maj 2001

Pracę przedkładam do oceny

Data Podpis autora pracy:

Praca jest gotowa do oceny przez recenzenta

Data Podpis kierującego pracą:

Streszczenie

Praca poświęcona jest własnościom funkcji radialnych oraz symetryzacji dwupunktowych, określonych na przestrzeniach metrycznych, z zadaną miarą borelowską, spełniających pewne dodatkowe założenia. Jako wnioski wyprowadzone zostają m. in. nierówności izoperymetryczne w $\mathbb{R}^n$ oraz S^n.

Słowa kluczowe

Symetryzacje dwupunktowe, funkcje radialne, nierówność izoperymetryczna, nierówności całkowe

Klasyfikacja tematyczna

28A75 Length, area, volume, other geometric measure theory
26B15 Integration: length, area, volume
26D15 Inequalities for sums, series and integrals

1. Wstęp

Metody symetryzacyjne zostały wprowadzone do matematyki przez Jakoba Steinera w połowie XIX w. i zostały szybko docenione jako użyteczne narzędzie do dowodu nierówności geometrycznych związanych z miarą. Na przestrzeni lat wprowadzone zostały różne odmiany symetryzacji, odpowiednie dla poszczególnych problemów czy rozkładów miar, uogólniona została także klasyczna symetryzacja Steinera.

Niniejsza praca poświęcona jest symetryzacji dwupunktowej oraz radialnej na przestrzeni metrycznej $\mathcal{M}$ z miarą borelowską. Udowodnione zostały istnienie i jednoznaczność symetryzacji radialnej funkcji przy pewnych naturalnych założeniach odnośnie struktury przestrzeni $\mathcal{M}$. Przedstawione zostało również graniczne zachowanie symetryzacji radialnej, w szczególności ciągłość przy różnych rodzajach zbieżności ciągu funkcji. Główne twierdzenie prezentowane w pracy dotyczy nie zwiększania wartości pewnego funkcjonału przez opisywane symetryzacje. Dowód w przypadku symetryzacji dwupunktowej jest elementarny, natomiast dla symetryzacji radialnej bazuje w istotny sposób na własnościach symetryzacji dwupunktowej, ukazując związek między tymi symetryzacjami.

Kolejnym prezentowanym zagadnieniem jest zamkniętość zbioru funkcji lipschitzowskich o ograniczonym nośniku ze względu na symetryzację radialną. Konsekwencją tego faktu jest m. in. klasyczna nierówność izoperymetryczna w przestrzeni $\mathbb{R}^n$ oraz jej analog dla sfery S^n, będący podstawą niektórych dowodów znanej nierówności izoperymetrycznej dla rozkładów gaussowskich.

2. Podstawowe definicje i oznaczenia

W dalszej części pracy $\mathcal{M}$ oznaczać będzie przestrzeń metryczną z metryką ρ oraz miarą borelowską μ, o następującej własności:

$$0 < \mu(B) < \infty \quad \text{dla dowolnej kuli} \quad B \subseteq \mathcal{M}.$$

Z reguły obowiązywać będzie dodatkowe założenie

$$\mu(S(x,r)) = 0,$$

gdzie $S(x,r) = \{y \in \mathcal{M} \colon \rho(x,y) = r\}$.

Istotną rolę odgrywać będzie pewna relacja na $\mathcal{M}$ oraz związana z nią klasa ρ-izometrii przestrzeni $\mathcal{M}$, zdefiniowane poniżej:

Definicja 1 *Niech i będzie ρ-izometrią, zdefiniujmy relację $\sim_i$ na $\mathcal{M}$ poprzez równoważność*

$$x \sim_i y \iff \rho(x,y) < \rho(x,i(y)).$$

Uwaga Jeśli i jest inwolucją, to relacja $\sim_i$ jest symetryczna.

Definicja 2

$$\mathcal{J} = \left\{ i \colon \mathcal{M} \to \mathcal{M} | i^2 = Id,\ i \text{ jest } \rho\text{-izometrią},\ i(\mu) = \mu,\ \sim_i \text{ jest przechodnia na } \mathcal{M} \right\}.$$

W przestrzeni $\mathcal{M}$ wyróżniony zostanie ustalony punkt x_0. W większości ważnych przypadków będziemy zakładać, że spełnione jest:

Podstawowe założenie *Dla dowolnych $x, y \in \mathcal{M}$ istnieje $i \in \mathcal{J}$, takie, że $i(x) = y$.*

Inne oznaczenia:

- $\mathbb{R}$ - zbiór liczb rzeczywistych,
- $\mathbb{R}^+ = \{t \in \mathbb{R} \colon t \geq 0\}$,
- $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$,
- $B(y, r) = \{x \in \mathcal{M} \colon \rho(x, y) < r\}$ - kula otwarta o środku w y i promieniu r,
- $\bar{B}(y, r) = \{x \in \mathcal{M} \colon \rho(x, y) \leq r\}$ - kula domknięta o środku w y i promieniu r,
- $\mu_r = \mu(B(x_0, r))$.
- Dla $A \subseteq \mathcal{M}$, $A_\varepsilon = \{x \in \mathcal{M} \colon \rho(A, x) < \varepsilon\}$ - ε-otoczka zbioru A,
- $\mathrm{Lip}(C)$ - zbiór funkcji lipschitzowskich ze stałą C, określonych na przestrzeni $\mathcal{M}$, o wartościach w $\mathbb{R}$.

3. Przykłady

Do klasy przestrzeni spełniających podstawowe założenie należą:

1. $\mathcal{M} = \mathbb{R}^n$, z dowolnym ustalonym punktem x_0 oraz odległością euklidesową i miarą Lebesgue'a.
   Dowód
   Ponieważ dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}^n$ istnieje symetria względem pewnej hiperpłaszczyzny $(n-1)$-wymiarowej, przeprowadzająca x w y, wystarczy pokazać, że tego typu symetrie należą do $\mathcal{J}$. To jest prawda, gdyż dwa punkty $x, y \in \mathbb{R}^n$ są w relacji $x \sim_i y$ wtedy i tylko wtedy, gdy leżą po tej samej stronie płaszczyzny symetrii.

2. $\mathcal{M} = S^n$ - sfera n-wymiarowa z odległością geodezyjną, miarą Haussdorfa i dowolnie ustalonym punktem x_0.
   Dowód
   Teza wynika z faktu, że symetrie względem hiperpłaszczyzn n-wymiarowych w $\mathbb{R}^{n+1}$, przechodzących przez środek kuli są izometriami zachowującymi miarę Haussdorfa, zaś odległość geodezyjna jest monotoniczną funkcją odległości euklidesowej.

3. $\mathcal{M} = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ - zbiór Cantora z miarą, będącą produktem symetrycznych miar probabilistycznych na $\{0, 1\}$ oraz odległością $\rho((a_n), (b_n)) = 2^{-\inf\{n \colon a_n \neq b_n\}}$.
   Dowód
   Dla zbioru $K \subseteq \mathbb{N}$ niech $i_K \colon \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ będzie funkcją zdefiniowaną wzorem
   $$i_K((a_n))(k) = \begin{cases} a_n & \text{dla} \quad k \in K, \\ 1 - a_n & \text{dla} \quad k \notin K. \end{cases}$$
   Wówczas $i_k \in \mathcal{J}$. Oczywiście i_K jest izometrią i inwolucją. Przekształcenie i_K zachowuje miarę, gdyż zachowuje miarę cylindrów, które generują σ-ciało zbiorów mierzalnych. Aby wykazać, że $\sim_{i_K}$ jest przechodnia, rozważmy dowolne parami różne $a = (a_n)$, $b = (b_n)$, $c = (c_n)$, takie, że $a \sim_{i_K} b$ oraz $b \sim_{i_K} c$. Niech $l_0 = \min\{n \colon a_n \neq b_n\}$, $m_0 = \min\{n \colon b_n \neq c_n\}$, $n_0 = \min\{n \colon a_n \neq c_n\}$. Istnieją $j, k \notin K$, takie, że $j < l_0$, $k < m_0$. Mamy $n_0 \geq m_0$ lub $n_0 \geq l_0$. Zatem
   $$\rho(a, i_K(c)) \geq 2^{-\min(j,k)} > 2^{-n_0} = \rho(a, c),$$
   czyli $a \sim_{i_K} c$. Relacja $\sim_{i_K}$ jest więc przechodnia. Dla dowolnych punktów $a, b \in \mathcal{M}$ istnieje zbiór K, taki, że $i_K(a) = b$. Podstawowe założenie jest więc spełnione.

4. Symetryzacja dwupunktowa funkcji

Definicja 3 *Dla $i \in \mathcal{J}$ definiujemy zbiory*

$$\begin{aligned} M_i^+ &= \{x \in \mathcal{M}\colon\ x \sim_i x_0,\} \\ M_i^- &= i(M_i^+) = \{x \in \mathcal{M}\colon ix \sim_i x_0\}. \end{aligned}$$

Uwaga M_i^+ oraz M_i^- są zbiorami otwartymi.

Dowód Niech $x \in M_i^+$. Dla y oddalonych od x o mniej niż $\frac{1}{2}(\rho(ix, x_0) - \rho(x, x_0))$ mamy

$$\rho(iy, x_0) \geq \rho(x_0, ix) - \rho(ix, iy) = \rho(x_0, ix) - \rho(x, y) > \rho(x_0, x) + \rho(x, y) \geq \rho(x_0, y).$$

Dowodzi to otwartości zbioru M_i^+. Zbiór M_i^- jest otwarty jako przeciwobraz M_i^+ przy przekształceniu ciągłym i.

□

Definicja 4 *Dla $i \in \mathcal{J}$ oraz $f\colon \mathcal{M} \to \mathbb{R}$, mierzalnej definiujemy funkcję*

$$f_i^{\#}(x) = \begin{cases} \max(f(x), f(ix)) & dla \quad x \in M_i^+ \\ \min(f(x), f(ix)) & dla \quad x \in M_i^- \\ f(x) & dla \quad x \notin M_i^+ \cup M_i^-. \end{cases}$$

Lemat 1 *Niech $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ będzie funkcją wypukłą, natomiast $k\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ funkcją nierosnącą. Załóżmy ponadto, że $i \in \mathcal{J}$. Wówczas dla dowolnych funkcji mierzalnych $f, g\colon \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ zachodzi nierówność:*

$$\int_{\mathcal{M}}\int_{\mathcal{M}} \varphi(f_i^{\#}(x) - g_i^{\#}(y))k(\rho(x, y))\mu(dx)\mu(dy) \leq \int_{\mathcal{M}}\int_{\mathcal{M}} \varphi(f(x) - g(y))k(\rho(x, y))\mu(dx)\mu(dy)$$

Jeśli funkcja φ jest ściśle wypukła, natomiast k ściśle malejąca oraz całki po obu stronach są równe i skończone, to prawie wszędzie na $(M_i^+ \cup M_i^-) \times (M_i^+ \cup M_i^-)$ zachodzi $f_i^{\#}(x) = f(x)$ i $g_i^{\#}(y) = g(y)$ lub $f_i^{\#}(x) = f(ix)$ i $g_i^{\#}(y) = g(iy)$.

