

RP WNE 2012/2013, IX seria zadań

1. Rzucono dwa razy prawidłową kostką. Niech X oznacza liczbę wyrzuconych szóstek, a Y - liczbę wyrzuconych piątek. Na jakim zbiorze jest skoncentrowana zmienna (X, Y) ? Obliczyć $\mathbb{P}(X > Y)$ oraz $\text{Cov}(X, Y)$.

2. Zmienna losowa (X, Y) ma rozkład zadany przez

$$\mathbb{P}((X, Y) = (k, \ell)) = \frac{4k\ell}{n^2(n+1)^2}, \quad k, \ell = 1, 2, \dots, n.$$

- Obliczyć $\mathbb{P}(X + Y = n + 1)$.
- Wyznaczyć rozkład zmiennej X .
- Obliczyć $\text{Cov}(X, Y)$.
- Czy zmienne X, Y są niezależne?

3. Dwuwymiarowa zmienna losowa (X, Y) ma rozkład z gęstością $g(x, y) = Cx1_{\{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}}$. Obliczyć C , $\mathbb{P}(X + Y < 1)$ oraz $\mathbb{P}(Y \leq 1/2)$. Wyznaczyć rozkłady zmiennych X oraz Y .

4. Zmienne X, Y są całkowalne z kwadratem. Macierz kowariancji zmiennej (X, Y) wynosi

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Obliczyć współczynnik korelacji zmiennych $X + 3Y, 2X - Y$.

5. Dwuwymiarowa zmienna losowa (X, Y) ma rozkład z gęstością

$$g(x, y) = xe^{-y}1_{\{0 \leq x \leq y\}}.$$

- Wyznaczyć rozkład zmiennej X .
- Obliczyć $\mathbb{E}e^{Y/2}$.
- Obliczyć wartość dystrybuanty zmiennej (X, Y) w punkcie $(1, 1)$.
- Wyznaczyć rozkład zmiennej Y/X .

Przykładowe zagadnienia na kartkówkę

1. Podać definicję dystrybuanty dwuwymiarowej zmiennej losowej (X, Y) .

2. Podać definicję współczynnika korelacji zmiennych X, Y .

3. Podać definicję macierzy kowariancji zmiennej (X, Y) .

4. Rzucono trzy razy prawidłową monetą. Niech X oznacza liczbę orłów w pierwszych dwóch rzutach, a Y - łączną liczbę orłów. Wyznaczyć $\mathbb{P}(X = Y)$ oraz $\text{Cov}(X, Y)$.

5. Zmienna (X, Y) ma rozkład z gęstością $g(x, y) = Cxy1_{\{(x, y): 0 \leq x \leq y \leq 1\}}$. Obliczyć C oraz $\mathbb{P}(X \geq 1/2)$.

6. Zmienna losowa ma rozkład z gęstością $g(x, y) = 1_{\{0 \leq y \leq 1 - |x|\}}$.

- Podać wartość dystrybuanty zmiennej (X, Y) w punkcie $(1, \frac{1}{2})$.
- Wyznaczyć gęstości zmiennych X i Y .
- Obliczyć $\text{Cov}(X, Y)$.
- Wyznaczyć rozkład zmiennej $Y - X$.

7. Rzucamy prawidłową kostką aż do wypadnięcia szóstki. Niech X oznacza łączną liczbę rzutów, a Y - liczbę wyrzuconych piątek.

- Wyznaczyć rozkład (X, Y) .
- Czy zmienne X, Y są niezależne?