Kolokwium z Rachunku Prawdopodobieństwa, 1 grudnia 2012r.

Wersja I

Instrukcja:

- Uważnie przeczytaj treści zadań. W szczególności zwróć uwagę jakie polecenia są do wykonania w danym zadaniu.
- Rozwiązanie każdego zadania należy pisać na **osobnej kartce**. Każda kartka musi być podpisana **czytelnie i DRUKOWANYMI literami imieniem i nazwiskiem, numerem indeksu** i opatrzona **numerem wersji i zadania**, np.: „Zad. 3. Wersja I".
- W rozwiązaniu zadania należy przedstawić wszystkie obliczenia i objaśnić kluczowe kroki rozumowania (w szczególności opisać rozważane w rozwiązaniu zdarzenia, itp.), przywołać (z nazwy) używane fakty i wzory, etc. Za rozwiązanie zawierające sam wynik końcowy nie będą przyznawane żadne punkty.
- Nie wolno korzystać z notatek, książek czy kalkulatorów.
- W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy, sprawdzian może zostać przerwany a praca anulowana.
- Czas pisania kolokwium: 135 minut

---

1. Z talii 52 kart ciągniemy 3 karty (bez zwracania). Jakie jest prawdopodobieństwo, że wyciągnięte karty są trzech różnych kolorów, jeśli wiadomo, że wśród wyciągniętych kart są tylko karty numerowane (od 2 do 10)? (*4 pkt*)

2. W urnie znajduje się 5 kostek do gry, przy czym 3 kostki są prawidłowe, jedna kostka ma dokładnie dwie ściany z sześcioma oczkami (a na pozostałych ścianach od 1 do 4 oczek) i jedna kostka ma sześć oczek na wszystkich ścianach.

   a) Losujemy kostkę z urny, rzucamy nią i wypada szóstka. Jakie jest prawdopodobieństwo, że kostka którą wylosowaliśmy była prawidłowa? (*2 pkt*)

   b) Losujemy kostkę z urny, rzucamy nią i wypada szóstka. Jakie jest prawdopodobieństwo, że przy kolejnych dwóch rzutach tą samą kostką, raz wypadnie szóstka a raz jakaś inna liczba oczek? (*2 pkt*)

3. System bankowy błędnie księguje kwoty średnio 2 na 10^7 przelewów. Korzystając z przybliżenia Poissona, oszacować prawdopodobieństwo, że wśród 10^6 przelewów, które miały miejsce w pewnym miesiącu, błędnie zaksięgowane zostały co najmniej dwa przelewy (trafiły na konto pewnego polityka). (*3 pkt*) Oszacować błąd przybliżenia. (*1 pkt*)
   Wsk.: $e^2 \approx 7,39$; $e^{-1/2} \approx 0,61$; $e^{-1/5} \approx 0,82$; $e^{1/5} \approx 1,22$

4. Zmienna losowa X spełnia następujące warunki: $\mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{10}$, $\mathbb{P}(X = 3) = \frac{2}{10}$, $\mathbb{P}(X \in (3, t)) = \frac{t-3}{10}$ dla $t \in (3, 7]$ oraz $\mathbb{P}(X = 7) = \frac{3}{10}$.

   a) Wyznacz dystrybuantę X. (*2 pkt*)

   b) Czy X ma rozkład ciągły? Czy X ma rozkład dyskretny? Odpowiedzi uzasadnij! (*2 pkt*)

   c) Oblicz $\mathbb{E}X$ oraz $\mathrm{Var}X$. (*4 pkt*)

5. Zmienna losowa X ma rozkład ciągły z gęstością $g(x) = \frac{c}{x^2}\mathbf{1}_{(4,\infty)}(x)$ oraz $Y = \sqrt{X}$.

   a) Oblicz c. (*2 pkt*)

   b) Czy Y ma rozkład ciągły? Jeśli tak, to oblicz gęstość Y, w przeciwnym razie uzasadnij, że Y nie ma rozkładu ciągłego. (*3 pkt*)

   c) Rozstrzygnij, czy X jest całkowalna. Jeśli tak, to oblicz $\mathbb{E}X$. (*2 pkt*)

   d) Rozstrzygnij, czy Y jest całkowalna. Jeśli tak, to oblicz $\mathbb{E}Y$. (*2 pkt*)