Dowód Przekształcenie i z założenia zachowuje miarę μ, zatem zachodzą równości

$$4 \cdot \int_{\mathcal{M}}\int_{\mathcal{M}} \varphi(f_i^{\#}(x) - g_i^{\#}(y))k(\rho(x, y))\mu(dx)\mu(dy) = \int_{\mathcal{M}}\int_{\mathcal{M}} a(x, y)\mu(dx)\mu(dy),$$

gdzie

$$\begin{aligned} a(x, y) &= \varphi(f_i^{\#}(x) - g_i^{\#}(y))k(\rho(x, y)) + \varphi(f_i^{\#}(ix) - g_i^{\#}(y))k(\rho(ix, y)) \\ &\quad + \varphi(f_i^{\#}(x) - g_i^{\#}(iy))k(\rho(x, iy)) + \varphi(f_i^{\#}(ix) - g_i^{\#}(iy))k(\rho(ix, iy)). \end{aligned}$$

Podobnie

$$4 \cdot \int_{\mathcal{M}}\int_{\mathcal{M}} \varphi(f(x) - g(y))k(\rho(x, y))\mu(dx)\mu(dy) = \int_{\mathcal{M}}\int_{\mathcal{M}} b(x, y)\mu(dx)\mu(dy),$$

gdzie

$$\begin{aligned} b(x, y) &= \varphi(f(x) - g(y))k(\rho(x, y)) + \varphi(f(ix) - g(y))k(\rho(ix, y)) \\ &\quad + \varphi(f(x) - g(iy))k(\rho(x, iy)) + \varphi(f(ix) - g(iy))k(\rho(ix, iy)). \end{aligned}$$

Dla udowodnienia żądanej nierówności wystarczy więc pokazać, że dla dowolnych $x, y \in \mathcal{M}$ zachodzi

$$a(x,y) \leq b(x,y).$$

Jeśli $x, y \notin M_i^+ \cup M_i^-$, to także $ix, iy \notin M_i^+ \cup M_i^-$ i mamy $f_i^\#(t) = f(t)$ oraz $g_i^\#(u) = g(u)$, dla $t = x, ix$, $u = y, iy$, zatem $a(x,y) = b(x,y)$.

Jeśli $x \in M_i^+ \cup M_i^-$, $y \notin M_i^+ \cup M_i^-$, to $iy \notin M_i^+ \cup M_i^-$, z przechodniości $\sim_i$ mamy więc $\rho(x,y) = \rho(x,iy)$. Przekształcenie i jest ρ-izometrią i inwolucją, więc $\rho(x,y) = \rho(ix,iy)$ oraz $\rho(x,iy) = \rho(ix,y)$. Razem daje to równość

$$\rho(x,y) = \rho(ix,iy) = \rho(x,iy) = \rho(ix,y),$$

skąd wobec $g_i^\#(u) = g(u)$ dla $u = y, iy$, mamy ponownie $a(x,y) = b(x,y)$.

Analogicznie $a(x,y) = b(x,y)$ dla $x \notin M_i^+ \cup M_i^-$, $y \in M_i^+ \cup M_i^-$.

Pozostaje rozpatrzyć przypadek $x, y \in M_i^+ \cup M_i^-$. Ponieważ

$$\begin{aligned} a(x,y) = a(ix,y) = a(x,iy) = a(ix,iy), \\ b(x,y) = b(ix,y) = b(x,iy) = b(ix,iy), \end{aligned}$$

bez straty ogólności możemy przyjąć $x, y \in M_i^+$. Należy więc wykazać, że:

$$\begin{aligned} k(\rho(x,y))\big(\varphi(f(x)-g(y)) + \varphi(f(ix)-g(iy)) - \varphi(f_i^\#(x)-g_i^\#(y)) - \varphi(f_i^\#(ix)-g_i^\#(iy))\big) \geq \\ k(\rho(x,iy))\big(\varphi(f_i^\#(ix)-g_i^\#(y)) + \varphi(f_i^\#(x)-g_i^\#(iy)) - \varphi(f(ix)-g(y)) - \varphi(f(x)-g(iy))\big). \end{aligned} \tag{1}$$

Z przechodniości $\sim_i$ mamy $\rho(x,y) < \rho(x,iy)$, więc $k(\rho(x,y)) \geq k(\rho(x,iy))$. Ponadto wyrażenie w nawiasie po lewej stronie nierówności jest nieujemne. Aby to wykazać, wprowadźmy następujące oznaczenia:

$$\begin{aligned} a &= f(x) - g(y), \\ b &= f(ix) - g(iy), \\ a^\# &= f_i^\#(x) - g_i^\#(y), \\ b^\# &= f_i^\#(ix) - g_i^\#(iy). \end{aligned}$$

Mamy $a + b = a^\# + b^\#$ oraz $|a-b| \geq |a^\# - b^\#|$, gdyż:

$$\begin{aligned} |a-b| &= |f(x) - f(ix) - (g(x) - g(iy))| \geq \\ &\geq ||f(x) - f(ix)| - |g(x) - g(iy)|| = \\ &= |(f^\#(x) - f^\#(ix)) - (g^\#(x) - g^\#(iy))| = \\ &= |a^\# - b^\#|. \end{aligned}$$

Z wypukłości funkcji φ mamy więc: $\varphi(a) + \varphi(b) \geq \varphi(a^\#) + \varphi(b^\#)$. Wyrażenie w nawiasie po prawej stronie nierówności (1) jest równe wyrażeniu po lewej stronie, gdy liczby $f(x) - f(ix)$ oraz $g(y) - g(iy)$ są przeciwnego znaku, w przeciwnym przypadku oba te wyrażenia są równe 0. Dowodzi to nierówności (1) i tym samym pierwszej części lematu.

Pozostaje rozpatrzyć przypadek równości, przy założeniu ścisłej wypukłości φ i monotoniczności k. Wówczas dla $x, y \in M_i^+$ zachodzi $k(\rho(x,y)) > k(\rho(x,iy))$. Ponadto przy wprowadzonych uprzednio oznaczeniach, dla $x, y \in M_i^+$ takich, że liczby $f(x) - f(ix)$ oraz $g(y) - g(iy)$ są przeciwnego znaku mamy $|a-b| > |a^\# - b^\#|$, więc $\varphi(a) + \varphi(b) > \varphi(a^\#) + \varphi(b^\#)$. Zatem jeśli $\mu(M_i^+) > 0$, to $f_i^\#(x) = f(x)$ i $g_i^\#(y) = g(y)$ lub $f_i^\#(x) = f(ix)$ i $g_i^\#(y) = g(iy)$ prawie wszędzie na $M_i^+ \times M_i^+$ lub równoważnie

$$f_i^\#(x) = f(x) \text{ i } g_i^\#(y) = g(y) \text{ lub } f_i^\#(x) = f(ix) \text{ i } g_i^\#(y) = g(iy) \text{ prawie wszędzie na } (M_i^+ \cup M_i^-)^2.$$

Jeśli $\mu(M_i^+) = 0$, to również $\mu(M_i^-) = 0$ (gdyż i zachowuje miarę), zatem $f_i^\# = f$ i $g_i^\# = g$ p.w. na $\mathcal{M}$.

$\square$

Lemat 2 *Jeśli $i \in \mathcal{J}$, oraz funkcja f jest lipschitzowska ze stała C, to $f_i^{\#}$ również jest lipschitzowska ze stałą C.*

Dowód Należy wykazać, że

$$|f_i^{\#}(x) - f_i^{\#}(y)| \leq C \cdot \rho(x, y)$$

dla dowolnych $x, y \in \mathcal{M}$. Jeśli $x, y \notin M_i^+ \cup M_i^-$ jest to oczywiście prawda. Jeśli dokładnie jeden z punktów x, y należy do zbioru $M_i^+ \cup M_i^-$, to podobnie jak w poprzednim lemacie mamy:

$$\rho(x, y) = \rho(ix, y) = \rho(x, iy) = \rho(ix, iy),$$

zatem teza też zachodzi. Dla $x, y \in M_i^+$ wystarczy rozważyć przypadek $f_i^{\#}(x) = f(x)$, $f_i^{\#}(y) = f(iy)$. Ale wówczas

$$f(ix) - f(iy) \leq f_i^{\#}(x) - f_i^{\#}(y) \leq f(x) - f(y),$$

więc teza jest prawdziwa. Gdy $x, y \in M_i^-$ podobnie. Jeśli np. $x \in M_i^+$, $y \in M_i^-$ to

$$\rho(x, iy) = \rho(ix, y) \leq \rho(x, y) = \rho(ix, iy),$$

co również implikuje tezę.

□

W dalszej części potrzebny będzie jeszcze jeden techniczny lemat:

Lemat 3 *Niech f będzie funkcją mierzalną, $i \in \mathcal{J}$. Wówczas dla dowolnej liczby rzeczywistej t zbiory $\{f > t\}$ oraz $\{f_i^{\#} > t\}$ są równej miary.*

Dowód Ustalmy $t \in \mathbb{R}$. Dla funkcji mierzalnej g niech

$$\begin{aligned}
A_1(g) &= \{x \in M_i^+ \cup M_i^- \colon g(x) > t \text{ i } g(ix) > t\}, \\
A_2(g) &= \{x \in M_i^+ \colon g(x) > t \text{ i } g(ix) \leq t\}, \\
A_3(g) &= \{x \in M_i^- \colon g(x) > t \text{ i } g(ix) \leq t\}, \\
A_4(g) &= \{x \in \mathcal{M} \backslash (M_i^- \cup M_i^+) \colon g(x) > t\}.
\end{aligned}$$

Oczywiście

$$\{g > t\} = \bigcup_{j=1}^{4} A_j(g),$$

przy czym powyższa suma jest sumą zbiorów rozłącznych. Zauważmy, że wprost z definicji operacji $(\cdot)_i^{\#}$ wynikają równości

$$\begin{aligned}
A_1(f) &= A_1(f_i^{\#}) \\
A_4(f) &= A_4(f_i^{\#}).
\end{aligned}$$

Zbiór $A_3(f_i^{\#})$ jest pusty, ponadto

$$\begin{aligned}
x \in A_2(f_i^{\#}) &\iff f_i^{\#}(x) > t \text{ i } f_i^{\#}(ix) \leq t \\
&\iff (f(x) > t \text{ i } f(ix) \leq t) \text{ lub } (f(x) \leq t \text{ i } f(ix) > t) \\
&\iff x \in A_2(f) \text{ lub } ix \in A_3(f) \\
&\iff x \in A_2(f) \text{ lub } x \in i(A_3(f)).
\end{aligned}$$

Zatem, ponieważ i zachowuje miarę

$$\mu(A_2(f_i^{\#})) = \mu(A_2(f)) + \mu(A_3(f)),$$

co kończy dowód lematu.

