

Instrukcja:

Wersja I

- Uważnie przeczytaj treści zadań. W szczególności zwróć uwagę jakie polecenia są do wykonania w danym zadaniu.
- Rozwiązanie każdego zadania należy pisać na **osobnej kartce**. Każda kartka musi być podpisana **czytelnie** i DRUKOWANYMI literami imieniem i nazwiskiem, numerem indeksu i opatrzona numerem wersji i zadania, np.: „Zad. 3. Wersja I”.
- W rozwiązaniu zadania należy przedstawić wszystkie obliczenia i objaśnić kluczowe kroki rozumowania (w szczególności opisać rozważane w rozwiązaniu zdarzenia, itp.), przywołać (z nazwy) używane fakty i wzory, etc. Za rozwiązanie zawierające sam wynik końcowy nie będą przyznawane żadne punkty.
- Nie wolno korzystać z notatek, książek, tablic czy kalkulatorów.
- W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy, sprawdzian może zostać przerwany a praca anulowana.
- Czas pisania egzaminu: 150 minut

- Wśród 10 monet osiem jest regularnych, zaś dwie monety są fałszywe i mają orła po obu stronach. Losowo wybieramy jedną z monet, rzucamy nią dwa razy i stwierdzamy, że w obu przypadkach wypadł orzeł.
 - Jakie jest prawdopodobieństwo, że ta moneta jest fałszywa? (3 pkt)
 - Tą samą monetą rzucamy raz jeszcze. Jakie jest prawdopodobieństwo, że i tym razem wypadnie orzeł? (3 pkt)
- Dystrybuanta zmiennej losowej X wyraża się wzorem $F(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0 \\ \frac{1}{27}t^3 & \text{dla } t \in [0, 3) \\ 1 & \text{dla } t \geq 3 \end{cases}$
 - Uzasadnić, że X ma rozkład ciągły (1 pkt).
 - Znaleźć gęstość zmiennej X oraz zmiennej $Y = X^3$ (3 pkt).
 - Obliczyć $\mathbb{E}X$, $\text{Var}X$. (3 pkt).
 - Czy zmienna $Z = \min(X, 1)$ ma rozkład ciągły? Odpowiedź uzasadnić! (1 pkt)
 - Obliczyć $\mathbb{E}Z$, gdzie $Z = \min(X, 1)$ (2 pkt).
- Rozkład łączny zmiennych losowych X, Y ma gęstość $g(x, y) = \frac{1}{21}(xy + y^3)1_{\{0 \leq x \leq 3\}}1_{\{0 \leq y \leq 2\}}$.
 - Obliczyć $\mathbb{P}(X \leq 2, Y \leq 1)$ (2 pkt).
 - Znaleźć gęstość zmiennej X oraz gęstość zmiennej Y (3 pkt).
 - Obliczyć $\mathbb{E}X, \mathbb{E}Y$ (3 pkt).
 - Obliczyć kowariancję zmiennych X i Y (2 pkt).
- Wektor losowy (X, Y) ma gęstość $g(x, y) = 3e^{-x-2y}1_{\{0 < y < x\}}$. Znaleźć gęstość zmiennej X i gęstość zmiennej Y (3 pkt). Z badać, czy zmienne X i Y są niezależne. Odpowiedź uzasadnić! (2 pkt) Oblicz $\mathbb{E}(X | Y)$ oraz $\mathbb{E}(Xe^{-Y} + Y^2 | Y)$. (4 pkt)
- Wektor losowy (X, Y) ma rozkład normalny o średniej $(0, 0)$ i macierzy kowariancji $\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.
 - Obliczyć współczynnik korelacji liniowej zmiennych X i Y (2 pkt).
 - Wyznaczyć rozkład zmiennej $X + 3Y$ (2 pkt).
 - Dla jakich wartości parametru $a \in \mathbb{R}$, zmienne losowe $X + aY$ i Y są niezależne? (4 pkt)
- Pewien kantor specjalizuje się w sprzedaży franków szwajcarskich. Załóżmy, że kwoty kupowane przez klientów są zmiennymi losowymi o średniej 350 i wariancji $\frac{300^2}{12}$. Przybliżyc prawdopodobieństwo, że 108 losowych klientów, którzy odwiedzą kantor pewnego dnia, będzie chciało zakupić więcej niż 38250 franków (5 pkt). Ile franków powinien mieć rano w kasie właściciel, by szansa na to, że wszyscy klienci z tego dnia będą mogli zrealizować swoją chęć zakupu wynosiła co najmniej 0,9? (4 pkt)
- Pewien inwestor giełdowy kieruje się przy grze na giełdzie następującą strategią: jeśli danego dnia nie podejmował żadnych działań, to następnego dnia z prawdopodobieństwem $\frac{1}{3}$ sprzeda pakiet akcji, z prawdopodobieństwem $\frac{1}{6}$ kupi pakiet akcji, a z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$ znów nie podejmie żadnych działań. Jeśli danego dnia sprzedał pakiet akcji, to następnego dnia sprzeda kolejny pakiet, kupi nowy pakiet lub nie będzie podejmował żadnych działań z prawdopodobieństwami równymi $\frac{1}{3}$. Jeśli zaś danego dnia kupił pakiet akcji, to następnego dnia będzie tylko obserwował kursy i na pewno nie będzie podejmował żadnych akcji. Wypisać macierz przejścia dla łańcucha Markowa opisującego strategię tego gracza (2 pkt). Wyznaczyć rozkład stacjonarny tego łańcucha (4 pkt). Jakie jest, w przybliżeniu, prawdopodobieństwo, że jeśli gracz ten stosował taką strategię od bardzo dawna, to 8 marca 2013 nie podejmie żadnych działań? (2 pkt)

