

RP WNE 2012/2013, XI seria zadań

1. Porównano zatrudnienie w różnych szwalniach w pewnej strefie ekonomicznej. Zaobserwowano, iż liczba krawcowych zatrudnionych w poszczególnych firmach jest zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na przedziale $[100, 300]$. Wynagrodzenie krawcowej zależy od firmy, i wynosi średnio 2400 PLN przy odchyleniu standardowym $400\sqrt{3}$. Stwierdzono, iż współczynnik korelacji wielkości zatrudnienia i poziomu wynagrodzenia w zbadanych firmach równy jest 0,6. Wyznaczyć najlepsze liniowe przybliżenie zależności między oferowanym wynagrodzeniem a liczbą osób podejmującą zatrudnienie w danej firmie.

2. W urnie nr 1 znajdują się trzy kule ponumerowane liczbami 1, 2 i 3, a w urnie nr 2 - dwie kule, z numerami 1 i 2. Losujemy urnę, a z urny jedną kulę. Niech X oznacza numer wylosowanej urny, a Y - numer wylosowanej kuli. Obliczyć $\mathbb{E}(Y|X)$ oraz $\mathbb{E}(X|Y)$.

3. Rzucono dwa razy kostką i przez X, Y oznaczono liczby oczek w pierwszym i drugim rzucie. Obliczyć $\mathbb{E}(Y|X)$, $\mathbb{E}(X + Y|X)$ oraz $\mathbb{E}(X|X + Y)$.

4. Ze zbioru $\{1, 2, \dots, 10\}$ losujemy bez zwracania dwie liczby, mniejszą oznaczamy przez X , a większą przez Y . Obliczyć $\mathbb{E}(X|Y)$ oraz $\mathbb{E}(XY + X|X)$.

5. Miesięczne zużycie energii elektrycznej w pewnej fabryce ma rozkład jednostajny na przedziale $[200, 250]$. Przy zadanym zużyciu λ , ilość wyemitowanego dwutlenku węgla ma rozkład wykładniczy z parametrem $5 - \lambda/100$. Wyznaczyć rozkład (gęstość) ilości wyemitowanego dwutlenku węgla w ciągu danego miesiąca.

Przykładowe zagadnienia na kartkówkę

1. Podać wzory na współczynniki a i b najlepszego liniowego przybliżenia zmiennej losowej Y zmienną losową X .

2. Podać definicję warunkowej wartości oczekiwanej dla zmiennej dyskretnej.

3. Nadajnik wysyła sygnał X . Odbiornik odbiera sygnał $Y = aX + Z$, gdzie $a > 0$ jest współczynnikiem wzmocnienia, zaś Z jest zakłóceniem. Wiadomo, że X, Z są niezależnymi zmiennymi losowymi, przy czym $\mathbb{E}X = m$, $\text{Var } X = 1$, $\mathbb{E}Z = 0$ oraz $\text{Var } Z = \sigma^2$. Wyznaczyć współczynnik korelacji liniowej zmiennych X, Y oraz regresję liniową X względem Y .

4. Wiadomo, że $\mathbb{P}(Y = 1|X = 5) = 1/3$ oraz $\mathbb{P}(Y = 5|X = 5) = 2/3$. Obliczyć $\mathbb{E}(Y|X = 5)$ oraz $\mathbb{E}(XY^2|X = 5)$.

5. W urnie znajdują się dwie białe kule, z numerami 1 i 2, oraz trzy czarne kule, z numerami 1, 2 oraz 3. Z urny wyciągnięto bez zwracania dwie kule. Niech X oznacza niewiększy z wylosowanych numerów, a Y oznacza liczbę wylosowanych białych kul. Obliczyć $\mathbb{E}(Y|X)$ oraz $\mathbb{E}(X|Y)$.

6. Rzucono trzy razy monetą. Niech X oznacza łączną liczbę wypadniętych orłów oraz

$$Y = \begin{cases} 1 & \text{jeśli w ostatnim rzucie wypadł orzeł,} \\ 0 & \text{jeśli w ostatnim rzucie wypadła reszka.} \end{cases}$$

Obliczyć $\mathbb{E}(X|Y)$ oraz $\mathbb{E}(XY|X)$.