□

5. Funkcje radialne

Definicja 5 *Funkcję $f\colon \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ nazywamy* radialną *jeśli dla dowolnych $x, y \in \mathcal{M}$ zachodzi*

$$\rho(x_0, x) < \rho(x_0, y) \Rightarrow f(y) \leq f(x).$$

Lemat 4 *Funkcja radialna jest stała na sferach o środkach w punkcie x_0, za wyjątkiem co najwyżej przeliczalnej liczby sfer.*

Dowód Niech f będzie funkcją radialną. Oznaczmy $A = \{r \in \mathbb{R} : S(x_0, r) \neq \emptyset\}$. Niech B oznacza zbiór punktów izolowanych zbioru A. B jest zbiorem przeliczalnym. Zdefiniujmy funkcję $f^+, f^-\colon A \to \mathbb{R}$. Niech

$$\begin{aligned} f^+(r) &= \sup_{x \in S(x_0, r)} f(x), \\ f^-(r) &= \inf_{x \in S(x_0, r)} f(x). \end{aligned}$$

Dla funkcji f^+, f^- zachodzi

$$\begin{aligned} f^+(r) &\geq f^-(r) \quad \text{dla dowolnego } r \in A \text{ oraz} \\ f^-(r_1) &\geq f^+(r_2) \quad \text{dla dowolnych } r_1, r_2 \in A,\ r_1 < r_2. \end{aligned}$$

W szczególności obie te funkcje są nierosnące, a zatem zbiór punktów zbioru $A \backslash B$, w których jedna z tych funkcji jest nieciągła, jest przeliczalny. Z kolei dla punktów ciągłości f^+, f^- nie należących do zbioru B mamy

$$\begin{aligned} f^+(r_0) &\leq \lim_{r \to r_0^-} f^-(r) = f^-(r_0), \text{ gdy } r_0 \text{ jest lewostronnym punktem skupienia } A, \\ f^-(r_0) &\geq \lim_{r \to r_0^+} f^+(r) = f^+(r_0), \text{ gdy } r_0 \text{ jest prawostronnym punktem skupienia } A, \end{aligned}$$

Stąd zbiór tych $r \in A$, dla których $f^+(r) \neq f^-(r)$, jest przeliczalny.

□

Definicja 6 *Niech rodzina $\mathcal{S}$ będzie określona następująco*

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \{f\colon \mathcal{M} \to \mathbb{R} : f \text{ jest mierzalna } \} \text{ dla } \mu(\mathcal{M}) < \infty, \\ \mathcal{S} &= \{f\colon \mathcal{M} \to \mathbb{R}^+ : f \text{ jest mierzalna i } \forall_{t>0}\, \mu(f > t) < \infty\} \text{ dla } \mu(\mathcal{M}) = \infty. \end{aligned}$$

Definicja 7 *Dla $f \in \mathcal{S}$ niech $s_f\colon \mathbb{R} \to \bar{\mathbb{R}}$ będzie funkcją zdefiniowaną wzorem*

$$s_f(t) = \mu(f > t).$$

Uwaga $s_f(t)$ jest funkcją nierosnącą, prawostronnie ciągłą. Ponadto $\lim_{t\to\infty} s_f(t) = 0$.

Definicja 8 (Symetryzacja radialna funkcji) *Dla funkcji $f \in \mathcal{S}$ przez f^* oznaczamy dowolną funkcję radialną $g\colon \mathcal{M} \to \bar{\mathbb{R}}$, taką że*

$$\forall_{t \in R}\, s_{f^*}(t) = s_f(t).$$

Lemat 5 *Jeśli dla każdej liczby r zachodzi $\mu(S(x_0, r)) = 0$, to funkcja μ_r jest funkcją ciągłą.*

Dowód Niech $r \in \mathbb{R}^+$. Mamy

$$B(x_0, r) = \bigcup_{n=1}^{\infty} B(x_0, r - \frac{1}{n}).$$

Zatem

$$\lim_{n\to\infty} \mu_{r-\frac{1}{n}} = \mu_r,$$

co razem z monotonicznością μ_r, daje lewostronną ciągłość. Podobnie

$$B(x_0, r) \cup S(x_0, r) = \bigcap_{n=1}^{\infty} B(x_0, r + \frac{1}{n}).$$

Stąd, ponieważ miary kul w $\mathcal{M}$ są skończone oraz $\mu(S(x_0, r)) = 0$, mamy

$$\lim_{n\to\infty} \mu_{r+\frac{1}{n}} = \mu_r.$$

To implikuje prawostronną ciągłość funkcji μ_r.

□

Lemat 6 *Jeśli dla każdej liczby r zachodzi $\mu(S(x_0, r)) = 0$, to f^* istnieje dla dowolnej funkcji $f \in \mathcal{S}$.*

Dowód Zdefiniujmy funkcję $F\colon \mathbb{R}^+ \to \bar{\mathbb{R}}$ wzorem

$$F(r) = \inf\{t\colon s_f(t) \le \mu_r\}.$$

Niech $f^*(x) = F(\rho(x, x_0))$ dla $x \in \mathcal{M}$. Ustalmy teraz $t_0 \in \mathbb{R}$. Rozpatrzmy $r_0 = \inf\{r\colon \mu_r = s_f(t_0)\}$.

Jeśli $\{r\colon \mu_r = s_f(t_0)\} = \emptyset$, to z własności Darboux funkcji μ_r wynika, że $\mu_r < s_f(t_0)$ dla każdego r. Stąd $s_f(t_0) = \mu(\mathcal{M})$. Ponadto dla dowolnego $x \in \mathcal{M}$, wobec monotoniczności i prawostronnej ciągłości funkcji s_f, mamy:

$$\inf\{t\colon s_f(t) \le \mu_{\rho(x,x_0)}\} > t_0,$$

zatem

$$f^*(x) > t_0, \text{ czyli } s_{f^*}(t_0) = \mu(\mathcal{M}) = s_f(t_0).$$

Jeśli $\{r\colon \mu_r = s_f(t_0)\} \ne \emptyset$, to $r_0 < \infty$. Niech $x \in B(x_0, r_0)$. Wtedy $\mu_{\rho(x,x_0)} < s_f(t_0)$ i analogicznie jak w poprzednim przypadku $f^*(x) > t_0$. Z kolei dla $x \in \mathcal{M}$, takich, że $\rho(x_0, x) > r_0$, zachodzi

$$t_0 \in \{t\colon s_f(t) \le \mu_{\rho(x,x_0)}\}.$$

Rzeczywiście, z definicji r_0 istnieją $r < \rho(x, x_0)$, takie, że $s(t_0) = \mu_r$. Zatem z monotoniczności μ_r mamy $s(t_0) \le \mu_{\rho(x,x_0)}$. Stąd $f^*(x) \le t_0$.

Udowodniliśmy zatem, że

$$B(x_0, r_0) \subseteq \{f^*(x) > t\} \subseteq B(x_0, r_0) \cup S(x_0, r_0).$$

Ponieważ zbiór punktów oddalonych od x_0 dokładnie o r_0 jest zerowej miary, wynika stąd, równość $s_{f^*}(t_0) = s_f(t_0)$. Funkcja F jest funkcją malejącą, zatem funkcja f^* jest radialna, co kończy dowód lematu.

□

Uwaga Powyższy lemat można rozszerzyć na przypadek miar bezatomowych. W takiej ogólności nie zachodzi jednak jednoznaczność, o której mówi następujący lemat:

Lemat 7 *Jeśli dla każdej liczby r zachodzi $\mu(S(x_0, r)) = 0$, to funkcja f^* jest wyznaczona jednoznacznie z dokładnością do zbioru μ-miary 0.*

Dowód Niech $f \in \mathcal{S}$. Przypuśćmy, że funkcje radialne g,h spełniają warunek

$$s_f(t) = s_g(t) = s_h(t).$$

Z uwagi na lemat 4 możemy zakładać, że funkcje g, h są stałe na zbiorach $S(x_0, r)$. Oznaczmy podobnie jak w dowodzie lematu 4

$$A = \{r \in R\colon\ S(x_0, r) \neq \emptyset\}.$$

Dla $r \in A$ niech

$$G(r) = g(x),\ H(r) = h(x) \text{ dla dowolnego } x \in S(x_0, r).$$

Założenie $\mu(S(x_0, r)) = 0$ implikuje, że A nie ma punktów izolowanych. Rzeczywiście, gdyby r był punktem izolowanym zbioru A, istniałby punkt $x \in S(x_0, r)$ oraz liczba $\varepsilon > 0$, taka, że $B(x, \varepsilon) \subseteq S(x_0, r)$, co wobec $\mu(B(x, \varepsilon)) > 0$ jest niemożliwe. By zakończyć dowód wystarczy więc wykazać, że jeżeli $r \in A$ jest punktem ciągłości funkcji g oraz h, to

$$G(r) = H(r).$$

Przypuśćmy przeciwnie, że równość nie zachodzi, np. $G(r) > H(r)$. Rozpatrzmy dwa przypadki. Jeśli r jest lewostronnym punktem skupienia A, to istnieje $r_1 < r$, takie, że $H(r_1) < G(r)$. Niech t będzie dowolną liczbą leżącą pomiędzy $H(r_1)$ i $G(r)$. Mamy

$$s_h(t) \leq \mu(B(x_0, r_1)) < \mu(B(x_0, r)) \leq s_g(t),$$

przy czym ostra nierówność miedzy miarami kul wynika z faktu, że pierścień $B(x_0, r)\backslash B(x_0, r_1)$ zawiera niepusty zbiór otwarty (bo r jest lewostronnym punktem skupienia A). Jeśli r jest prawostronnym punktem skupienia A, istnieje $r_1 > r$, takie, że $G(r_1) > H(r)$. Dla t, leżących pomiędzy $H(r)$ i $G(r_1)$, mamy

$$s_h(t) \leq \mu(B(x_0, r)) < \mu(B(x_0, r_1)) \leq s_g(t).$$

W obu przypadkach doszliśmy więc do sprzeczności z założeniem.

$\square$

Uwaga W dalszej części pracy zakładam, że $\mu(S(x, r)) = 0$ dla dowolnych $x \in \mathcal{M}$, $r \in \mathbb{R}$.

