Zadania dodatkowe - RP na WNE, 2012/13

Wariancja, kwantyle i inne charakterystyki liczbowe rozkładu zmiennej losowej

1. Zmienna losowa X ma rozkład: $\mathbb{P}(X=1)=p$, $\mathbb{P}(X=0)=1-p$, gdzie $p\in(0,1)$. Znajdź $\mathbb{E}X$ oraz $\mathrm{Var}X$.

2. Niech X ma rozkład $\mathcal{B}(n,p)$. Wiemy, że $\mathbb{E}X=np$. Znajdź $\mathrm{Var}X$.

3. Niech X ma rozkład Poissona z parametrem λ. Wiemy, że $\mathbb{E}X=\lambda$. Znaleźć $\mathrm{Var}X$.

   Wsk.: Najpierw obliczyć $\mathbb{E}X(X-1)$.

4. Rzucamy sześcienną kostką do gry do momentu aż każdy wynik pojawi się przynajmniej raz. Niech X będzie liczbą wykonanych rzutów. Obliczyć $\mathrm{Var}X$.

5. Zmienna losowa X ma średnią m i wariancję σ^2. Znajdź średnią i wariancję zmiennej losowej $Y=\frac{X-m}{\sigma}$.

6. Zmienna losowa X ma rozkład $\mathcal{N}(0,1)$. Stosując wzór na całkowanie przez części pokaż, że dla całkowitego $n\geqslant 1$,

   $$\mathbb{E}X^{n+1}=n\mathbb{E}X^{n-1}.$$

   Następnie wyprowadź wzór na parzyste momenty zmiennej X, tj. oblicz $\mathbb{E}X^{2k}$ dla $k\in\mathbb{N}$, oraz oblicz kurtozę zmiennej X, czyli $\alpha_4=\frac{\mathbb{E}(X-\mathbb{E}X)^4}{(\mathrm{Var}X)^2}-3$.

7. Dla $p\in(0,1)$ znajdź kwantyl rzędu p zmiennej losowej X, której dystrybuanta zadaje się wzorem

   a) $$F(t)=\begin{cases}0 & \text{dla } x<0\\ t^2 & \text{dla } x\in[0,1)\\ 1 & \text{dla } x\geqslant 1;\end{cases}$$

   b) $$F(t)=\begin{cases}0 & \text{dla } x<0\\ \frac{1}{2}t & \text{dla } x\in[0,1)\\ \frac{1}{2} & \text{dla } x\in[1,2)\\ \frac{1}{4}t & \text{dla } x\in[2,4)\\ 1 & \text{dla } x\geqslant 4.\end{cases}$$

8. Znajdź wszystkie liczby rzeczywiste, które stanowią medianę (kwantyl rzędu 1/2) zmiennej X o dystrybuancie

   $$F(t)=\begin{cases}0 & \text{dla } x<0\\ \frac{1}{2}t & \text{dla } x\in[0,1)\\ \frac{1}{2} & \text{dla } x\in[1,4)\\ 1 & \text{dla } x\geqslant 4.\end{cases}$$

9. Znajdź medianę rozkładu wykładniczego z parametrem λ. Jak ma się ona do wartości oczekiwanej tego rozkładu?

10. Zmienna losowa X ma rozkład wykładniczy z parametrem 1. Stosując wzór na całkowanie przez części, oblicz $\mathbb{E}X^n$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$. Następnie znajdź współczynnik skośności (α_3) oraz kurtozę (α_4) zmiennej X.

11. Dla dowolnego naturalnego n znajdź $\mathbb{E}Y^n$, gdzie Y ma rozkład $\mathrm{Exp}(\lambda)$.

    Wsk.: jaki rozkład ma zmienna $X = \lambda Y$?