Egzamin poprawkowy z Rachunku Prawdopodobieństwa, 8 marca 2013 r. — rozwiązania

**Wersja I**

1. Wśród 10 monet osiem jest regularnych, zaś dwie monety są fałszywe i mają orła po obu stronach. Losowo wybieramy jedną z monet, rzucamy nią dwa razy i stwierdzamy, że w obu przypadkach wypadł orzeł.

   (a) Jakie jest prawdopodobieństwo, że ta moneta jest fałszywa? (3 *pkt*)
   *Rozw. Niech $F$ będzie zdarzeniem, że wylosowana moneta jest fałszywa, natomist $O_{12}$, że na wylosowanej monecie w obydwu rzutach wypadł orzeł. Ze wzoru Bayesa mamy*

$$\mathbb{P}(F|O_{12}) = \frac{\mathbb{P}(O_{12}|F)\mathbb{P}(F)}{\mathbb{P}(O_{12})} = \frac{\mathbb{P}(O_{12}|F)\mathbb{P}(F)}{\mathbb{P}(O_{12}|F)\mathbb{P}(F) + \mathbb{P}(O_{12}|F')\mathbb{P}(F')} = \frac{1\cdot\frac{2}{10}}{1\cdot\frac{2}{10}+\frac{1}{4}\cdot\frac{8}{10}} = \frac{1}{2}.$$

   (b) Tą samą monetą rzucamy raz jeszcze. Jakie jest prawdopodobieństwo, że i tym razem wypadnie orzeł? (3 *pkt*)
   *Rozw. Niech $F$, $O_{12}$ jak wyżej, natomiast $O_3$ będzie zdarzeniem, że na wylosowanej monecie w trzecim rzucie wypadł orzeł. Szukane prawdopodobienstwo to*

$$\mathbb{P}(O_3|O_{12}) = \frac{\mathbb{P}(O_3\cap O_{12})}{\mathbb{P}(O_{12})}.$$

   *Zauważmy, że zgodnie z obliczeniami z punktu (a), $\mathbb{P}(O_{12}) = 2/5$, natomiast $\mathbb{P}(O_3\cap O_{12})$ policzymy ze wzoru na prawdopodobieństwo całkowite:*

$$\mathbb{P}(O_3\cap O_{12}) = \mathbb{P}(O_3\cap O_{12}|F)\mathbb{P}(F) + \mathbb{P}(O_3\cap O_{12}|F')\mathbb{P}(F') = 1\cdot\frac{2}{10}+\frac{1}{8}\cdot\frac{8}{10} = \frac{3}{10}.$$

   *Stąd szukane prawdopodobieństwo wynosi $\frac{3/10}{2/5} = \frac{3}{4}$.*

2. Dystrybuanta zmiennej losowej $X$ wyraża się wzorem $F(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0 \\ \frac{1}{27}t^3 & \text{dla } t \in [0,3) \\ 1 & \text{dla } t \geqslant 3 \end{cases}$

   (a) Uzasadnić, że $X$ ma rozkład ciągły (1 *pkt*). *Rozw. $F$ jest ciągła i kawałkami $C^1$ (różniczkowalna w sposób ciągły).*

   (b) Znaleźć gęstość zmiennej $X$ oraz zmiennej $Y = X^3$ (3 *pkt*). *Rozw. Gęstość zmiennej $X$ uzyskujemy przez zróżniczkowanie dystrybuanty: $g_X(x) = F'(x) = \frac{1}{9}x^2 1_{(0,3)}(x)$. Gęstość zmiennej $Y = X^3$ to $g_Y(y) = g_X(\sqrt[3]{y})\frac{d\sqrt[3]{y}}{dy} = \frac{1}{9}y^{2/3}1_{(0,3)}(\sqrt[3]{y})\frac{1}{3}y^{-2/3} = \frac{1}{27}1_{(0,27)}(y)$.*

   (c) Obliczyć $\mathbb{E}X$, Var$X$. (3 *pkt*). *Rozw.* $\mathbb{E}X = \int_0^3 x\frac{1}{9}x^2\,dx = \frac{1}{36}x^4\Big|_0^3 = \frac{81}{36} = \frac{9}{4}$. $\mathbb{E}X^2 = \int_0^3 x^2\frac{1}{9}x^2\,dx = \frac{1}{45}x^5\Big|_0^3 = \frac{243}{45} = \frac{27}{5}$. *Var*$X = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 = \frac{27}{80}$.