Lemat 8 *Niech $f, g\colon \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ oraz $f_n\colon \mathcal{M} \to \mathbb{R}$, $n = 0, 1, \ldots,$. Jeśli $f_n \rightrightarrows f$ oraz dla dowolnej liczby rzeczywistej t: $\mu(\{f_n > t\}) = \mu(\{g > t\})$, to $\mu(\{f > t\}) = \mu(\{g > t\})$ dla każdego $t \in \mathbb{R}$.*

Dowód

$$\{f > t\} \subseteq \bigcup_{m=0}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} \{f_n > t\}$$

Ciąg zbiorów $\bigcap_{n=m}^{\infty}\{f_n > t\}$ jest wstępujący. Zatem

$$\mu(\{f > t\}) \leq \lim_{m\to\infty} \mu\left(\bigcap_{n=m}^{\infty} \{f_n > t\}\right) \leq \lim_{m\to\infty} \mu(\{f_m > t\}) = \lim_{m\to\infty} \mu(\{g > t\}) = \mu(\{g > t\})$$

Niech a będzie dowolną liczbą mniejszą od $\mu(\{g > t\})$. Mamy

$$\{g > t\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{g > t + \frac{1}{n}\right\}$$

Ponieważ ciąg zbiorów

$$\left\{g > t + \frac{1}{n}\right\}$$

jest wstępujący, wynika stąd równość

$$\mu(\{g > t\}) = \lim_{n\to\infty} \mu\left(\left\{g > t + \frac{1}{n}\right\}\right)$$

Zatem istnieje N, takie, że

$$a \leq \mu\left(\left\{g > t + \frac{1}{N}\right\}\right).$$

ponieważ $f_n \rightrightarrows f$, istnieje n_0, takie, że

$$\forall_{x\in\mathcal{M}}\ |f_{n_0}(x) - f(x)| < \frac{1}{N}$$

Zatem

$$\{f_{n_0} > t + \frac{1}{N}\} \subseteq \{f > t\}$$

Stąd

$$\mu(\{f > t\}) \geq \mu\left(\left\{f_{n_0} > t + \frac{1}{N}\right\}\right) = \mu\left(\left\{g > 1 + \frac{1}{N}\right\}\right) \geq a$$

Z dowolności a mamy więc

$$\mu(\{f > t\}) \geq \mu(\{g > t\}),$$

czyli ostatecznie

$$\mu(\{f > t\}) = \mu(\{g > t\}).$$

$\square$

Lemat 9 *Niech $k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie dowolną funkcją. Jeśli przestrzeń $\mathcal{M}$ spełnia* ***podstawowe założenie****, to całka*

$$\int_{\mathcal{M}} k(\rho(x,y))\mu(dy)$$

nie zależy od x.

Dowód Wystarczy pokazać, że dla każdego $i \in \mathcal{J}$

$$\int_{\mathcal{M}} k(\rho(x,y))\mu(dy) = \int_{\mathcal{M}} k(\rho(ix,y))\mu(dy).$$

Wynika to z definicji zbioru $\mathcal{J}$, bowiem wykorzystując kolejno to, że i jest izometrią, zachowuje miarę μ oraz jest inwolucją, mamy

$$\int_{\mathcal{M}} k(\rho(x,y))\mu(dy) = \int_{\mathcal{M}} k(\rho(ix,iy))\mu(dy) = \int_{\mathcal{M}} k(\rho(ix,i\circ iy))\mu(dy) = \int_{\mathcal{M}} k(\rho(ix,y))\mu(dy).$$

$\square$

Lemat 10 *Jeżeli $\mu(\mathcal{M}) < \infty$, to dla dowolnej funkcji ciągłej, ograniczonej $f\colon \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ istnieje ciąg funkcji lipschitzowskich, $f_n\colon X \to \mathbb{R}$, zbieżny do f prawie wszędzie.*

Dowód Dla dowolnego zbioru otwartego $U \subseteq \mathcal{M}$ istnieje funkcja lipschitzowska h_ε, taka, że

$$\mu(\{x \in \mathcal{M}\colon\ I_U(x) \neq h_\varepsilon(x)\}) < \varepsilon.$$

Aby udowodnić ten fakt rozpatrzmy funkcje

$$g_n(x) = \min(1, n \cdot \rho(x, U')) \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

gdzie $U' = \mathcal{M} \backslash U$. Funkcja g_n jest lipschitzowska ze stała n. Dla $x \notin U$ mamy $g_n(x) = 0 = I_U(x)$. Z kolei jeśli $\rho(x, \mathcal{M}\backslash U) \geq \frac{1}{n}$, to $g_n(x) = 1 = I_U(x)$. Zatem

$$\{x \in \mathcal{M}\colon\ I_U(x) \neq g_n(x)\} \subseteq U'_{\frac{1}{n}} \backslash U'$$

Ale

$$U'_{\frac{1}{n}} \supseteq U'_{\frac{1}{n+1}} \quad \text{oraz} \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} U'_{\frac{1}{n}} = U',$$

bo zbiór U' jest domknięty. Zatem (ponieważ $\mu(\mathcal{M}) < \infty$)

$$\lim_{n\to\infty} \mu(U'_{\frac{1}{n}}) = \mu(U').$$

Istnieje więc n, takie, że

$$\mu(\{x \in \mathcal{M}\colon\ I_U(x) \neq g_n(x)\}) \leq \mu(U') - \mu(U'_{\frac{1}{n}}) < \varepsilon.$$

Wynika stąd, że analogiczne funkcje istnieją także dla zbiorów domkniętych (wystarczy wziąć $1 - h'_\varepsilon$, gdzie h'_ε jest funkcją dobraną dla dopełnienia danego zbioru domkniętego) oraz dla zbiorów będących sumą rozłączną zbioru otwartego i domkniętego (bierzemy sumę odpowiednich funkcji dla $\varepsilon_1 = \frac{1}{2}\varepsilon$).

Korzystając z funkcji h_ε, skonstruujemy ciąg funkcji lipschitzowskich zbieżnych prawie wszędzie do f. Załóżmy, że $f(\mathcal{M}) \subseteq [-A, A]$. Niech $t_{n,k} = -A + \frac{2A\cdot k}{n}$.

$$f_n = \sum_{k=0}^{n-1} t_{n,k} \cdot h_{n,k},$$

gdzie $h_{n,k}$ jest funkcją lipschitzowską różniącą się od funkcji $I_{\{f\in[t_{n,k},\, t_{n,k+1})\}}$ na zbiorze miary co najwyżej $\frac{1}{n^3}$ dla $k < n$. Niech

$$X_n = \{x \in \mathcal{M}\colon\ f_n(x) \neq \sum_{k=0}^{n-1} t_{n,k} \cdot I_{\{f\in[t_{n,k},\, t_{n,k+1})\}}(x)\}.$$

Mamy $\mu(X_n) < \frac{1}{n^2}$. Zatem

$$\mu(\limsup_{n\to\infty}(X_n)) = 0,$$

czyli dla każdego x poza zbiorem miary 0, istnieje n_0, takie, że dla każdego $n > n_0$

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} t_{n,k} \cdot I_{\{f\in[t_{n,k},\, t_{n,k+1})\}}(x)$$

Weźmy dowolne x spełniające powyższy warunek, n_0 jak wyżej. Możemy założyć, że dla każdego x $f(x) \neq A$. Zatem

$$\text{jeżeli } f(x) \in [t_{n,k},\ t_{n,k+1}), \quad \text{to} \quad f_n(x) = t_{n,k}.$$

Stąd
$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{2A}{n},$$
dla dostatecznie dużych n, czyli
$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

□

Lemat 11 *Jeśli przestrzeń $\mathcal{M}$ jest lokalnie zwarta oraz spełnia podstawowe założenie, to dla dowolnego podzbioru $C \subseteq \mathcal{M}$ zachodzi*
$$C \text{ jest zwarty} \iff C \text{ jest domknięty i ograniczony.}$$
Ponadto jeśli $\mu(\mathcal{M}) < \infty$, to $\mathcal{M}$ jest przestrzenią zwartą.

Dowód Z podstawowego założenia wynika, że dla każdego $\varepsilon > 0$ i dowolnego $x \in \mathcal{M}$ kula $B(x, \varepsilon)$ jest izometryczna z $B(x_0, \varepsilon)$ oraz $\mu(B(x, \varepsilon)) = \mu(B(x_0, \varepsilon))$. Rzeczywiście istnieje izometryczna bijekcja, zachowująca miarę μ, taka, że
$$i(x) = x_0.$$
Stąd $i(B(x, \varepsilon)) = B(x_0, \varepsilon)$. Z lokalnej zwartości istnieje $\varepsilon > 0$, takie, że kula domknięta $\bar{B}(x_0, 2\varepsilon)$ jest zwarta, zatem, podobnie jak wyżej, zwarta jest dowolna kula o promieniu 2ε. Niech $C \subseteq \mathcal{M}$ będzie dowolnym zbiorem domkniętym i ograniczonym (w przypadku $\mu(\mathcal{M}) < \infty$ dopuszczamy też możliwość $C = \mathcal{M}$). Rozpatrzmy zbiór
$$A = \left\{n \in \mathbb{N} \colon \exists_{x_1 \ldots, x_n \in C}\ \forall_{1 \le i < j \le n}\ \rho(x_i, x_j) > 2\varepsilon\right\}$$
Dla dowolnego $n \in A$ mamy $n \cdot \mu_\varepsilon < \mu(C_\varepsilon)$, gdyż kule o promieniu ε i środkach w punktach x_i są parami rozłączne, zaś ich suma jest zawarta w zbiorze C_ε. Zatem, ponieważ $\mu(C_\varepsilon) < \infty$ (jako zbiór ograniczony lub z założenia $\mu(\mathcal{M}) < \infty$), mamy $n < \mu(C_\varepsilon)/\varepsilon$, czyli zbiór A jest ograniczony. Niech N będzie maksymalnym elementem zbioru A, zaś x_i - odpowiadającymi liczbie N punktami z definicji tego zbioru. Zachodzi inkluzja
$$\bigcup_{i=1}^{N} \bar{B}(x_i, 2\varepsilon) \supseteq C.$$
Rzeczywiście, dowolny punkt zbioru C, nie należący do żadnej z kul $\bar{B}(x_i, 2\varepsilon)$, byłby oddalony od punktów x_i o ponad 2ε, wbrew definicji liczby N. Zatem C jest zbiorem zwartym, jako domknięty podzbiór zbioru zwartego.

