

## RP WNE 2012/2013, V + VI seria zadań

Uwaga: ze względu na różną liczbę zajęć w różnych grupach ćwiczeniowych, zadania z tej serii przeznaczone są dla osób mających ćwiczenia w środy od godz. 15:00 i w piątki

1. Dystrybuanta  $F$  zmiennej losowej  $X$  zadana jest następująco:

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{jeśli } t < -2, \\ \frac{1}{3} & \text{jeśli } t \in [-2, 0), \\ \frac{1}{3}t + 1/2 & \text{jeśli } t \in [0, 1), \\ \frac{5}{6} & \text{jeśli } t \in [1, 5), \\ 1 & \text{jeśli } t \geq 5. \end{cases}$$

Obliczyć  $\mathbb{P}(X \in (3, 7))$ ,  $\mathbb{P}(X \in [-2, -1])$ ,  $\mathbb{P}(X \in [-2, -1))$ ,  $\mathbb{P}(X = 0)$ ,  $\mathbb{P}(|X| \leq 1)$ . Czy  $X$  ma rozkład dyskretny? Czy  $X$  ma rozkład ciągły? Wyznaczyć kwantyl rzędu  $\rho = 1/4$ .

2. Zmienna losowa  $X$  ma rozkład z gęstością  $g(x) = \frac{3}{8}x^2 1_{(0,2)}(x)$ . Wyznaczyć rozkłady zmiennych a)  $\max\{X, 1\}$ , b)  $X^{-2}$ . Czy te rozkłady są ciągłe? W przypadku odpowiedzi twierdzącej, podać gęstość.

3. Zmienna losowa  $X$  ma rozkład normalny  $\mathcal{N}(0, 1)$ . Wyznaczyć rozkłady zmiennych a)  $e^X$ , b)  $X^2$ . Czy te rozkłady są ciągłe? W przypadku odpowiedzi twierdzącej, podać gęstość.

4. Wyznaczyć kwantyl rzędu  $\rho = 5/16$  dla a) rozkładu wykładniczego z parametrem  $\lambda$ , b) rozkładu Bernoulliego z parametrami 4,  $1/2$ .

5. Zmienna losowa  $X$  ma rozkład zadany przez równości

$$\mathbb{P}(X = -1) = \mathbb{P}(X = 0) = \frac{1}{4}, \quad \mathbb{P}(X = 3) = \frac{1}{3}, \quad \mathbb{P}(X = 5) = \frac{1}{6}.$$

Obliczyć  $\mathbb{E}X$  oraz  $\mathbb{E}(2X - 1)$ .

6. Zmienna losowa  $X$  ma rozkład z gęstością  $g(x) = \frac{4}{\pi} \frac{1}{1+x^2} 1_{[0,1]}(x)$ . Obliczyć  $\mathbb{E}X$  oraz  $\mathbb{E}(3 - 2X)$ .

### Przykładowe zagadnienia na kartkówkę

1. Jakie warunki muszą spełniać parametry  $a, b \in \mathbb{R}$ , by funkcja  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , zadana wzorem

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{jeśli } t < 1, \\ a + \frac{b}{t} & \text{jeśli } t \geq 1, \end{cases}$$

była dystrybuantą pewnego rozkładu prawdopodobieństwa? Co dodatkowo trzeba założyć, aby taki rozkład był ciągły (tzn. miał gęstość)?

2. Z koła o promieniu  $R$  losujemy punkt. Niech  $X$  oznacza odległość tego punktu od środka koła. Wyznaczyć rozkład zmiennej  $X^2$ .

3. Zmienna losowa  $X$  ma rozkład z gęstością  $g(x) = \frac{1}{2}x 1_{[0,2]}(x)$ . Wyznaczyć rozkład zmiennej  $Y = \min\{X - 1, 0\}$ . Czy ma on gęstość?

4. Podać definicję kwantyla rzędu  $\rho$  rozkładu zmiennej losowej  $X$ .

5. Zmienna losowa  $X$  ma rozkład skoncentrowany na zbiorze  $\{1, 2, \dots, 10\}$ , zadany przez

$$\mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{2}, \quad \mathbb{P}(X = 2) = \mathbb{P}(X = 3) = \dots = \mathbb{P}(X = 10) = p.$$

Obliczyć  $p$ ,  $\mathbb{E}X$  oraz  $\mathbb{E}(4X + 5)$ .

6. Zmienna losowa  $X$  ma rozkład z gęstością  $g(x) = C\sqrt{x} 1_{[0,1]}(x)$ . Obliczyć  $C$ ,  $\mathbb{E}X$  oraz  $\mathbb{E}(5X + 2)$ .