   (d) Czy zmienna $Z = \min(X,1)$ ma rozkład ciągły? Odpowiedź uzasadnić! (1 *pkt*) *Rozw. Nie, gdyż* $\mathbb{P}(Z = 1) > 0$.

   (e) Obliczyć $\mathbb{E}Z$, gdzie $Z = \min(X,1)$ (2 *pkt*). *Rozw.*

$$\mathbb{E}Z = \int_0^\infty \mathbb{P}(Z > t)\,dt = \int_0^1 \mathbb{P}(X > t)\,dt = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{27}t^3\right)dt = \frac{107}{108}.$$

3. Rozkład łączny zmiennych losowych $X, Y$ ma gęstość $g(x,y) = \frac{1}{21}(xy + y^3)1_{\{0\leqslant x\leqslant 3\}}1_{\{0\leqslant y\leqslant 2\}}$.

   (a) Obliczyć $\mathbb{P}(X \leqslant 2, Y \leqslant 1)$ (2 *pkt*). *Rozw.*

$$\mathbb{P}(X\leqslant 2, Y\leqslant 1) = \frac{1}{21}\int_0^2\int_0^1 (xy+y^3)\,dy\,dx = \frac{1}{21}\int_0^2\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right)dx = \frac{1}{14}.$$

(b) Znaleźć gęstość zmiennej $X$ oraz gęstość zmiennej $Y$ (3 *pkt*). *Rozw.*

$$g_X(x) = \frac{1}{21}\int_0^2 (xy + y^3)\, dy 1_{(0,3)}(x) = \frac{1}{21}(2x+4)1_{(0,3)}(x),$$

$$g_Y(y) = \frac{1}{21}\int_0^3 (xy + y^3)\, dx 1_{(0,2)}(y) = \frac{1}{14}(3y+2y^3)1_{(0,2)}(y).$$

(c) Obliczyć $\mathbb{E}X, \mathbb{E}Y$ (3 *pkt*). *Rozw.*

$$\mathbb{E}X = \int_{-\infty}^{\infty} x g_X(x)\, dx = \frac{1}{21}\int_0^3 (2x^2+4x)\, dx = \frac{36}{21} = \frac{12}{7},$$

$$\mathbb{E}Y = \int_{-\infty}^{\infty} y g_Y(y)\, dy = \frac{1}{14}\int_0^2 (3y^2+2y^4)\, dy = \frac{1}{14}\cdot\frac{72}{5} = \frac{36}{35}.$$

(d) Obliczyć kowariancję zmiennych $X$ i $Y$ (2 *pkt*). *Rozw.*

$$\mathbb{E}XY = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyg(x,y)\, dy\, dx = \frac{1}{21}\int_0^3\int_0^2 (x^2y^2 + xy^4)\, dy\, dx = \frac{264}{5},$$

*zatem*

$$Cov(X,Y) = \mathbb{E}XY - (\mathbb{E}X)(\mathbb{E}Y) = \frac{264}{5} - \frac{12}{7}\cdot\frac{36}{35}.$$

4. Wektor losowy $(X,Y)$ ma gęstość $g(x,y) = 3e^{-x-2y}1_{\{0<y<x\}}$. Znaleźć gęstość zmiennej $X$ i gęstość zmiennej $Y$ (3 *pkt*). Zbadać, czy zmienne $X$ i $Y$ są niezależne. Odpowiedź uzasadnić! (2 *pkt*) Oblicz $\mathbb{E}(X\,|\,Y)$ oraz $\mathbb{E}(Xe^{-Y} + Y^2\,|\,Y)$. (4 *pkt*)
*Rozw.*

$$g_X(x) = \int_0^x 3e^{-x-2y}\, dy 1_{(0,\infty)}(x) = 3e^{-x}\left(-\frac{1}{2}e^{-2y}\right)\Big|_{y=0}^{x} 1_{(0,\infty)}(x) = \frac{3}{2}e^{-x}(1-e^{-2x})1_{(0,\infty)}(x),$$

$$g_Y(y) = \int_y^\infty 3e^{-x-2y}\, dy 1_{(0,\infty)}(y) = 3e^{-2y}\left(-e^{-x}\right)\Big|_{x=y}^{\infty} 1_{(0,\infty)}(y) = 3e^{-3y}1_{(0,\infty)}(x).$$