Instrukcja:

Wersja II

- Uważnie przeczytaj treści zadań. W szczególności zwróć uwagę jakie polecenia są do wykonania w danym zadaniu.
- Rozwiązanie każdego zadania należy pisać na **osobnej kartce**. Każda kartka musi być podpisana **czytelnie** i DRUKOWANYMI literami imieniem i nazwiskiem, numerem indeksu i opatrzona numerem wersji i zadania, np.: „Zad. 3. Wersja I”.
- W rozwiązaniu zadania należy przedstawić wszystkie obliczenia i objaśnić kluczowe kroki rozumowania (w szczególności opisać rozważane w rozwiązaniu zdarzenia, itp.), przywołać (z nazwy) używane fakty i wzory, etc. Za rozwiązanie zawierające sam wynik końcowy nie będą przyznawane żadne punkty.
- Nie wolno korzystać z notatek, książek, tablic czy kalkulatorów.
- W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy, sprawdzian może zostać przerwany a praca anulowana.
- Czas pisania egzaminu: 150 minut

- Wśród 10 monet osiem jest regularnych, zaś dwie monety są fałszywe i mają orła po obu stronach. Losowo wybieramy jedną z monet, rzucając ją trzy razy i stwierdzamy, że trzy razy wypadł orzeł.
 - Jakie jest prawdopodobieństwo, że ta moneta jest fałszywa? (3 pkt)
 - Tą samą monetą rzucając raz jeszcze. Jakie jest prawdopodobieństwo, że i tym razem wypadnie orzeł? (3 pkt)
- Dystrybuanta zmiennej losowej X wyraża się wzorem $F(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0 \\ \frac{1}{9}t^2 & \text{dla } t \in [0, 3) \\ 1 & \text{dla } t \geq 3 \end{cases}$
 - Uzasadnić, że X ma rozkład ciągły (1 pkt).
 - Znaleźć gęstość zmiennej X oraz zmiennej $Y = X^2$ (3 pkt).
 - Obliczyć $\mathbb{E}X$, $\text{Var}X$. (3 pkt).
 - Czy zmienna $Z = \min(X, 1)$ ma rozkład ciągły? Odpowiedź uzasadnić! (1 pkt)
 - Obliczyć $\mathbb{E}Z$, gdzie $Z = \min(X, 1)$ (2 pkt).
- Rozkład łączny zmiennych losowych X, Y ma gęstość $g(x, y) = \frac{1}{32}(xy + y^3)1_{\{0 \leq x \leq 4\}}1_{\{0 \leq y \leq 2\}}$.
 - Obliczyć $\mathbb{P}(X \leq 2, Y \leq 1)$ (2 pkt).
 - Znaleźć gęstość zmiennej X oraz gęstość zmiennej Y (3 pkt).
 - Obliczyć $\mathbb{E}X, \mathbb{E}Y$ (3 pkt).
 - Obliczyć kowariancję zmiennych X i Y (2 pkt).
- Wektor losowy (X, Y) ma gęstość $g(x, y) = 4e^{-x-3y}1_{\{0 < y < x\}}$. Znaleźć gęstość zmiennej X i gęstość zmiennej Y (3 pkt). Z badać, czy zmienne X i Y są niezależne. Odpowiedź uzasadnić! (2 pkt) Oblicz $\mathbb{E}(X | Y)$ oraz $\mathbb{E}(X \sin(Y) + Y^{-1} | Y)$. (4 pkt)
- Wektor losowy (X, Y) ma rozkład normalny o średniej $(0, 0)$ i macierzy kowariancji $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.
