Zadania dodatkowe - RP na WNE, 2012/13

Zmienne losowe — rozkład, dystrybuanta, gęstość

1. Niech zmienna losowa X będzie liczbą sukcesów w schemacie Bernoulliego $\mathcal{B}(n=5, p=\frac{1}{4})$. Przyjmując standardową konstrukcję przestrzeni probabilistycznej dla schematu Bernoulliego (np. $\Omega = \{0,1\}^n$, etc.), zidentyfikować czym są następujące zdarzenia: $\{X \geqslant 4\}$, $\{-1 < X < 2\}$, $\{X = 2\}$. Następnie wyznaczyć ich prawdopodobieństwa, tzn. policzyć $\mathbb{P}(X \geqslant 4)$ oraz $\mathbb{P}(-1 < X < 2)$, $\mathbb{P}(X = 2)$.

2. Losujemy punkt z odcinka $[0,1]$ i względem tego punktu dzielimy nasz odcinek na dwa mniejsze. Przez X oznaczmy zmienną losową będącą ilorazem długości krótszego do długości dłuższego z uzyskanych odcinków. Przyjmując naturalną konstrukcję przestrzeni probabilistycznej dla powyższego doświadczenia losowego ($\Omega = [0,1]$), zidentyfikuj zdarzenia: $\{X \leqslant 1/2\}$, $\{1/4 < X \leqslant 1/3\}$, $\{X = 1/2\}$. Następnie oblicz $\mathbb{P}(X \leqslant 1/2)$, $\mathbb{P}(1/4 < X \leqslant 1/3)$, $\mathbb{P}(X = 1/2)$.

3. Niech zmienna losowa X będzie sumą oczek jakie wypadły przy rzucie dwoma kostkami. Opisać rozkład zmiennej losowej X a także wypisać jej dystrybuantę.

4. Wyznaczyć dystrybuantę rozkładu

   a) dwupunktowego $p\delta_a + (1-p)\delta_b$, gdzie $a < b$ (innymi słowy, jest to rozkład zmiennej losowej X, dla której $\mathbb{P}(X = a) = p$ oraz $\mathbb{P}(X = b) = 1 - p$);

   b) jednostajnego na odcinku (a, b), gdzie $a < b$;

   c) wykładniczego z parametrem $\lambda > 0$ (gęstość tego rozkładu wyraża się wzorem $\lambda e^{-\lambda x}\mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)$).

5. Znajdź dystrybuantę i gęstość (o ile istnieje) zmiennej losowej X z zadania 2.

6. Dystrybuanta zmiennej losowej X wyraża się wzorem

   a) $F(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0 \\ t^2 & \text{dla } x \in [0,1) \\ 1 & \text{dla } x \geqslant 1. \end{cases}$

   b) $F(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0 \\ \frac{1}{2}t^2 & \text{dla } x \in [0,1) \\ 1 & \text{dla } x \geqslant 1. \end{cases}$

   c) $F(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0 \\ \frac{1}{2}t & \text{dla } x \in [0,1) \\ \frac{1}{2} & \text{dla } x \in [1,2) \\ \frac{1}{4}t & \text{dla } x \in [2,4) \\ 1 & \text{dla } x \geqslant 4. \end{cases}$

   d) $F(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0 \\ \frac{1}{2}t & \text{dla } x \in [0,1) \\ \frac{1}{2} & \text{dla } x \in [1,4) \\ 1 & \text{dla } x \geqslant 4. \end{cases}$

Czy X jest zmienną losową ciągłą (tzn. czy rozkład X jest ciągły). Jeśli tak, to znaleźć gęstość X.

7. Przy rzucie pewną monetą orzeł wypada z prawdopodobieństwem $p \in (0,1)$. Przypuśćmy, że rzucamy tą monetą aż wypadnie orzeł i niech X oznacza liczbę wykonanych rzutów. Znaleźć rozkład zmiennej losowej X oraz jej dystrybuantę.

8. Niech X będzie zmienną losową o rozkładzie geometrycznym z parametrem p (patrz zadanie 7). Obliczyć prawdopodobieństwo warunkowe $\mathbb{P}(X > k+l \,|\, X > k)$ dla $k, l > 0$. Otrzymany wynik zinterpretować w kontekście doświadczenia losowego z zadania 7.

9. Pokazać, że funkcja $g(x) = 3x^2 e^{-x^3} \mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)$ jest gęstością prawdopodobieństwa. Niech X będzie zmienną losową o tej gęstości. Wyznaczyć rozkład zmiennej losowej $Y = \max(X^2, 3X)$. (Wsk.: znajdź dystrybuantę Y.)

10. Zmienna losowa X ma rozkład jednostajny an odcinku $(0,1)$. Znaleźć rozkład zmiennej $Y = -\ln X$.

11. Zmienna losowa X ma rozkład $\mathcal{N}(0,1)$. Znaleźć rozkład zmiennej

    a) $Y = e^X$;

    b) $Y = X^2$.

12. Zmienna losowa X ma rozkład wykładniczy z parametrem λ. Znaleźć rozkład zmiennej

    a) $Y = \frac{1}{X+1}$;

    b) $Y = \sqrt{X}$.

13. Zmienna losowa X ma rozkład jednostajny na przedziale $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Znaleźć rozkład zmiennej $Y = \sin X$.

14. Losujemy punkt z koła o środku w $(0,0)$ i promieniu 1. Niech X będzie współrzędną x wylosowanego punktu. Znaleźć dystrybuantę i gęstość (o ile istnieje) zmiennej X.