6. Zmienna losowa X ma rozkład jednostajny na odcinku $[-1, 2]$ zaś $Y = X^2 + 2$. Oblicz $\mathbb{E}Y$ (*2 pkt*), $\mathrm{Var}Y$ (*3 pkt*), a także $\mathbb{P}(Y > 3)$ oraz $\mathbb{P}(Y \leqslant 7/4)$. (*1 pkt*)

7. Przeanalizowano dane pewnego urzędu pracy by stwierdzić, jaki czas upływa od zakończenia pracy do zarejestrowania w urzędzie. W wylosowanej próbce 10 bezrobotnych, czas ten prezentował się następująco (w dniach):

   $$1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 4, 5, 7.$$

   Wyznaczyć dystrybuantę empiryczną (*2 pkt*), średnią i wariancję z próby (*2 pkt*), oraz pierwszy kwartyl z próby (kwantyl rzędu 1/4) (*1 pkt*).

Kolokwium z Rachunku Prawdopodobieństwa, 1 grudnia 2012r.

Wersja II

Instrukcja:

- Uważnie przeczytaj treści zadań. W szczególności zwróć uwagę jakie polecenia są do wykonania w danym zadaniu.
- Rozwiązanie każdego zadania należy pisać na **osobnej kartce**. Każda kartka musi być podpisana **czytelnie i DRUKOWANYMI literami imieniem i nazwiskiem, numerem indeksu** i opatrzona **numerem wersji i zadania**, np.: „Zad. 3. Wersja II".
- W rozwiązaniu zadania należy przedstawić wszystkie obliczenia i objaśnić kluczowe kroki rozumowania (w szczególności opisać rozważane w rozwiązaniu zdarzenia, itp.), przywołać (z nazwy) używane fakty i wzory, etc. Za rozwiązanie zawierające sam wynik końcowy nie będą przyznawane żadne punkty.
- Nie wolno korzystać z notatek, książek czy kalkulatorów.
- W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy, sprawdzian może zostać przerwany a praca anulowana.
- Czas pisania kolokwium: 135 minut

---

1. Z talii 52 kart ciągniemy 4 karty (bez zwracania). Jakie jest prawdopodobieństwo, że każda z wyciągniętych kart jest innego starszeństwa (tzn. nie ma np. pary asów, pary dziewiątek, etc.), jeśli wiadomo, że nie wyciągnęliśmy pika? (*4 pkt*)

2. W urnie znajduje się 10 kostek do gry, przy czym 6 kostek jest prawidłowych, 3 kostki mają dokładnie po dwie ściany z sześcioma oczkami (a na pozostałych ścianach od 1 do 4 oczek), zaś jedna z kostek ma po sześć oczek na wszystkich ścianach.

   a) Losujemy kostkę z urny, rzucamy nią i wypada szóstka. Jakie jest prawdopodobieństwo, że kostka którą wylosowaliśmy była prawidłowa? (*2 pkt*)

   b) Losujemy kostkę z urny, rzucamy nią i wypada szóstka. Jakie jest prawdopodobieństwo, że przy kolejnych dwóch rzutach tą samą kostką, raz wypadnie szóstka a raz jakaś inna liczba oczek? (*2 pkt*)

3. System bankowy błędnie księguje kwoty średnio 5 na 10^7 przelewów. Korzystając z przybliżenia Poissona, oszacować prawdopodobieństwo, że wśród 10^6 przelewów, które miały miejsce w pewnym miesiącu, błędnie zaksięgowane zostały więcej niż dwa przelewy (trafiły na konto pewnego polityka). (*3 pkt*) Oszacować błąd przybliżenia. (*1 pkt*)
   Wsk.: $e^2 \approx 7,4$; $\quad e^{-1/2} \approx 0,6$; $\quad e^{-5} \approx 0,007$; $\quad e^{1/5} \approx 1,22$

4. Zmienna losowa X spełnia następujące warunki: $\mathbb{P}(X = 2) = \frac{2}{5}$, $\mathbb{P}(X \in (2,t)) = \frac{t-2}{5}$ dla $t \in (2,4]$, $\mathbb{P}(X = 4) = \frac{1}{10}$ oraz $\mathbb{P}(X = 6) = \frac{1}{10}$.