 - Obliczyć współczynnik korelacji liniowej zmiennych X i Y (2 pkt).
 - Wyznaczyć rozkład zmiennej $X - 2Y$ (2 pkt).
 - Dla jakich wartości parametru $a \in \mathbb{R}$, zmienne losowe $X + aY$ i Y są niezależne? (4 pkt)
- W pewnym kantorze można jedynie kupować dolary amerykańskie. Przypuśćmy, że kwoty kupowane przez klientów są zmiennymi losowymi o średniej 450 i wariancji $\frac{25000}{3}$. Przybliżyć prawdopodobieństwo, że 120 losowych klientów, którzy odwiedzą kantor pewnego dnia, będzie chciało zakupić mniej niż 53400 dolarów (5 pkt). Ile dolarów powinien mieć rano w kasie właściciel, by szansa na to, że wszyscy klienci z tego dnia będą mogli zrealizować swoją chęć zakupu wynosiła co najmniej 0,95? (4 pkt)
- Doradca w banku kieruje się przy sprzedaży produktów następującą strategią: jeśli jednego klienta namawiał na kartę kredytową, to następnego klienta z prawdopodobieństwem $\frac{1}{4}$ będzie namawiał na kredyt, z prawdopodobieństwem $\frac{1}{4}$ na lokatę strukturyzowaną, a z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$ znów na kartę kredytową. Jeśli danego klienta namawiał na kredyt, to następnego klienta będzie również namawiał na kredyt, na kartę kredytową lub na lokatę strukturyzowaną z prawdopodobieństwami równymi $\frac{1}{3}$. Jeśli zaś właśnie namawiał klienta na lokatę strukturyzowaną, to następnego będzie namawiał na kartę kredytową. Wypisać macierz przejścia dla łańcucha Markowa opisującego strategię tego doradcy (2 pkt). Wyznaczyć rozkład stacjonarny tego łańcucha (4 pkt). Jaki jest, w przybliżeniu, odsetek klientów, których doradca namawia na kartę kredytową, jeśli od dawna stosuje tę strategię? (2 pkt)

Wersja III

Instrukcja:

- Uważnie przeczytaj treści zadań. W szczególności zwróć uwagę jakie polecenia są do wykonania w danym zadaniu.
- Rozwiązanie każdego zadania należy pisać na **osobnej kartce**. Każda kartka musi być podpisana **czytelnie** i DRUKOWANYMI literami imieniem i nazwiskiem, numerem indeksu i opatrzona numerem wersji i zadania, np.: „Zad. 3. Wersja I”.
- W rozwiązaniu zadania należy przedstawić wszystkie obliczenia i objaśnić kluczowe kroki rozumowania (w szczególności opisać rozważane w rozwiązaniu zdarzenia, itp.), przywołać (z nazwy) używane fakty i wzory, etc. Za rozwiązanie zawierające sam wynik końcowy nie będą przyznawane żadne punkty.
- Nie wolno korzystać z notatek, książek, tablic czy kalkulatorów.
- W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy, sprawdzian może zostać przerwany a praca anulowana.
- Czas pisania egzaminu: 150 minut