□

Twierdzenie 1 *Przypuśćmy, że przestrzeń $\mathcal{M}$ jest lokalnie zwarta, $\varphi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ jest wypukła, natomiast $k \colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ niemalejąca oraz spełnione jest* ***podstawowe założenie****. Niech funkcje $f, g \in \mathcal{S}$ będą funkcjami ograniczonymi, spełniającymi dla $\mu(\mathcal{M}) = \infty$ dodatkowy warunek*
$$f(x) = g(x) = 0 \text{ dla } x \notin B(x_0, R).$$
Wówczas zachodzi nierówność
$$\int_{\mathcal{M}}\int_{\mathcal{M}} \varphi(f^*(x) - g^*(y))k(\rho(x,y))\mu(dx)\mu(dy) \le \int_{\mathcal{M}}\int_{\mathcal{M}} \varphi(f(x) - g(y))k(\rho(x,y))\mu(dx)\mu(dy). \quad (2)$$

Dowód Można założyć, że funkcja k spełnia warunek

$$\exists_{T\geq 0}\, k(t) = 0 \text{ dla } t > T.$$

Rzeczywiście, jeśli nierówność z tezy zachodzi dla funkcji o tej własności, to zachodzi dla dowolnej funkcji k, spełniającej założenia twierdzenia, gdyż k jest granicą rosnącego ciągu

$$k_n = k \cdot I_{[0,n]}.$$

W szczególności dla funkcji k, znikających dla dużych argumentów, mamy

$$\int_{\mathcal{M}} k(\rho(x, x_0))\mu(dx) < \infty.$$

żądaną nierówność udowodnimy najpierw przy dodatkowym założeniu, że f,g są lipschitzowskie ze stałą C.

Jeśli $\mu(\mathcal{M}) < \infty$, niech

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{array}{c} (h,l) \in \mathrm{Lip}(C) \times \mathrm{Lip}(C)\colon s_h = s_f,\ s_l = s_g, \\ \int_{\mathcal{M}}\int_{\mathcal{M}} \varphi(h(x) - l(y))k(\rho(x,y))\mu(dx)\mu(dy) \leq \int_{\mathcal{M}}\int_{\mathcal{M}} \varphi(f(x) - g(y))k(\rho(x,y))\mu(dx)\mu(dy) \end{array} \right\}.$$

W przypadku $\mu(\mathcal{M}) = \infty$, niech

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{array}{c} (h,l) \in \mathrm{Lip}(C) \times \mathrm{Lip}(C)\colon s_h = s_f,\ s_l = s_g, f(x) = g(x) = 0 \text{ dla } x \notin B(x_0, R) \\ \int_{\mathcal{M}}\int_{\mathcal{M}} \varphi(h(x) - l(y))k(\rho(x,y))\mu(dx)\mu(dy) \leq \int_{\mathcal{M}}\int_{\mathcal{M}} \varphi(f(x) - g(y))k(\rho(x,y))\mu(dx)\mu(dy) \end{array} \right\}.$$

Zbiór $\mathcal{A}$ ma następujące własności:

1. Jeśli $(h, l) \in \mathcal{A}$ oraz $i \in \mathcal{J}$, to $(h_i^{\#}, l_i^{\#}) \in \mathcal{A}$.

   Zadana w definicji zbioru $\mathcal{A}$ nierówność jest spełniona na mocy lematu 1. O lipschitzowskości funkcji $h_i^{\#}$, $l_i^{\#}$ mówi lemat 2. Równość rozkładów wynika z lematu 3. Kończy to dowód w przypadku $\mu(\mathcal{M}) < \infty$. Aby zakończyć dowód w przypadku $\mu(\mathcal{M}) = \infty$, pozostaje wykazać, że funkcje $h_i^{\#}$, $l_i^{\#}$ zerują się poza kulą $B(x_0, R)$. Wynika to wprost z definicji operacji $(\cdot)_i^{\#}$. Przypuśćmy bowiem, że $x \notin B(x_0, R)$. Wówczas $h(x) = 0$. Jeśli $x \in M_i^+$, to $i(x) \notin B(x_0, R)$. Zatem $h(i(x)) = 0$. Stąd $h_i^{\#}(x) = 0$. Jeśli $x \in M_i^-$, to

   $$h_i^{\#}(x) = \min(h(x), h(i(x))) = 0,$$

   gdyż funkcja h przyjmuje tylko wartości nieujemne. Jeśli nie zachodzi żaden z powyższych przypadków, to $h_i^{\#}(x) = 0$ z definicji operacji $(\cdot)_i^{\#}$.

2. $\mathcal{A}$ jest zamknięty ze względu na zbieżność jednostajną, tzn. jeśli $(h_n, l_n) \in \mathcal{A}$, $n = 1, 2, \ldots$ oraz $h_n \rightrightarrows h$, $l_n \rightrightarrows l$, to $(h, l) \in \mathcal{A}$.

   Jednostajna granica ciągu funkcji lipschitzowskich ze stałą C jest także funkcją lipschitzowską ze stałą C. Równość rozkładów wynika z lematu 8. Zerowanie się funkcji poza kulą $B(x_0, R)$ również zachowuje się w granicy. Aby zakończyć dowód tego punktu należy więc wykazać, że jeśli $h_n \rightrightarrows h$, $l_n \rightrightarrows l$, to

   $$\int_{\mathcal{M}}\int_{\mathcal{M}} \varphi(h(x) - l(y))k(\rho(x,y))\mu(dx)\mu(dy) \leq \int_{\mathcal{M}}\int_{\mathcal{M}} \varphi(f(x) - g(y))k(\rho(x,y))\mu(dx)\mu(dy).$$

   Aby udowodnić żądaną nierówność, wystarczy pokazać, że

   $$\int_{\mathcal{M}}\int_{\mathcal{M}} \varphi(h(x)-l(y))k(\rho(x,y))\mu(dx)\mu(dy) = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathcal{M}}\int_{\mathcal{M}} \varphi(h_n(x)-l_n(y))k(\rho(x,y))\mu(dx)\mu(dy). \tag{3}$$

Oznaczmy przez B zbiór $B(x_0, R)$, w przypadku $\mu(\mathcal{M}) = \infty$. Dla $\mu(\mathcal{M}) < \infty$ niech $B = \mathcal{M}$. Zachodzi równość

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{M}}\int_{\mathcal{M}} \varphi(h_n(x) - l_n(y))k(\rho(x,y))\mu(dx)\mu(dy) &= \int_B\int_B \varphi(h_n(x) - l_n(y))k(\rho(x,y))\mu(dx)\mu(dy)\\ &+ \int_B\int_{\mathcal{M}\setminus B} \varphi(-l_n(y))k(\rho(x,y))\mu(dx)\mu(dy)\\ &+ \int_{\mathcal{M}\setminus B}\int_B \varphi(h_n(x))k(\rho(x,y))\mu(dx)\mu(dy)\\ &+ \int_{\mathcal{M}\setminus B}\int_{\mathcal{M}\setminus B} \varphi(0)k(\rho(x,y))\mu(dx)\mu(dy)\end{aligned}$$

oraz analogiczna równość dla funkcji granicznych. Zbieżność całek można więc udowodnić, pokazując zbieżność poszczególnych składników.
Funkcja φ jest ograniczona na przedziale $[-\|f\| - \|g\|, \|f\| + \|g\|]$ (przyjmijmy, że $\varphi(t) < M$ dla t z tego przedziału). Mamy więc

$$\varphi(h_n(x) - l_n(y))k(\rho(x,y)) \leq Mk(\rho(x,y)).$$

Ponieważ na mocy lematu 9

$$\int_B\int_{\mathcal{M}\setminus B} Mk(\rho(x,y))\mu(dx)\mu(dy) \leq \mu(B)\cdot M \cdot \int_{\mathcal{M}} k(\rho(x,x_0)\mu(dx) < \infty$$

oraz oczywiście

$$\int_B\int_B Mk(\rho(x,y))\mu(dx)\mu(dy) < \infty,$$

z twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej wynika zbieżność dwóch pierwszych składników. Trzeci składnik, poprzez twierdzenie Fubiniego, sprowadza się do sytuacji analogicznej jak drugi. Ponieważ ostatni składnik jest stały, taki sam dla funkcji h_n, l_n jak dla h, l, dowodzi to 3, kończąc tym samym dowód własności 2.

3. $\mathcal{A}$ jest zwarty w metryce zbieżności jednostajnej, tzn. dla dowolnego ciągu $(h_n, l_n) \in \mathcal{A}$ istnieje podciąg (h_{n_k}, l_{n_k}) oraz funkcje h, l, takie, że $(h,l) \in \mathcal{A}$, $h_{n_k} \rightrightarrows h$, $l_{n_k} \rightrightarrows l$.

   Z uwagi na poprzedni punkt wystarczy udowodnić, że z każdego ciągu (h_n, l_n) można wybrać podciąg (h_{n_k}, l_{n_k}), taki że ciągi h_{n_k}, l_{n_k} są jednostajnie zbieżne. Wynika to bezpośrednio z twierdzenia *Arzeli – Ascoliego* dla zbioru zwartego (zob. np. [4], str. 304-311)

   Jeśli X jest zwartą przestrzenią metryczną, natomiast F jednakowo ciągłą rodziną odwzorowań określonych na X, o wartościach rzeczywistych, spełniającą

   $$\forall_{x\in X}\ \{f(x)\colon f \in F\}\ \textit{jest ograniczony},$$

   to z każdego ciągu funkcji z F można wybrać podciąg jednostajnie zbieżny na X.

   Założenia twierdzenia są w tym przypadku spełnione, gdyż funkcje h_n, l_n mają wspólną stałą Lipschitza oraz są wspólnie ograniczone (gdyż mają ten sam rozkład, co odpowiednio f i g).

Rozpatrzmy funkcję $w\colon \mathcal{M} \to \mathbb{R}$, zdefiniowaną wzorem

$$w(x) = e^{-\rho(x,x_0)} I_{B(x_0,R)}(x)$$

oraz funkcję $k\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, określoną równaniem

$$\bar{k}(t) = e^{-\mu_t - t}.$$

Funkcja $\bar{k}$ jest ściśle malejąca. Ponadto $\int_{\mathcal{M}} \bar{k}(\rho(x_0,x))\mu(dx) < \infty$. Dla $\mu(\mathcal{M}) < \infty$ nierówność ta jest oczywista, dla $\mu(\mathcal{M}) = \infty$, niech k_n będzie ciągiem, takim, że $\mu_{k_n} = n$ (istnieje na podstawie lematu 5). Wówczas

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{M}} \bar{k}(\rho(x_0,x))\mu(dx) &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{B(x_0,k_{n+1})\setminus B(x_0,k_n)} \bar{k}(\rho(x_0,x))\mu(dx) \\ &\le \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\mu_{k_n}} \mu_{k_{n+1}} \le \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n} \cdot (n+1) < \infty,\end{aligned}$$

zatem nierówność zachodzi także w tym przypadku.

Niech $\mathcal{I}$ będzie funkcjonałem, zdefiniowanym na $\mathcal{A}$, poprzez wzór

$$\mathcal{I}(h,l) = \int_{\mathcal{M}}\int_{\mathcal{M}} (w(x)-h(y))^2 \bar{k}(\rho(x,y))\mu(dx)\mu(dy) + \int_{\mathcal{M}}\int_{\mathcal{M}} (w(x)-l(y))^2 \bar{k}(\rho(x,y))\mu(dx)\mu(dy).$$

$\mathcal{I}$ jest funkcją ciągłą w metryce zbieżności jednostajnej. Wynika to z ciągłości poszczególnych składników, którą dowodzi się analogicznie, jak przejście graniczne w punkcie 2 (podstawiając $\varphi(t) = t^2$ oraz zastępując funkcję k przez $\bar{k}$).

