RP WNE 2012/2013, XII seria zadań

1. Zmienna losowa (X, Y) ma rozkład jednostajny na trójkącie o wierzchołkach $(0,0)$, $(1,0)$ oraz $(0,1)$. Obliczyć $\mathbb{E}(Y|X)$, $\mathbb{E}(XY^2 + 3X^2Y - 1|X)$ oraz $\mathbb{E}(\sin Y|X)$.

2. Zmienna losowa (X, Y) ma rozkład z gęstością

$$g(x, y) = e^{-x} 1_{\{0 \leqslant y \leqslant x\}}.$$

Obliczyć $\mathbb{E}(X|Y)$, $\mathbb{E}(XY|Y)$ oraz $\mathbb{P}(X \geqslant 3|Y)$.

3. Rzucamy raz kostką, a następnie rzucamy nią tyle razy, ile oczek wypadło za pierwszym razem. Niech X oznacza sumę wszystkich liczb oczek (łącznie z pierwszym rzutem). Obliczyć $\mathbb{E}X$.

4. Czas oczekiwania X na pierwszy spadek notowań pewnej firmy ma rozkład wykładniczy z parametrem 3. Zakładając, że spadek miał miejsce w chwili t, czas oczekiwania na pierwszy wzrost notowań (począwszy od chwili t), oznaczony przez Y, ma ponownie rozkład wykładniczy, tym razem z parametrem $1/t$. Obliczyć $\mathbb{E}(X + Y)$.

5. Dokonujemy stukrotnego pomiaru pewnej wielkości fizycznej. Błędy związane z kolejnymi pomiarami są niezależnymi zmiennymi losowymi o średniej 0 i wariancji $0,1$. Korzystając z nierówności Czebyszewa-Bienaymé, oszacować z góry prawdopodobieństwo, że wartość bezwzględna sumarycznego błędu przekroczy 10.

6. Korzystając z nierówności Bernsteina, oszacować z góry prawdopodobieństwo, że przy trzystukrotnym rzucie prawidłową kostką szóstka wypadnie co najmniej 60 razy.

Przykładowe zagadnienia na kartkówkę

1. Pracownik wykonuje dwie rozmowy telefoniczne: czas trwania pierwszej rozmowy, oznaczony przez X, ma rozkład jednostajny na przedziale $[10, 20]$; czas trwania drugiej rozmowy ma rozkład jednostajny na przedziale $[5, X]$. Wyznaczyć wartość oczekiwaną łącznego czasu trwania rozmów.

2. Liczba monet w urnie jest zmienną losową o rozkładzie Poissona z parametrem 2. Losujemy kolejno monety z urny i każdą z nich wykonujemy rzut. Niech X oznacza liczbę wyrzuconych orłów. Obliczyć $\mathbb{E}X$.

3. Rzucono raz kostką i raz monetą. Niech X oznacza liczbę wyrzuconych oczek, pomnożoną przez 2 jeśli na monecie wypadł orzeł. Obliczyć $\mathbb{E}X$.

4. Na odcinku $[0, 1]$ wybieramy losowo liczbę X (zgodnie z rozkładem jednostajnym), a następnie z odcinka $[0, X]$ wybieramy losowo liczbę Y (także zgodnie z rozkładem jednostajnym). Obliczyć $\mathbb{E}Y$.

5. Zmienna losowa (X, Y) ma rozkład jednostajny na trójkącie o wierzchołkach $(2, 0)$, $(0, 1)$ oraz $(-1, 0)$. Obliczyć $\mathbb{E}(X|Y)$ oraz $\mathbb{E}(X^2 + XY|Y)$.

6. Zmienna losowa (X, Y) ma rozkład z gęstością

$$g(x, y) = (x + y) 1_{\{0 \leqslant x \leqslant 1,\, 0 \leqslant y \leqslant 1\}}.$$

Wyznaczyć $\mathbb{E}(X|Y)$ oraz $\mathbb{E}(\sin X + Y|Y)$.

7. Sformułować nierówność Czebyszewa i nierówność Bernsteina.

8. Rzucono 100 razy prawidłową monetą. Korzystając z nierówności Bernsteina, oszacować prawdopodobieństwo, że orzeł pojawi się w ponad 60% rzutów.