- Wśród 9 monet osiem jest regularnych, zaś jedna moneta jest fałszywa i ma orła po obu stronach. Losowo wybieramy jedną z monet, rzucając ją dwa razy i stwierdzamy, że w obu przypadkach wypadł orzeł.
 - Jakie jest prawdopodobieństwo, że ta moneta jest fałszywa? (3 pkt)
 - Tą samą monetą rzucając raz jeszcze. Jakie jest prawdopodobieństwo, że i tym razem wypadnie orzeł? (3 pkt)
- Dystrybuanta zmiennej losowej X wyraża się wzorem $F(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0 \\ \frac{1}{8}t^3 & \text{dla } t \in [0, 2) \\ 1 & \text{dla } t \geq 2 \end{cases}$
 - Uzasadnić, że X ma rozkład ciągły (1 pkt).
 - Znaleźć gęstość zmiennej X oraz zmiennej $Y = X^3$ (3 pkt).
 - Obliczyć $\mathbb{E}X$, $\text{Var}X$. (3 pkt).
 - Czy zmienna $Z = \min(X, 1)$ ma rozkład ciągły? Odpowiedź uzasadnić! (1 pkt)
 - Obliczyć $\mathbb{E}Z$, gdzie $Z = \min(X, 1)$ (2 pkt).
- Rozkład łączny zmiennych losowych X, Y ma gęstość $g(x, y) = \frac{1}{21}(x^3 + xy)1_{\{0 \leq x \leq 2\}}1_{\{0 \leq y \leq 3\}}$.
 - Obliczyć $\mathbb{P}(X \leq 1, Y \leq 2)$ (2 pkt).
 - Znaleźć gęstość zmiennej X oraz gęstość zmiennej Y (3 pkt).
 - Obliczyć $\mathbb{E}X, \mathbb{E}Y$ (3 pkt).
 - Obliczyć kowariancję zmiennych X i Y (2 pkt).
- Wektor losowy (X, Y) ma gęstość $g(x, y) = 3e^{-2x-y}1_{\{0 < x < y\}}$. Znaleźć gęstość zmiennej X i gęstość zmiennej Y (3 pkt). Z badać, czy zmienne X i Y są niezależne. Odpowiedź uzasadnić! (2 pkt) Oblicz $\mathbb{E}(Y | X)$ oraz $\mathbb{E}(X^3 + e^{-X}Y | X)$. (4 pkt)
- Wektor losowy (X, Y) ma rozkład normalny o średniej $(0, 0)$ i macierzy kowariancji $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$.
 - Obliczyć współczynnik korelacji liniowej zmiennych X i Y (2 pkt).
 - Wyznaczyć rozkład zmiennej $5X - Y$ (2 pkt).
 - Dla jakich wartości parametru $a \in \mathbb{R}$, zmienne losowe $aX + Y$ i X są niezależne? (4 pkt)
- Pewien kantor specjalizuje się w sprzedaży franków szwajcarskich. Załóżmy, że kwoty kupowane przez klientów są zmiennymi losowymi o średniej 350 i wariancji $\frac{300^2}{12}$. Przybliżyc prawdopodobieństwo, że 108 losowych klientów, którzy odwiedzą kantor pewnego dnia, będzie chciało zakupić mniej niż 37350 franków (5 pkt). Ile franków powinien mieć rano w kasie właściciel, by szansa na to, że wszyscy klienci z tego dnia będą mogli zrealizować swoją chęć zakupu wynosiła co najmniej 0,9? (4 pkt)
- Pewien inwestor giełdowy kieruje się przy grze na giełdzie następującą strategią: jeśli danego dnia nie podejmował żadnych działań, to następnego dnia z prawdopodobieństwem $\frac{1}{6}$ sprzeda pakiet akcji, z prawdopodobieństwem $\frac{1}{3}$ kupi pakiet akcji, a z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$ znów nie podejmie żadnych działań. Jeśli danego dnia kupił pakiet akcji, to następnego dnia kupi kolejny pakiet, sprzeda pakiet lub nie będzie podejmował żadnych działań z prawdopodobieństwami równymi $\frac{1}{3}$. Jeśli zaś danego dnia sprzedał pakiet akcji, to następnego dnia będzie tylko obserwował kursy i na pewno nie będzie podejmował żadnych akcji. Wypisać macierz przejścia dla łańcucha Markowa opisującego strategię tego gracza (2 pkt). Wyznaczyć rozkład stacjonarny tego łańcucha (4 pkt). Jakie jest, w przybliżeniu, prawdopodobieństwo, że jeśli gracz ten stosował taką strategię od bardzo dawna, to 8 marca 2013 nie podejmie żadnych działań? (2 pkt)

Wersja IV

Instrukcja:

- Uważnie przeczytaj treści zadań. W szczególności zwróć uwagę jakie polecenia są do wykonania w danym zadaniu.
- Rozwiązanie każdego zadania należy pisać na **osobnej kartce**. Każda kartka musi być podpisana **czytelnie** i DRUKOWANYMI literami imieniem i nazwiskiem, numerem indeksu i opatrzona numerem wersji i zadania, np.: „Zad. 3. Wersja I”.
- W rozwiązaniu zadania należy przedstawić wszystkie obliczenia i objaśnić kluczowe kroki rozumowania (w szczególności opisać rozważane w rozwiązaniu zdarzenia, itp.), przywołać (z nazwy) używane fakty i wzory, etc. Za rozwiązanie zawierające sam wynik końcowy nie będą przyznawane żadne punkty.
- Nie wolno korzystać z notatek, książek, tablic czy kalkulatorów.
- W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy, sprawdzian może zostać przerwany a praca anulowana.
- Czas pisania egzaminu: 150 minut