Zatem, ze zwartości $\mathcal{A}$, istnieją funkcje h, l, takie, że $(h,l) \in \mathcal{A}$ oraz $\mathcal{I}(h,l)$ przyjmuje wartość najmniejszą na $\mathcal{A}$. Ale dla każdego $i \in \mathcal{J}$ zachodzi $(h_i^{\#}, l_i^{\#}) \in \mathcal{A}$. Funkcja w jest radialna, więc $w_i^{\#} = w$ dla każdego $i \in \mathcal{J}$. Zatem z lematu 1 mamy

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{M}}\int_{\mathcal{M}} (w(x)-h(y))^2 \bar{k}(\rho(x,y))\mu(dx)\mu(dy) &= \int_{\mathcal{M}}\int_{\mathcal{M}} (w(x)-h_i^{\#}(y))^2 \bar{k}(\rho(x,y))\mu(dx)\mu(dy), \\ \int_{\mathcal{M}}\int_{\mathcal{M}} (w(x)-l(y))^2 \bar{k}(\rho(x,y))\mu(dx)\mu(dy) &= \int_{\mathcal{M}}\int_{\mathcal{M}} (w(x)-l_i^{\#}(y))^2 \bar{k}(\rho(x,y))\mu(dx)\mu(dy).\end{aligned}$$

Ponieważ powyższe całki są skończone, z drugiej części lematu 1 wynika, że prawie wszędzie na $(M_i^+ \cup M_i^-) \times (M_-^+ \cup M_i^-)$ zachodzi

$$(h_i^{\#}(x) = h(x) \text{ i } w_i^{\#}(y) = w(y)) \text{ lub } (h_i^{\#}(x) = h(ix) \text{ i } w_i^{\#}(y) = w(iy)). \tag{4}$$

Dla i, takich, że $i(x_0) = x_0$ mamy $\rho(x,x_0) = \rho(ix, ix_0)$, więc $M_i^+ = M_i^- = \emptyset$. Zatem $h_i^{\#} = h$, $l_i^{\#} = l$.

Jeśli $i(x_0) \neq x_0$, to $x_0 \in M_i^+$. Niech $r = \rho(x_0, ix_0)$. Dla pewnego otoczenia otwartego $U \ni x_0$ mamy $U \subseteq B(x_0,R) \cap M_i^+$. Dla $x \in U$ zachodzi

$$w_i^{\#}(x) = \max(w(x), w(ix)) = \max(e^{-\rho(x,x_0)} I_{B(x_0,R)}(x), e^{-\rho(ix,x_0)} I_{B(x_0,R)}(ix)) = e^{-\rho(x,x_0)} \neq w(ix).$$

Ponieważ $\mu(U) > 0$, musi zachodzić

$$h_i^{\#} = h \text{ p. w.}$$

Gdyby bowiem było inaczej, tzn. zbiór $V = \{x \in \mathcal{M} \colon h_i^{\#}(x) \neq h(x)\} \subseteq M_i^+ \cup M_i^-$ miał miarę dodatnią, to zbiór $V \times U \subseteq (M_i^+ \cup M_i^-)^2$, na którym nie zachodzi alternatywa 4 również byłby dodatniej miary, co jest niemożliwe.

Zatem dla każdego $i \in \mathcal{J}$ mamy $h_i^{\#} = h$ p.w. Analogicznie $l_i^{\#} = l$ p.w. dla $i \in \mathcal{J}$. Ale funkcje h, $h_i^{\#}$, l, $l_i^{\#}$ są lipschitzowskie, a więc ciągłe. Ponieważ miara niepustych zbiorów otwartych jest dodatnia, wynika stąd, że

$$\{x \colon h_i^{\#}(x) \neq h(x)\} = \{x \colon l_i^{\#}(x) \neq l(x)\} = \emptyset.$$

Zatem

$$h_i^{\#} = h \quad \text{oraz} \quad l_i^{\#} = l.$$

Stąd jednak wynika, że funkcje h i l są radialne. Rzeczywiście, rozważmy dowolne $x, y \in \mathcal{M}$, $\rho(x,x_0) < \rho(y,x_0)$. Z podstawowego założenia istnieje $i \in \mathcal{J}$, takie, że

$$i(y) = x.$$

Zatem

$$y \in M_i^-,$$

czyli

$$h(y) = h_i^{\#}(y) = \min(h(y), h(i(y))) \leq h(i(y)) = h(x)$$

oraz analogicznie $l(y) \leq l(x)$.

Zatem $h = h^*$, $l = l^*$. Funkcje h i l spełniają nierówność 2 z definicji zbioru $\mathcal{A}$. Kończy to dowód dla przypadku funkcji lipschitzowskich.

Aby rozszerzyć tezę na dowolne funkcje spełniające założenia zadania, można przybliżać je funkcjami lipschitzowskimi, zgodnie z lematem 10. Należy jednak wiedzieć czy oraz w jaki sposób zbieżność ciągu funkcji f_n przekłada się na zbieżność ciągu funkcji f_n^*. Mówią o tym poniższe lematy.

Lemat 12 *Jeśli $f, g \in \mathcal{S}$ oraz $f \geq g$ p.w., to $f^* \geq g^*$ p.w.*

Dowód Z lematu 7 i konstrukcji podanej w lemacie 6 następujące równości zachodzą prawie wszędzie na $\mathcal{M}$

$$f^*(x) = \inf\{t \colon s_f(t) \leq \mu_{\rho(x_0,x)}\}$$

oraz

$$g^*(x) = \inf\{t \colon s_g(t) \leq \mu_{\rho(x_0,x)}\}.$$

Ale

$$s_f(t) = \mu(\{f > t\}) \geq \mu(\{g > t\}) = s_g(t)$$

Stąd

$$f^*(x) \geq g^*(x) \text{ p.w.}$$

□

Lemat 13 *Jeśli $f, f_n \in \mathcal{S}$ dla $n = 0, 1, \ldots,$ oraz $s_{f_n}(t) \to s_f(t)$ dla $t \in A$, gdzie A jest gęstym podzbiorem prostej rzeczywistej, to*

$$f_n^* \to f^* \text{ p.w. na } \mathcal{M}.$$

Dowód Rozpatrzmy dowolny punkt $x \in \mathcal{M}$, dla którego zachodzą równości

$$f^*(x) = \inf\{t \colon s_f(t) \leq \mu_{\rho(x_0,x)}\}$$

oraz

$$f_n^*(x) = \inf\{t \colon s_{f_n}(t) \leq \mu_{\rho(x_0,x)}\}$$

dla wszystkich n.

Niech $f^*(x) = t_0$, $\rho(x, x_0) = r$, $\varepsilon > 0$. Niech $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon$ spełnia $\lim_{n\to\infty} s_{f_n}(t_0 - \varepsilon_1) = s_f(t_0 - \varepsilon_1)$. Mamy $s_f(t_0 - \varepsilon_1) > \mu_r$. Stąd dla dostatecznie dużych n zachodzi nierówność:

$$s_{f_n}(t_0 - \varepsilon_1) > \mu_r,$$

czyli

$$f_n^*(x) \geq t_0 - \varepsilon_1 > t_0 - \varepsilon. \tag{5}$$

Załóżmy teraz, że $s_f(t_0 + \varepsilon) < \mu_r$ dla każdego $\varepsilon > 0$. Dla dowolnego ε, istnieje $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon$, takie, że

$$\lim_{n\to\infty} s_{f_n}(t_0 + \varepsilon_1) = s_f(t_0 + \varepsilon_1).$$

Stąd dla dużych n

$$s_{f_n}(t_0 + \varepsilon_1) < \mu_r.$$

Zatem dla dużych n
$$f_n^*(x) \leq t_0 + \varepsilon_1 < t_0 + \varepsilon. \tag{6}$$
Z (5) i (6) wynika $f_n^*(x) \to f^*(x)$. Wystarczy zatem pokazać, że poczynione założenie jest spełnione prawie wszędzie na $\mathcal{M}$. Oznaczmy przez A zbiór tych punktów $x \in \mathcal{M}$, dla których założenie to jest fałszywe, tzn.
$$A = \{x \in \mathcal{M} \colon \exists_{a>0} \forall_{\varepsilon \in (0,a)} s_f(f^*(x) + \varepsilon) = \mu_{\rho(x,x_0)}\}.$$
Niech
$$B = \{r \colon S(x_0, r) \cap A \neq \emptyset\}.$$
Mamy $A \subseteq \bigcup_{r \in B} S(x_0, r)$. Wystarczy zatem pokazać, że zbiór B jest przeliczalny, gdyż wówczas A ma miarę zero, jako podzbiór sumy zbiorów o mierze zero. Zauważmy, że dla $r \in B$ zbiór $s_f^{-1}(\mu_r)$ zawiera odcinek otwarty. Ponadto dla $r_1, r_2 \in B$, $r_1 \neq r_2$ zachodzi $\mu_{r_1} \neq \mu_{r_2}$ (gdyż miary otwartych, niepustych podzbiorów $\mathcal{M}$ są dodatnie). Zatem zbiory $s_f^{-1}(\mu_{r_1})$, $s_f^{-1}(\mu_{r_2})$ są rozłączne, a więc zbiór B rzeczywiście jest przeliczalny.

□

Wynikają stąd w szczególności następujące lematy

Lemat 14 *Jeśli $\mu(\mathcal{M}) < \infty$ oraz $f_n \to f$ słabo, to $f_n^* \to f^*$ p.w.*

Lemat 15 *Jeśli $f, f_n \in \mathcal{S}$ oraz $f_n \to f$ rosnąco, to $f_n^* \to f^*$ rosnąco p.w.*

Dowód
$$\{f > t\} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \{f_n > t\}$$
Ponadto $\{f_n > t\} \subseteq \{f_{n+1} > t\}$ dla każdego n. Zatem $s_f(t) = \lim_{n\to\infty} s_{f_n}(t)$. Teza wynika z poprzednich lematów.

