

Zadania dodatkowe - RP na WNE, 2012/13

Przestrzeń probabilistyczna, prawdopodobieństwo klasyczne, p-stwo geometryczne

1. W urnie znajduje się 9 kul ponumerowanych liczbami całkowitymi $1, 2, \dots, 9$. Zaproponuj zbiór zdarzeń elementarnych dla następujących doświadczeń losowych:

- a) losowanie 3 kul ze zwracaniem;
- b) losowanie 3 kul bez zwracania.

Czy (na poziomie intuicyjnym) zaproponowane zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne? (Innymi słowy, czy model klasyczny $\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$ właściwie opisuje powyższe doświadczenia losowe?)

2. Rozważmy następujący eksperyment losowy: rzucamy kostką do gry tak długo aż wypadnie szóstka.

- a) Zaproponuj zbiór zdarzeń elementarnych dla takiego eksperymentu.
- b) Niech A_n będzie zdarzeniem, że szóstka wypadła w n -tym rzucie ($n = 1, 2, 3, \dots$). Jakie zdarzenia elementarne składają się na A_n ?
- c) Czym jest $(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)'$?

3. Niech A i B będą pewnymi zdarzeniami. Używając operacji na zdarzeniach $\cup, \cap, '$, zapisz następujące zdarzenia:

- zaszło tylko A ;
- zaszło co najwyżej jedno ze zdarzeń A, B ;
- zaszło dokładnie jedno ze zdarzeń A, B ;
- żadne ze zdarzeń A, B nie zaszło

4. A i B są pewnymi zdarzeniami. Uzasadnij, że prawdopodobieństwo, że zajdzie dokładnie jedno ze zdarzeń A, B wynosi $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 2\mathbb{P}(A \cap B)$.

5. (*) Zdarzenia A, B, C spełniają $\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B), \mathbb{P}(C) \geq 2/3$ oraz $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = 0$. Co można powiedzieć o $\mathbb{P}(A)$?

6. Na bankiecie, przy okrągłym stole siadają losowo Ania, Bartek, Czarek i jeszcze 4 osoby. Jakie jest prawdopodobieństwo, że Ania będzie siedzieć między Bartkiem i Czarkiem?

7. Z 52 kart wybrano 13. Jaka jest szansa otrzymania dokładnie siedmiu kart jednego koloru?

8. Rzucamy n razy kostką do gry. Jakie jest prawdopodobieństwo, że przynajmniej raz wypadnie szóstka?

9. (Paradoks kawalera de Méré) Co jest bardziej prawdopodobne: wyrzucenie co najmniej jednej jedynek przy rzucie 4 kostkami czy co najmniej raz obu jedynek przy 24 rzutach dwiema kostkami?

10. Co jest bardziej prawdopodobne: otrzymanie szóstki przynajmniej raz rzucając kostką 6 razy, otrzymanie przynajmniej dwóch szóstek rzucając kostką 12 razy, czy też otrzymanie przynajmniej trzech szóstek rzucając kostką 18 razy?

11. Klasa liczy 15 uczniów, na każdej lekcji do odpowiedzi losowany jest jeden uczeń. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że w ciągu 16 lekcji każdy uczeń zostanie przepytany.
12. Grupa studentów liczy 23 osoby. Jakie jest prawdopodobieństwo, że w tej grupie są przynajmniej dwie osoby, które mają urodziny tego samego dnia? (Zakładamy, że żaden student nie jest urodzony w roku przestępnym.)
13. (*) Losujemy 6 liczb z 49. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wśród wylosowanych nie będzie dwóch kolejnych liczb?
14. Roztargniona sekretarka rozmieściła losowo n listów w n uprzednio zaadresowanych kopertach. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że choć jeden list trafił do właściwej koperty.
15. Z odcinka $[0, 1]$ losujemy dwie liczby a, b . Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że $3 \min\{a, b\} \leq \max\{a, b\}$.