*Zmienne $X$ i $Y$ nie są niezależne, albowiem* $g_X(x)g_Y(y) = \frac{9}{2}e^{-x}(1-e^{-2x})e^{-3y}1_{(0,\infty)}(x)1_{(0,\infty)}(y) \neq g(x,y)$.
*Dla* $y > 0$, $g_{X|Y}(x|y) = \frac{g(x,y)}{g_Y(y)} = e^{-x+y}1_{\{x>y\}}$, *zatem*

$$\mathbb{E}(X|Y=y) = \int_{-\infty}^{\infty} x g_{X|Y}(x|y)\, dx = \int_y^\infty xe^{-x+y}\, dx = \int_0^\infty (x+y)e^{-x}\, dx$$
$$= \int_0^\infty xe^{-x}\, dx + y\int_0^\infty e^{-x}\, dx = 1 + y,$$

*a ponieważ* $\mathbb{P}(Y > 0) = 1$, *to* $\mathbb{E}(X|Y) = Y + 1$. *Stąd,* $\mathbb{E}(Xe^{-Y} + Y^2|Y) = e^{-Y}\mathbb{E}(X|Y) + Y^2 = e^{-Y}(Y+1) + Y^2$.

5. Wektor losowy $(X,Y)$ ma rozkład normalny o średniej $(0,0)$ i macierzy kowariancji $\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

(a) Obliczyć współczynnik korelacji liniowej zmiennych $X$ i $Y$ (2 *pkt*). *Rozw.* $\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{VarX\, VarY}} = \frac{-1}{\sqrt{4\cdot 1}} = -\frac{1}{2}$.

(b) Wyznaczyć rozkład zmiennej $X + 3Y$ (2 *pkt*). *Rozw. Zmienna $X + 3Y$ ma rozkład normalny o średniej 0 i wariancji* $Var(X+3Y) = VarX + 9\,VarY + 6Cov(X,Y) = 4 + 9 - 6 = 7$.

(c) Dla jakich wartości parametru $a \in \mathbb{R}$, zmienne losowe $X + aY$ i $Y$ są niezależne? (4 *pkt*) *Rozw. Ponieważ łączny rozkład zmiennych $X + aY$ i $Y$ jest dwuwymiarowy normalny, zmienne $X + aY$ i $Y$ są niezależne wtw., gdy $Cov(X+aY, Y) = 0$. Kowariancja tych zmiennych wynosi*

$$Cov(X+aY,Y) = Cov(X,Y) + a\,VarY = -1 + a\cdot 1,$$

*co równa się 0 wtw., gdy $a = 1$.*

6. Pewien kantor specjalizuje się w sprzedaży franków szwajcarskich. Załóżmy, że kwoty kupowane przez klientów są zmiennymi losowymi o średniej 350 i wariancji $\frac{300^2}{12}$. Przybliżyć prawdopodobieństwo, że 108 losowych klientów, którzy odwiedzą kantor pewnego dnia, będzie chciało zakupić więcej niż 38250 franków (5 *pkt*). Ile franków powinien mieć rano w kasie właściciel, by szansa na to, że wszyscy klienci z tego dnia będą mogli zrealizować swoją chęć zakupu wynosiła co najmniej 0,9? (4 *pkt*)

*Rozw. Niech $X_i$ oznacza kwotę franków, jaką będzie chciał kupić i-ty klient, dla $i = 1, 2, \ldots, 108$. Mamy: $\mathbb{E}X_i = 350$, $VarX_i = \frac{300^2}{12}$; zakładamy, iż zakupy kolejnych klientów są niezależne. Zmienne $X_i$ spełniają więc założenia CTG. Interesuje nas prawdopodobieństwo $\mathbb{P}(X_1 + X_2 + \ldots + X_{108} > 38250)$. Przekształćmy to wyrażenie do postaci, w której będziemy mogli skorzystać z CTG:*

$$\mathbb{P}(X_1 + X_2 + \ldots + X_{108} > 38250) = \mathbb{P}\left(\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_{108} - 108 \cdot 350}{\sqrt{108} \cdot \sqrt{\frac{300^2}{12}}} > \frac{38250 - 108 \cdot 350}{\sqrt{108} \cdot \sqrt{\frac{300^2}{12}}}\right).$$