□

Udowodnione lematy pozwalają zakończyć dowód twierdzenia 1, poprzez stopniowe rozszerzanie tezy, najpierw na funkcje ciągłe, następnie na dowolne, spełniające założenia twierdzenia. Niech $f, g \in \mathcal{S}$ będą funkcjami ciągłymi, spełniającymi założenia twierdzenia. Istnieją ciągi f_n, g_n funkcji lipschitzowskich o wspólnie ograniczonych nośnikach, wspólnie ograniczonych, zbieżne prawie wszędzie odpowiednio do f i g. Dla udowodnienia tego faktu rozpatrzmy dwa przypadki:

1. $\mu(\mathcal{M}) < \infty$
   Na podstawie lematu 10 istnieje ciąg h_n funkcji lipschitzowskich zbieżny do f prawie wszędzie. Niech $M = \|f\|$ (M jest dobrze określone, gdyż z lematu 11 $\mathcal{M}$ jest zbiorem zwartym). Niech $A_n = \{x \in \mathcal{M} \colon |h_n(x)| \leq M + 1\}$, $B_n = \{x \in \mathcal{M} \colon |h_n(x)| \geq M + 2\}$. Zbiory te są domknięte, więc zwarte.
   Oznaczmy przez d_n liczbę $\min\{\rho(x, y) \colon x \in A_n, y \in B_n\}$. Mamy $d_n \neq 0$, gdyż zbiory A_n, B_n są rozłączne dla dowolnego n. Niech $G_n \colon \mathbb{R} \to [0, 1]$ będzie funkcją lipschitzowską, taką, że $G_n(0) = 1$ oraz $G_n(t) = 0$ dla $t \geq d_n$. Zdefiniujmy funkcje f_n wzorem
   $$f_n(x) = h_n(x) \cdot G_n(\rho(x, A_n)).$$
   f_n są funkcjami lipschitzowskimi, jako iloczyny funkcji lipschitzowskich ograniczonych. Ponadto $\|f_n\| \leq M + 2$ dla dowolnego n, czyli f_n są wspólnie ograniczone. Co więcej dla dowolnego $x \in \mathcal{M}$, takiego, że $h_n(x) \to f(x)$ mamy $h_n(x) < M + 1$ dla dużych n, co implikuje $x \in A_n$, czyli $f_n(x) = h_n(x)$. Zatem $f_n \to f$ p.w. Sytuacja w przypadku funkcji g jest analogiczna.

2. $\mu(\mathcal{M}) = \infty$

Zgodnie z założeniem twierdzenia funkcja f przyjmuje wartości nieujemne oraz zeruje się poza kulą $B(x_0, R)$. Z lematu 10 istnieje ciąg funkcji lipschitzowskich $h_n \colon \bar{B}(x_0, 3R) \to \mathbb{R}$, zbieżny do f p.w. na $\bar{B}(x_0, 3R)$. Możemy założyć, że funkcje te są wspólnie ograniczone, gdyż w przeciwnym przypadku można je zmodyfikować jak w poprzednim punkcie (istotna tu jest jedynie zwartość kuli $\bar{B}(x_0, 3R)$, wynikająca z lematu 11). Niech $H \colon \mathbb{R} \to [0, 1]$ będzie dowolną funkcją lipschitzowską, taką, że $H(t) = 1$ dla $t \leq R$ oraz $H(t) = 0$ dla $t \geq 2R$. Funkcje h'_n, zdefiniowane wzorem

$$h'_n(x) = \begin{cases} h_n(x) \cdot H(\rho(x_0, x)) & \text{dla} \quad x \in B(x_0, 3R) \\ 0 & \text{dla} \quad x \notin B(x_0, 3R) \end{cases}$$

są lipschitzowskie, ponadto $h'_n(x) = h_n(x)$ dla $x \in B(x_0, R)$ oraz $|h'_n(x)| \leq |h_n(x)|$ dla $x \in B(x_0, 3R)$. Wynika stąd, że $h'_n \to f$ p.w. na $\mathcal{M}$ oraz funkcje h'_n są wspólnie ograniczone. Przyjmując $f_n(x) = |h'_n(x)|$, dostajemy ciąg funkcji lipschitzowskich, należących do klasy $\mathcal{S}$, o wspólnie ograniczonym nośniku, wspólnie ograniczonych, zbieżny do f p.w. Analogiczny ciąg g_n istnieje dla funkcji g.

Dla $\mu(\mathcal{M}) < \infty$ z twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej mamy

$$\int_{\mathcal{M}} \int_{\mathcal{M}} \varphi(f(x) - g(y))k(\rho(x, y))\mu(dx)\mu(dy) = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathcal{M}} \int_{\mathcal{M}} \varphi(f_n(x) - g_n(y))k(\rho(x, y))\mu(dx)\mu(dy) \quad (7)$$

oraz

$$\int_{\mathcal{M}} \int_{\mathcal{M}} \varphi(f^*(x) - g^*(y))k(\rho(x, y))\mu(dx)\mu(dy) = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathcal{M}} \int_{\mathcal{M}} \varphi(f^*_n(x) - g^*_n(y))k(\rho(x, y))\mu(dx)\mu(dy). \quad (8)$$

Fakt ten zachodzi także dla $\mu(\mathcal{M}) = \infty$, jednak dowód jest nieco bardziej techniczny. Niech $B \subseteq \mathcal{M}$ będzie dowolną kulą o środku w x_0, zawierającą nośniki funkcji f, g, f_n, g_n. Wówczas zawiera ona także nośniki funkcji f^*, g^*, f^*_n, g^*_n. Ponadto

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{M}} \int_{\mathcal{M}} \varphi(f(x) - g(y))k(\rho(x, y))\mu(dx)\mu(dy) \quad &= \quad \int_B \int_B \varphi(f(x) - g(y))k(\rho(x, y))\mu(dx)\mu(dy) \\ &+ \quad \int_B \int_{\mathcal{M}\setminus B} \varphi(f(x))k(\rho(x, y))\mu(dx)\mu(dy) \\ &+ \quad \int_{\mathcal{M}\setminus B} \int_B \varphi(-g(y))k(\rho(x, y))\mu(dx)\mu(dy) \\ &+ \quad \int_{\mathcal{M}\setminus B} \int_{\mathcal{M}\setminus B} \varphi(0)k(\rho(x, y))\mu(dx)\mu(dy) \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{M}} \int_{\mathcal{M}} \varphi(f_n(x) - g_n(y))k(\rho(x, y))\mu(dx)\mu(dy) \quad &= \quad \int_B \int_B \varphi(f_n(x) - g_n(y))k(\rho(x, y))\mu(dx)\mu(dy) \\ &+ \quad \int_B \int_{\mathcal{M}\setminus B} \varphi(f_n(x))k(\rho(x, y))\mu(dx)\mu(dy) \\ &+ \quad \int_{\mathcal{M}\setminus B} \int_B \varphi(-g_n(y))k(\rho(x, y))\mu(dx)\mu(dy) \\ &+ \quad \int_{\mathcal{M}\setminus B} \int_{\mathcal{M}\setminus B} \varphi(0)k(\rho(x, y))\mu(dx)\mu(dy). \end{aligned}$$

Wystarczy zatem wykazać zbieżność poszczególnych składników. Zbieżność ta jednak zachodzi z twierdzenia Lebesgue'a, gdyż zgodnie z nie zmniejszającym ogólności założeniem założeniem, poczynionym na początku dowodu całka $\int_{\mathcal{M}} k(\rho(x, y))\mu(dx)$ jest skończona. Sytuacja dla funkcji f^*, g^* jest

analogiczna. Zatem również w tym przypadku zachodzą równości (7) i (8). Ponieważ nierówność dana w tezie zachodzi dla funkcji lipschitzowskich, kończy to dowód twierdzenia dla funkcji ciągłych. Aby rozszerzyć tezę na dowolne funkcje spełniające założenia twierdzenia, należy skorzystać z założenia o lokalnej zwartości przestrzeni $\mathcal{M}$ oraz następującego znanego faktu (zob. [6], str. 62-65):
Jeśli μ jest miarą borelowską na lokalnie zwartej , σ-zwartej przestrzeni metrycznej $\mathcal{M}$, zaś $f\colon \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ funkcją ograniczoną, znikającą poza zbiorem skończonej miary, to istnieje ciąg f_n funkcji ciągłych, wspólnie ograniczonych, zbieżny do f p.w. na $\mathcal{M}$.

Dowolną funkcję spełniającą założenia twierdzenia można zatem przybliżać ciągiem funkcji ciągłych wspólnie ograniczonych, o wspólnie ograniczonych nośnikach (aby był spełniony ten warunek można zmodyfikować ciąg dany w powyższym fakcie podobnie jak powyżej w przypadku funkcji lipschitzowskich dla $\mu(\mathcal{M}) < \infty$). Dalszy ciąg dowodu przebiega już analogicznie jak w przypadku funkcji ciągłych.

□

Uwaga Podstawowe założenie można osłabić, zakładając, że dla dowolnych $x, y \in \mathcal{M}$, spełniających $\rho(x_0, x) < \rho(x_0, y)$ istnieje ciąg $i_1, \ldots, i_n \in \mathcal{J}$, taki, że

$$i_n \ldots i_1(y) = x$$

oraz ciąg $(\rho(x_0, i_k \ldots i_1(y))_{k=0}^n$ jest ściśle malejący. Twierdzenie 1 pozostaje wówczas prawdziwe.

6. Dalsze własności i zastosowania

Twierdzenie 2 *Jeśli $\mathcal{M}$ spełnia **podstawowe założenie**, $f \in \mathcal{S}$, lipschitzowska ze stałą C, to istnieje f^*, również lipschitzowska ze stałą C.*

Dowód Dla $\mu(\mathcal{M}) < \infty$ lub funkcji o nośniku ograniczonym teza wynika z dowodu twierdzenia 1 dla funkcji lipschitzowskich, gdzie główna nierówność została wykazana właśnie poprzez skonstruowanie żądanej funkcji. W przypadku miar nieskończonych pomocny będzie następujący lemat

Lemat 16 *Jeśli $\mu(\mathcal{M}) = \infty$ oraz $f \in \mathcal{S}$ jest funkcją lipschitzowską, to*

$$\lim_{\rho(x,x_0)\to\infty} f(x) = 0.$$

Dowód Przypuśćmy przeciwnie, że istnieje ciąg (x_n) punktów przestrzeni $\mathcal{M}$ oraz $\varepsilon > 0$ takie, że

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x, x_0) = \infty \text{ oraz } \forall_{n\in\mathbb{N}}\ f(x_n) > \varepsilon.$$

Z lipschitzowskości funkcji f istnieje $r > 0$ takie, że $f(x) > \frac{\varepsilon}{2}$ dla wszystkich $x \in B(x_n, r)$. Istnieje ciąg (k_n) liczb naturalnych, taki, że

$$B(x_{k_j}, r) \cap B(x_{k_i}, r) = \emptyset$$

dla $i \neq j$. Zatem, ponieważ $\mu(B(x_{k_n}, r)) = \mu_r$ dla dowolnego n (zostało to wykazane w dowodzie lematu 11), mamy

$$s_f\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) = \mu\left(\left\{f > \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B(x_{k_n}, r)) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_r = \infty,$$

co nie jest prawdą dla $f \in \mathcal{S}$.