   a) Wyznacz dystrybuantę X. (*2 pkt*)

   b) Czy X ma rozkład ciągły? Czy X ma rozkład dyskretny? Odpowiedzi uzasadnij! (*2 pkt*)

   c) Oblicz $\mathbb{E}X$ oraz $\mathrm{Var}X$. (*4 pkt*)

5. Zmienna losowa X ma rozkład ciągły z gęstością $g(x) = \frac{c}{x^3}\mathbf{1}_{(2,\infty)}(x)$ oraz $Y = X^2$.

   a) Oblicz c. (*2 pkt*)

   b) Czy Y ma rozkład ciągły? Jeśli tak, to oblicz gęstość Y, w przeciwnym razie uzasadnij, że Y nie ma rozkładu ciągłego. (*3 pkt*)

   c) Rozstrzygnij, czy X jest całkowalna. Jeśli tak, to oblicz $\mathbb{E}X$. (*2 pkt*)

   d) Rozstrzygnij, czy Y jest całkowalna. Jeśli tak, to oblicz $\mathbb{E}Y$. (*2 pkt*)

6. Zmienna losowa X ma rozkład jednostajny na odcinku $[-2, 3]$ zaś $Y = X^2 + 1$. Oblicz $\mathbb{E}Y$ (*2 pkt*), $\mathrm{Var}Y$ (*3 pkt*), a także $\mathbb{P}(Y > 5)$ oraz $\mathbb{P}(Y < 1/2)$. (*1 pkt*)

7. Przeanalizowano dane pewnego urzędu pracy by stwierdzić, jaki czas upływa od zakończenia pracy do zarejestrowania w urzędzie. W wylosowanej próbce 10 bezrobotnych, czas ten prezentował się następująco (w dniach):
   $$2, 3, 3, 5, 5, 5, 6, 7, 7, 7.$$
   Wyznaczyć dystrybuantę empiryczną (*2 pkt*), średnią i wariancję z próby (*2 pkt*), oraz pierwszy kwartyl z próby (kwantyl rzędu 1/4) (*1 pkt*).

Kolokwium z Rachunku Prawdopodobieństwa, 1 grudnia 2012r.

Wersja III

Instrukcja:

- Uważnie przeczytaj treści zadań. W szczególności zwróć uwagę jakie polecenia są do wykonania w danym zadaniu.
- Rozwiązanie każdego zadania należy pisać na **osobnej kartce**. Każda kartka musi być podpisana **czytelnie i DRUKOWANYMI literami imieniem i nazwiskiem, numerem indeksu** i opatrzona **numerem wersji i zadania**, np.: „Zad. 3. Wersja III”.
- W rozwiązaniu zadania należy przedstawić wszystkie obliczenia i objaśnić kluczowe kroki rozumowania (w szczególności opisać rozważane w rozwiązaniu zdarzenia, itp.), przywołać (z nazwy) używane fakty i wzory, etc. Za rozwiązanie zawierające sam wynik końcowy nie będą przyznawane żadne punkty.
- Nie wolno korzystać z notatek, książek czy kalkulatorów.
- W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy, sprawdzian może zostać przerwany a praca anulowana.
- Czas pisania kolokwium: 135 minut

---

1. Z talii 52 kart ciągniemy 3 karty (bez zwracania). Jakie jest prawdopodobieństwo, że każda z wyciągniętych kart jest innego starszeństwa (tzn. nie ma np. pary asów, pary dziesiątek, etc.), jeśli wiadomo, że wszystkie wyciągnięte karty są starsze od dziewiątki? (Karty starsze od dziewiątki to 10, walet, dama, król i as.) (*4 pkt*)

2. W urnie znajduje się 15 kostek do gry, przy czym 12 kostek jest prawidłowych, 2 kostki mają dokładnie po trzy ściany z sześcioma oczkami (a na pozostałych ścianach od 1 do 3 oczek), zaś jedna z kostek ma po sześć oczek na wszystkich ścianach.

   a) Losujemy kostkę z urny, rzucamy nią i wypada szóstka. Jakie jest prawdopodobieństwo, że kostka którą wylosowaliśmy była prawidłowa? (*2 pkt*)

   b) Losujemy kostkę z urny, rzucamy nią i wypada szóstka. Jakie jest prawdopodobieństwo, że przy kolejnych dwóch rzutach tą samą kostką, raz wypadnie szóstka a raz jakaś inna liczba oczek? (*2 pkt*)

