RP WNE 2012/2013, XIII seria zadań

1. Zmienne losowe X_1, X_2, ... są niezależne o rozkładzie a) $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1/2 = \mathbb{P}(X_n = 2)$; b) jednostajnym na odcinku $[0, 1]$. Czy ciąg zmiennych losowych (Y_n), gdzie $Y_n = X_1 X_2 \cdot \ldots \cdot X_n$, jest zbieżny według prawdopodobieństwa? Jeśli tak, to wyznacz jego granicę.

2. Zmienne losowe X_1, X_2, ... są nieskorelowane, przy czym dla $n \geqslant 1$ zmienna X_n ma rozkład jednostajny na przedziale $[-1/n, 1/n]$. Czy ciąg

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

jest zbieżny według prawdopodobieństwa?

3. Zmienne losowe X_1, X_2, ... są nieskorelowane, przy czym dla $n \geqslant 1$ zmienna X_n ma rozkład $\mathbb{P}(X_n = -n) = \mathbb{P}(X_n = n) = 1/2$. Rozstrzygnąć, czy ciąg

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

jest zbieżny według prawdopodobieństwa.

4. Zmienne losowe X_1, X_2, ... są niezależne i mają rozkład wykładniczy z parametrem 2. Zbadać zbieżność p.n. ciągu

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n + 3}{n + 31}, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

5. Z odcinka $[0, 3]$ losujemy w sposób niezależny kolejno punkty A_1, A_2, ... Dla każdego n, niech S_n oznacza liczbę tych punktów spośród A_1, A_2, ..., A_n, które wpadły do odcinka $[0, 1]$. Sprawdzić, że $\frac{S_n}{n} \to \frac{1}{3}$ p.n.

6. Niech X_1, $X_2, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładu Cauchy'ego, i niech $S_n = X_1 + ... + X_n$. Korzystając z faktu, iż średnia n niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie Cauchy'ego ma rozkład Cauchy'ego, zbadać zbieżność zmiennej losowej $\frac{S_n}{n}$ i porównać z tezą mocnego prawa wielkich liczb.

7. Rozważmy niesymetryczne błądzenie losowe po zbiorze liczb całkowitych. Niech S_n oznacza położenie w chwili n, przy czym $S_0 = 0$, a dla $n > 0$ definiujemy $S_n = X_1 + X_2 \ldots + X_n$, gdzie X_i są niezależnymi zmiennymi losowymi takimi że $\mathbb{P}(X_i = 1) = 1 - \mathbb{P}(X_i = -1) = p$ dla pewnego $p \neq \frac{1}{2}$. Udowodnić, że $\mathbb{P}(\lim_{n\to\infty} S_n = \infty) = 1$ dla $p > \frac{1}{2}$ oraz $\mathbb{P}(\lim_{n\to\infty} S_n = -\infty) = 1$ dla $p < \frac{1}{2}$.

Przykładowe zagadnienia na kartkówkę

1. Podać definicje zbieżności według prawdopodobieństwa i prawie na pewno.

2. Sformułować słabe i mocne prawa wielkich liczb dla schematu Bernoulliego.

3. Zmienne losowe X_1, X_2, ... są nieskorelowane, przy czym dla $n \geqslant 1$ zmienna X_n ma rozkład $\mathbb{P}(X_n = -n) = \mathbb{P}(X_n = n) = 1/(2n^2)$, $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - 1/n^2$. Rozstrzygnąć, czy ciąg

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

jest zbieżny według prawdopodobieństwa.

4. Zmienne X_1, X_2, ... są niezależne i mają rozkład $\mathcal{U}([0, 1])$. Udowodnić, że ciąg

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

jest zbieżny p.n. i wyznaczyć jego granicę.