□

Wracając do dowodu twierdzenia 2, rozważmy ciąg funkcji

$$f_n(x) = \max(f(x), \frac{1}{n}) - \frac{1}{n},\ n = 1, 2, \ldots$$

Z udowodnionego lematu wynika, że są to funkcje o nośniku ograniczonym. Ponadto funkcje f_n są lipschitzowskie ze stałą C. Oczywiście funkcje te przyjmują tylko wartości nieujemne. Z udowodnionej już części twierdzenia 2 wynika, że istnieją f_n^* lipschitzowskie ze stałą C. Ponieważ funkcje f_n zbiegają rosnąco do funkcji f, z lematu 15 mamy

$$f^* = \lim_{n\to\infty} f_n^* \ \text{p.w.}$$

Zatem istnieje funkcja f^* lipschitzowska ze stałą C.

$\square$

Twierdzenie 3 (Nierówność izoperymetryczna w $\mathbb{R}^n$ i S^n (twierdzenie Levy'ego))
Załóżmy, że $\mathcal{M} = \mathbb{R}^n$ lub $\mathcal{M} = S^n$, $A \subseteq \mathcal{M}$, $\mu(A) < \infty$ oraz $\mu(A) = \mu(B(x_0, r))$. Wówczas

$$\mu(A_\varepsilon) \geq \mu(B(x_0, r)_\varepsilon).$$

Dowód Rozważmy funkcję $f\colon \mathcal{M} \to R$

$$f(x) = \max(\varepsilon - \rho(A, x), 0)$$

Funkcja f jest lipschitzowska ze stałą 1. Zatem f^* też jest lipschitzowska ze stałą 1. Mamy

$$\mu(\{f^* > 0\}) = \mu(\{f > 0\}) = \mu(A_\varepsilon).$$

Zatem, aby wykazać tezę, wystarczy udowodnić, że $B(x_0, r)_\varepsilon \subseteq \{f^* > 0\}$. Ale

$$\{f^* > 0\} \supseteq \{f^* \geq \varepsilon\}_\varepsilon \supseteq B(x_0, r)_\varepsilon.$$

Pierwsza inkluzja wynika z lipschitzowskości f^*. Rzeczywiście, jeśli $\rho(x, \{f^* \geq \varepsilon\}) < \varepsilon$ to istnieje punkt $y \in \{f^* \geq \varepsilon\}$, taki, że $\rho(x, y) < \varepsilon$. Zatem

$$f^*(x) \geq f^*(y) - 1 \cdot \rho(x, y) > \varepsilon - \varepsilon = 0.$$

Druga inkluzja wynika z faktu, że $\{f^* \geq \varepsilon\}$ jest kulą o środku x_0 i promieniu nie mniejszym niż r, zaś operacja $(\cdot) \mapsto (\cdot)_\varepsilon$ jest monotoniczna ze względu na inkluzję.

$\square$

Twierdzenie 4 (Nierówność izodiametryczna w $\mathbb{R}^n$) *Spośród wszystkich mierzalnych podzbiorów $\mathbb{R}^n$ o zadanej skończonej średnicy, największą objętość ma kula.*

Dowód Przypuśćmy wbrew tezie, że istnieje zbiór $A \subseteq R^n$, o zadanej średnicy $d = 2 \cdot r$, taki, że $\mu(A) > \mu_r$ (tutaj μ oznacza n-wymiarową miarę Lebesgue'a). Niech $R > r$ będzie taką liczbą, że $\mu_R = \mu(A)$. Podstawmy w nierówności z twierdzenia 1, $\varphi(t) = t^2$, $f = g = I_A$, $k = I_{[0,2r]}$. Otrzymujemy

$$\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} (f^*(x)^2 + g^*(y)^2 - 2f^*(x)g^*(y))k(\|x-y\|)dxdy \leq \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} (f(x)^2 + g(y)^2 - 2f(x)g(y))k(\|x-y\|)dxdy. \tag{9}$$

Ale
$$\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)^2 k(\|x-y\|)dxdy = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)^2 dx \cdot \int_{\mathbb{R}^n} k(\|y\|)dy$$
oraz
$$\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f^*(x)^2 k(\|x-y\|)dxdy = \int_{\mathbb{R}^n} f^*(x)^2 dx \cdot \int_{\mathbb{R}^n} k(\|y\|)dy.$$
Stąd, wobec $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)^2dx = \int_{\mathbb{R}^n} f^*(x)^2dx$, mamy
$$\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f^*(x)^2 k(\|x-y\|)dxdy = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)^2 k(\|x-y\|)dxdy$$
i analogicznie
$$\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} g^*(x)^2 k(\|x-y\|)dxdy = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} g(x)^2 k(\|x-y\|)dxdy.$$
Zatem nierówność 9 przyjmuje postać
$$\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(y)k(\|x-y\|)dxdy \leq \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f^*(x)g^*(y)k(\|x-y\|)dxdy,$$
czyli
$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} I_A^*(x)\cdot I_A^*(y)k(\|x-y\|)dxdy &\geq \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} I_A(x)\cdot I_A(y)k(\|x-y\|)dxdy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} I_A(x)\cdot I_A(y)dxdy = \mu(A)^2.\end{aligned}$$
To jest jednak niemożliwe, bo nośnik I_A^* jest kulą o promieniu R, zatem zawiera dwa zbiory otwarte, oddalone od siebie o więcej niż $2r$. Mamy więc
$$I_A^*(x)\cdot I_A^*(y)\cdot k(\|x-y\|) \leq I_A^*(x)\cdot I_A^*(y),$$
przy czym nierówność jest ostra na zbiorze miary dodatniej. Stąd
$$\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} I_A^*(x)\cdot I_A^*(y)\cdot k(\rho(x,y))dxdy < \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} I_A^*(x)\cdot I_A^*(y)dxdy = \mu(A)^2.$$
□

Twierdzenie 5 *Jeśli M spełnia podstawowe założenie, to dla dowolnych funkcji nieujemnych $f_1,\ldots,f_n \in \mathcal{S}$ zachodzi nierówność*
$$\int_{\mathcal{M}} f_1^*(x)\ldots f_n^*(x)\mu(dx) \geq \int_{\mathcal{M}} f_1(x)\ldots f_n(x)\mu(dx).$$

Dowód W dowodzie pomocny będzie następujący fakt:

Dla dowolnej funkcji nieujemnej $f\in\mathcal{S}$ oraz zbioru miary skończonej A, zachodzi
$$(f\cdot I_A)^* \leq f^*\cdot I_A^* \text{ p.w.}$$

Rzeczywiście, ponieważ $f \geq f\cdot I_A$, mamy $f^* \geq (fI_A)^*$. Jeśli przez B oznaczymy kulę o środku x_0, taką, że $\mu(B)=\mu(A)$, to zarówno $(fI_A)^*$, jak i $f^*I_A^*$ znikają prawie wszędzie poza kulą B. Natomiast na tej kuli $(fI_A)^* \leq f^* = f^*I_A^*$.

Właściwa część dowodu poprowadzona zostanie indukcyjnie. Dla $n=1$ teza jest oczywista. Załóżmy, że teza zachodzi dla pewnej liczby n. Wykażemy, że nierówność jest prawdziwa, gdy f_{n+1} jest postaci
$$f_{n+1} = \sum_{k=1}^{m} a_k I_{A_k},\ a_k > 0,$$

gdzie zbiory A_k są rozłączne oraz ciąg a_k jest ściśle malejący (nie zmniejsza to ogólności, bo każdą funkcję prostą można reprezentować w ten sposób). Ponieważ $f_{n+1} \in \mathcal{S}$, zbiory A_k są skończonej miary. Co więcej standardowe monotoniczne przybliżanie funkcji nieujemnej funkcjami prostymi dla funkcji z $\mathcal{S}$, daje przybliżenie funkcjami z $\mathcal{S}$. Zatem z tego szczególnego przypadku wynika ogólna nierówność, czyli krok indukcyjny.

Niech $B_k = A_1 \cup A_2 \ldots \cup A_k$. Zachodzi tożsamość Abela:

$$f_{n+1} = (a_1 - a_2)I_{B_1} + (a_2 - a_3)I_{B_2} + \ldots + (a_{m-1} - a_m)I_{B_{m-1}} + a_m I_{B_m}$$

Zatem

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{M}} f_1 \ldots f_{n+1}\mu(dx) &= \int_{\mathcal{M}} f_1 \ldots f_n((a_1 - a_2)I_{B_1} + (a_2 - a_3)I_{B_2} + \ldots + a_m I_{B_m})\mu(dx) \\
&= (a_1 - a_2)\int_{\mathcal{M}} f_1 \ldots f_{n-1}(f_n I_{B_1})\mu(dx) + \ldots + a_m \int_{\mathcal{M}} f_1 \ldots f_{n-1}(f_n I_{B_m})\mu(dx) \\
&\leq (a_1 - a_2)\int_{\mathcal{M}} f_1^* \ldots f_{n-1}^*(f_n I_{B_1})^*\mu(dx) + \ldots + a_m \int_{\mathcal{M}} f_1^* \ldots f_{n-1}^*(f_n I_{B_m})^*\mu(dx) \\
&\leq (a_1 - a_2)\int_{\mathcal{M}} f_1^* \ldots f_{n-1}^* f_n^* I_{B_1}^*\mu(dx) + \ldots + a_m \int_{\mathcal{M}} f_1^* \ldots f_{n-1}^* f_n^* I_{B_m}^*\mu(dx) \\
&= \int_{\mathcal{M}} f_1^* \ldots f_n^*(a_1 I_{B_1}^* + a_2(I_{B_2}^* - I_{B_1}^*) + \ldots + a_m(I_{B_m}^* - I_{B_{m-1}}^*))\mu(dx) \\
&= \int_{\mathcal{M}} f_1^* \ldots f_n^* f_{n+1}^*\mu(dx)
\end{aligned}$$

Pierwsza nierówność wynika z założenia indukcyjnego, druga ze spostrzeżenia z początku dowodu.

□

Bibliografia

[1] A. Baerstein, B.A. Taylor, „Spherical rearrangements, subharmonic functions and *-functions in n-space”, *Duke Math* J. 43 (1976), 245-268.

[2] W. Beckner, „Sobolev inequalities, the Poisson semigroup and analysis on the sphere S^n”, *Proc. Nat. Acad. Sci U.S.A.* 89 (1992), 4816-4819.

[3] Elliott H. Lieb and Michael Loss, „Analysis”, *Graduate Studies in Mathematics*, Vol. 14, American Mathematical Society, Providence, RI, 1997.

[4] Krzysztof Maurin, „Analiza”, Część I, Elementy, Wydawnictwo naukowe PWN, Warszawa 1977.

[5] Giorgio Talenti, „Inequalities in rearrangement invariants function spaces”, *Nonlinear Analysis, Function Spaces and Applications*, Vol. 5, Prometheus Publishing House, Prague, 1994.

[6] Walter Rudin, „Analiza rzeczywista i zespolona”, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1998.