3. System bankowy błędnie księguje kwoty średnio 4 na 10^7 przelewów. Korzystając z przybliżenia Poissona, oszacować prawdopodobieństwo, że wśród 10^6 przelewów, które miały miejsce w pewnym miesiącu, błędnie zaksięgowane zostały co najmniej trzy przelewy (trafiły na konto pewnego polityka). (*3 pkt*) Oszacować błąd przybliżenia. (*1 pkt*)
   Wsk.: $e^4 \approx 54,6$; $e^{-1/4} \approx 0,78$; $e^{-2/5} \approx 0,67$; $e^{2/5} \approx 1,5$

4. Zmienna losowa X spełnia następujące warunki: $\mathbb{P}(X = 2) = \frac{1}{5}$, $\mathbb{P}(X = 4) = \frac{2}{5}$, $\mathbb{P}(X \in (4, t)) = \frac{t-4}{10}$ dla $t \in (4, 6]$ oraz $\mathbb{P}(X = 6) = \frac{1}{5}$.

   a) Wyznacz dystrybuantę X. (*2 pkt*)

   b) Czy X ma rozkład ciągły? Czy X ma rozkład dyskretny? Odpowiedzi uzasadnij! (*2 pkt*)

   c) Oblicz $\mathbb{E}X$ oraz $\mathrm{Var}X$. (*4 pkt*)

5. Zmienna losowa X ma rozkład ciągły z gęstością $g(x) = \frac{c}{x^3}\mathbf{1}_{(2,\infty)}(x)$ oraz $Y = \frac{1}{4}X^2$.

   a) Oblicz c. (*2 pkt*)

   b) Czy Y ma rozkład ciągły? Jeśli tak, to oblicz gęstość Y, w przeciwnym razie uzasadnij, że Y nie ma rozkładu ciągłego. (*3 pkt*)

   c) Rozstrzygnij, czy X jest całkowalna. Jeśli tak, to oblicz $\mathbb{E}X$. (*2 pkt*)

   d) Rozstrzygnij, czy Y jest całkowalna. Jeśli tak, to oblicz $\mathbb{E}Y$. (*2 pkt*)

6. Zmienna losowa X ma rozkład jednostajny na odcinku $[-2, 1]$ zaś $Y = X^2 - 2$. Oblicz $\mathbb{E}Y$ (*2 pkt*), $\mathrm{Var}Y$ (*3 pkt*), a także $\mathbb{P}(Y < -1)$ oraz $\mathbb{P}(Y \geqslant 3)$. (*1 pkt*)

7. Przeanalizowano dane pewnego urzędu pracy by stwierdzić, jaki czas upływa od zakończenia pracy do zarejestrowania w urzędzie. W wylosowanej próbce 10 bezrobotnych, czas ten prezentował się następująco (w dniach):
   $$1, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 6, 8.$$
   Wyznaczyć dystrybuantę empiryczną (*2 pkt*), średnią i wariancję z próby (*2 pkt*), oraz trzeci kwartyl z próby (kwantyl rzędu 3/4) (*1 pkt*).

Kolokwium z Rachunku Prawdopodobieństwa, 1 grudnia 2012r.

Wersja IV

Instrukcja:

- Uważnie przeczytaj treści zadań. W szczególności zwróć uwagę jakie polecenia są do wykonania w danym zadaniu.
- Rozwiązanie każdego zadania należy pisać na **osobnej kartce**. Każda kartka musi być podpisana **czytelnie i DRUKOWANYMI literami imieniem i nazwiskiem, numerem indeksu** i opatrzona **numerem wersji i zadania**, np.: „Zad. 3. Wersja IV".
- W rozwiązaniu zadania należy przedstawić wszystkie obliczenia i objaśnić kluczowe kroki rozumowania (w szczególności opisać rozważane w rozwiązaniu zdarzenia, itp.), przywołać (z nazwy) używane fakty i wzory, etc. Za rozwiązanie zawierające sam wynik końcowy nie będą przyznawane żadne punkty.
- Nie wolno korzystać z notatek, książek czy kalkulatorów.
- W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy, sprawdzian może zostać przerwany a praca anulowana.
- Czas pisania kolokwium: 135 minut

