Zadania dodatkowe - RP na WNE, 2012/13

Kombinatoryka

1. Ile jest możliwych wyników serii 10 rzutów monetą? Innymi słowy, ile jest ciągów długości 10 złożonych złożonych z liter `O` i `R`?
2. Ile jest haseł pięcioliterowych złożonych z małych liter alfabetu angielskiego (składa się on z 26 liter)?
3. Ile jest haseł pięcioliterowych złożonych z **różnych** małych liter alfabetu angielskiego?
4. Ile różnych szecioliterowych haseł można ułożyć z następujących wyrazów, zmieniając jedynie kolejność występujących w nich liter?
   a) POLSKA
   b) AKACJA
   c) PEPPER
5. Ciągniemy (bez zwracania) 2 karty z talii 52 kart. Ile jest różnych par kart jakie możemy otrzymać?
6. Ile możliwych układów kart może otrzymać gracz w brydża (otrzymuje on 13 kart z talii 52)?
7. Na WNE studiuje m studentek i n studentów. Na ile sposobów można wybrać 7-osobowy skład samorządu studenckiego, jeśli
   a) nie ma ograniczeń co do parytetu płci
   b) w składzie muszą być dokładnie 4 studentki.
8. Niech m, n, k będą liczbami całkowitymi nieujemnymi. Uzasadnij, że
$$\binom{m+n}{k} = \binom{m}{0}\binom{n}{k} + \binom{m}{1}\binom{n}{k-1} + \binom{m}{2}\binom{n}{k-2} + \ldots + \binom{m}{k}\binom{n}{0}$$
   podając stosowną interpretację kombinatoryczną występujących powyżej wyrażeń. *Wskazówka: wstaw najpierw $k = 7$ i porównaj z poprzednim zadaniem.*
9. Zbiór A ma n elementów. Ile jest podzbiorów zbioru A (włączając zbiór pusty jak i sam zbiór A)?
10. Podaj kombinatoryczne uzasadnienie następujących tożsamości:
    a) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
    b) $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$
    c) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$ (zakładamy, że $n > k \geqslant 1$ są liczbami całkowitymi).
11. Korzystając z tożsamości z punktu c) poprzedniego zadania utwórz trójkątną tablicę zawierającą wartości kolejnych symboli Newtona $\binom{n}{k}$ (tzw. trójkąt Pascala; n będzie odpowiadało numerowi wiersza tablicy, zaś k numerowi elementu w danym wierszu, licząc od lewej; zarówno wiersze jak i elementy w każdym wierszu numerujemy od 0).

12. Wszyscy wiemy, że $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ oraz $(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$. Jak wygląda analogiczne rozwinięcie

    a) $(x+y)^4$?

    b) $(x+y)^5$?

    c) $(x+y)^n$? Odpowiedź uzasadnij przy pomocy odpowiedniego rozumowania kombinatorycznego.

13. Oblicz

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k.$$

Wskazówka: skorzystaj z punktu c) poprzedniego zadania.

14. Niech $n \geqslant k \geqslant 1$ będą liczbami całkowitymi. Za pomocą bezpośredniego rachunku sprawdź, że

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}.$$

15. Niech $n, k \geqslant 1$ będą liczbami całkowitymi. Rozważamy k elementowe ciągi złożone z liczb całkowitych $1, 2, \ldots, n$.

    a) Ile jest wszystkich takich ciągów?

    b) Ile jest ciągów różnowartościowych? (Tj. żadna z liczb $1, 2, \ldots, n$ nie występuje w ciągu więcej niż raz.)

    c) Ile jest ciągów ściśle rosnących?

    *d) Ile jest ciągów niemalejących?
    Wskazówka: najpierw zauważ, że takich ciągów jest tyle samo ile k elementowych ściśle rosnących ciągów o wartościach w liczbach całkowitych od 1 do $n+k-1$. Dlaczego?

16. Na ile sposobów można posadzić 8 osób w rzędzie, jeśli

    a) osoby A i B mają siedzieć obok siebie?

    b) wśród tych 8 osób jest 4 mężczyzn oraz 4 kobiety i osoby tej samej płci nie mogą siedzieć obok siebie?

    c) wśród tych 8 osób jest dokładnie 5 mężczyzn i muszą oni siedzieć razem?

    d) na te 8 osób składają się 4 pary małżeńskie i każda para musi siedzieć razem?