

Zadania dodatkowe - RP na WNE, 2012/13

Wartość oczekiwana zmiennej losowej

1. Wyznaczyć wartość oczekiwaną rozkładu

- a) jednostajnego  $\mathcal{U}(a, b)$ ,
- b) wykładniczego  $\text{Exp}(\lambda)$ ,
- c) Bernoulliego  $\mathcal{B}(n, p)$ ,
- d) geometrycznego  $\text{Geom}(p)$ ,
- e) Poissona  $\text{Pois}(\lambda)$ .

2. Niech  $X$  będzie zmienną o rozkładzie

- a) jednostajnym  $\mathcal{U}(a, b)$ ,
- b) wykładniczym  $\text{Exp}(\lambda)$ , przy czym  $\lambda > 1$ ,
- c) normalny  $\mathcal{N}(0, 1)$ .

Obliczyć  $\mathbb{E}X^2$  oraz  $\mathbb{E}e^X$ .

3. Dystrybuanta zmiennej losowej  $X$  wyraża się wzorem

$$\text{a) } F(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0 \\ t^2 & \text{dla } x \in [0, 1) \\ 1 & \text{dla } x \geq 1. \end{cases}$$

$$\text{b) } F(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0 \\ \frac{1}{2}t^2 & \text{dla } x \in [0, 1) \\ 1 & \text{dla } x \geq 1. \end{cases}$$

$$\text{c) } F(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0 \\ \frac{1}{2}t & \text{dla } x \in [0, 1) \\ \frac{1}{2} & \text{dla } x \in [1, 2) \\ \frac{1}{4}t & \text{dla } x \in [2, 4) \\ 1 & \text{dla } x \geq 4. \end{cases}$$

$$\text{d) } F(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0 \\ \frac{1}{2}t & \text{dla } x \in [0, 1) \\ \frac{1}{2} & \text{dla } x \in [1, 4) \\ 1 & \text{dla } x \geq 4. \end{cases}$$

Obliczyć  $\mathbb{E}X$  oraz  $\mathbb{E}X^2$ .

4. Niech  $0 \leq p \leq 1$  będzie ustalonym punktem z odcinka  $[0, 1]$ . Z tego samego odcinka  $[0, 1]$  losujemy punkt  $X$ , który dzieli nasz odcinek na dwa kawałki:  $[0, X]$  oraz  $[X, 1]$ . Znajdź wartość oczekiwaną długości tego kawałka, który zawiera punkt  $p$ .

5. Gramy 30 rozdań w brydża. Niech  $X$  oznacza liczbą tych rozdań, w których mieliśmy asa pik lub asa karo. Wyznaczyć  $\mathbb{E}X$ .

6.  $n$  osób, wśród których są osoby A i B, ustawia się losowo w kolejce. Niech  $X$  oznacza liczbę osób stojących między A i B. Wyznaczyć  $\mathbb{E}X$ .
7. Klasa liczy  $n$  uczniów. Liczymy ile par uczniów ma urodziny tego samego dnia. Znaleźć wartość oczekiwaną liczby takich par. (Zakładamy, że nikt nie obchodzi urodzin 29 lutego; ponadto, jeśli trójka uczniów ma urodziny tego samego dnia, to trójka ta tworzy 3 pary.)