*Na mocy CTG mamy:*

$$\approx 1 - \Phi\left(\frac{450}{900}\right) = 1 - \Phi(0,5) \approx 1 - 0,69 = 0,31.$$

*W drugim podpunkcie, interesuje nas, dla jakiej wartości $F$ franków znajdujących się rano w kasie zachodzić będzie $\mathbb{P}(X_1 + X_2 + \ldots + X_{108} < F) \geqslant 0,9$. Znów przekształcamy wyrażenie do postaci, w której można skorzystać z CTG:*

$$\mathbb{P}(X_1 + X_2 + \ldots + X_{108} \leqslant F) = \mathbb{P}\left(\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_{108} - 108 \cdot 350}{\sqrt{108} \cdot \sqrt{\frac{300^2}{12}}} \leqslant \frac{F - 108 \cdot 350}{\sqrt{108} \cdot \sqrt{\frac{300^2}{12}}}\right).$$

*Na mocy CTG mamy:*

$$\approx \Phi\left(\frac{F - 37800}{900}\right),$$

*co ma być nie mniejsze niż $0,9$. Wiadomo, że $\Phi^{-1}(0,9) \approx 1,28$, a zatem mamy: $\frac{F-37800}{900} \geqslant 1,28$, czyli $F \geqslant 1,28 \cdot 900 + 37800 = 1152 + 37800 = 38952$, a więc w kasie powinny znajdować się rano co najmniej 38952 franki.*

7. Pewien inwestor giełdowy kieruje się przy grze na giełdzie następującą strategią: jeśli danego dnia nie podejmował żadnych działań, to następnego dnia z prawdopodobieństwem $\frac{1}{3}$ sprzeda pakiet akcji, z prawdopodobieństwem $\frac{1}{6}$ kupi pakiet akcji, a z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$ znów nie podejmie żadnych działań. Jeśli danego dnia sprzedał pakiet akcji, to następnego dnia sprzeda kolejny pakiet, kupi nowy pakiet lub nie będzie podejmował żadnych działań z prawdopodobieństwami równymi $\frac{1}{3}$. Jeśli zaś danego dnia kupił pakiet akcji, to następnego dnia będzie tylko obserwował kursy i na pewno nie będzie podejmował żadnych akcji. Wypisać macierz przejścia dla łańcucha Markowa opisującego strategię tego gracza (2 *pkt*). Wyznaczyć rozkład stacjonarny tego łańcucha (4 *pkt*). Jakie jest, w przybliżeniu, prawdopodobieństwo, że jeśli gracz ten stosował taką strategię od bardzo dawna, to 8 marca 2013 nie podejmie żadnych działań? (2 *pkt*)

*Rozw. Strategię tego gracza można opisać przy pomocy łańcucha Markowa o trzech stanach (Nic, Sprzedaż, Kupno), o macierzy przejścia:*

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

*Rozkład stacjonarny tego łańcucha Markowa to trójka $(x, y, z)$ spełniająca równanie $(x, y, z) \cdot P = (x, y, z)$ oraz warunek $x + y + z = 1$, a więc rozwiązanie układu równań:*

$$\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} + z = x \\ \frac{x}{3} + \frac{y}{3} = y \\ \frac{x}{6} + \frac{y}{3} = z \\ x + y + z = 1 \end{cases},$$

*czyli* $(\frac{6}{11}, \frac{3}{11}, \frac{2}{11})$. *Łańcuch Markowa jest nieokresowy i nieprzywiedlny, więc na mocy twierdzenia ergodycznego możemy spodziewać się, iż w ustalonym dniu (po wielu krokach) łańcuch ten będzie się znajdował w stanie "Nic" z prawdopodobieństwem zbliżonym do* $\frac{6}{11}$.