---

1. Z talii 52 kart ciągniemy 3 karty (bez zwracania). Jakie jest prawdopodobieństwo, że co najmniej dwie wyciągnięte karty są tego samego koloru, jeśli wiadomo, że nie wyciągnęliśmy pika? (*4 pkt*)

2. W urnie znajduje się 5 kostek do gry, przy czym 2 kostki są prawidłowe, 2 kostki mają dokładnie po trzy ściany z sześcioma oczkami (a na pozostałych ścianach od 1 do 3 oczek), zaś jedna z kostek ma po sześć oczek na wszystkich ścianach.

   a) Losujemy kostkę z urny, rzucamy nią i wypada szóstka. Jakie jest prawdopodobieństwo, że kostka którą wylosowaliśmy była prawidłowa? (*2 pkt*)

   b) Losujemy kostkę z urny, rzucamy nią i wypada szóstka. Jakie jest prawdopodobieństwo, że przy kolejnych dwóch rzutach tą samą kostką, raz wypadnie szóstka a raz jakaś inna liczba oczek? (*2 pkt*)

3. System bankowy błędnie księguje kwoty średnio 6 na 10^7 przelewów. Korzystając z przybliżenia Poissona, oszacować prawdopodobieństwo, że wśród 10^6 przelewów, które miały miejsce w pewnym miesiącu, błędnie zaksięgowane zostały więcej niż trzy przelewy (trafiły na konto pewnego polityka). (*3 pkt*) Oszacować błąd przybliżenia. (*1 pkt*)
   Wsk.: $e^6 \approx 403,4;\qquad e^{3/5} \approx 1,82;\qquad e^{-3/5} \approx 0,55;\qquad e^{-6} \approx 0,0025$

4. Zmienna losowa X spełnia następujące warunki: $\mathbb{P}(X=0) = \frac{2}{10}$, $\mathbb{P}(X=1) = \frac{1}{10}$, $\mathbb{P}(X \in (1,t)) = \frac{t-1}{10}$ dla $t \in (1,5]$ oraz $\mathbb{P}(X=5) = \frac{3}{10}$.

   a) Wyznacz dystrybuantę X. (*2 pkt*)

   b) Czy X ma rozkład ciągły? Czy X ma rozkład dyskretny? Odpowiedzi uzasadnij! (*2 pkt*)

   c) Oblicz $\mathbb{E}X$ oraz $\mathrm{Var}X$. (*4 pkt*)

5. Zmienna losowa X ma rozkład ciągły z gęstością $g(x) = \frac{c}{x^2}\mathbf{1}_{(1,\infty)}(x)$ oraz $Y = 2\sqrt{X}$.

   a) Oblicz c. (*2 pkt*)

   b) Czy Y ma rozkład ciągły? Jeśli tak, to oblicz gęstość Y, w przeciwnym razie uzasadnij, że Y nie ma rozkładu ciągłego. (*3 pkt*)

   c) Rozstrzygnij, czy X jest całkowalna. Jeśli tak, to oblicz $\mathbb{E}X$. (*2 pkt*)

   d) Rozstrzygnij, czy Y jest całkowalna. Jeśli tak, to oblicz $\mathbb{E}Y$. (*2 pkt*)

6. Zmienna losowa X ma rozkład jednostajny na odcinku $[-1,3]$ zaś $Y = X^2 - 1$. Oblicz $\mathbb{E}Y$ (*2 pkt*), $\mathrm{Var}Y$ (*3 pkt*), a także $\mathbb{P}(Y \leqslant 0)$ oraz $\mathbb{P}(Y \geqslant 10)$. (*1 pkt*)

7. Przeanalizowano dane pewnego urzędu pracy by stwierdzić, jaki czas upływa od zakończenia pracy do zarejestrowania w urzędzie. W wylosowanej próbce 10 bezrobotnych, czas ten prezentował się następująco (w dniach):
   $$1, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 6, 6, 7.$$
   Wyznaczyć dystrybuantę empiryczną (*2 pkt*), średnią i wariancję z próby (*2 pkt*), oraz trzeci kwartyl z próby (kwantyl rzędu 3/4) (*1 pkt*).