- Wśród 9 monet osiem jest regularnych, zaś jedna moneta jest fałszywa i ma orła po obu stronach. Losowo wybieramy jedną z monet, rzucamy nią trzy razy i stwierdzamy, że trzy razy wypadł orzeł.
 - Jakie jest prawdopodobieństwo, że ta moneta jest fałszywa? (3 pkt)
 - Tą samą monetą rzucamy raz jeszcze. Jakie jest prawdopodobieństwo, że i tym razem wypadnie orzeł? (3 pkt)
- Dystrybuanta zmiennej losowej X wyraża się wzorem $F(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0 \\ \frac{1}{16}t^2 & \text{dla } t \in [0, 4) \\ 1 & \text{dla } t \geq 4 \end{cases}$
 - Uzasadnić, że X ma rozkład ciągły (1 pkt).
 - Znaleźć gęstość zmiennej X oraz zmiennej $Y = X^2$ (3 pkt).
 - Obliczyć $\mathbb{E}X$, $\text{Var}X$. (3 pkt).
 - Czy zmienna $Z = \min(X, 1)$ ma rozkład ciągły? Odpowiedź uzasadnić! (1 pkt)
 - Obliczyć $\mathbb{E}Z$, gdzie $Z = \min(X, 1)$ (2 pkt).
- Rozkład łączny zmiennych losowych X, Y ma gęstość $g(x, y) = \frac{1}{32}(x^3 + xy)1_{\{0 \leq x \leq 2\}}1_{\{0 \leq y \leq 4\}}$.
 - Obliczyć $\mathbb{P}(X \leq 1, Y \leq 2)$ (2 pkt).
 - Znaleźć gęstość zmiennej X oraz gęstość zmiennej Y (3 pkt).
 - Obliczyć $\mathbb{E}X, \mathbb{E}Y$ (3 pkt).
 - Obliczyć kowariancję zmiennych X i Y (2 pkt).
- Wektor losowy (X, Y) ma gęstość $g(x, y) = 4e^{-3x-y}1_{\{0 < x < y\}}$. Znaleźć gęstość zmiennej X i gęstość zmiennej Y (3 pkt). Z badać, czy zmienne X i Y są niezależne. Odpowiedź uzasadnić! (2 pkt) Oblicz $\mathbb{E}(Y | X)$ oraz $\mathbb{E}(X^{-2} + Y \cos(X) | X)$. (4 pkt)
- Wektor losowy (X, Y) ma rozkład normalny o średniej $(0, 0)$ i macierzy kowariancji $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$.
 - Obliczyć współczynnik korelacji liniowej zmiennych X i Y (2 pkt).
 - Wyznaczyć rozkład zmiennej $X + 2Y$ (2 pkt).
 - Dla jakich wartości parametru $a \in \mathbb{R}$, zmienne losowe $aX + Y$ i X są niezależne? (4 pkt)
- W pewnym kantorze można jedynie kupować dolary amerykańskie. Przypuśćmy, że kwoty kupowane przez klientów są zmiennymi losowymi o średniej 450 i wariancji $\frac{25000}{3}$. Przybliżyć prawdopodobieństwo, że 120 losowych klientów, którzy odwiedzą kantor pewnego dnia, będzie chciało zakupić więcej niż 54600 dolarów (5 pkt). Ile dolarów powinien mieć rano w kasie właściciel, by szansa na to, że wszyscy klienci z tego dnia będą mogli zrealizować swoją chęć zakupu wynosiła co najmniej 0,95? (4 pkt)
- Doradca w banku kieruje się przy sprzedaży produktów następującą strategią: jeśli jednego klienta namawiał na kartę kredytową, to następnego klienta z prawdopodobieństwem $\frac{1}{5}$ będzie namawiał na kredyt, z prawdopodobieństwem $\frac{2}{5}$ na lokatę strukturyzowaną, a z prawdopodobieństwem $\frac{3}{5}$ znów na kartę kredytową. Jeśli danego klienta namawiał na lokatę strukturyzowaną, to następnego klienta będzie również namawiał na kredyt, na kartę kredytową lub na lokatę strukturyzowaną z prawdopodobieństwami równymi $\frac{1}{3}$. Jeśli zaś właśnie namawiał klienta na kredyt, to następnego będzie namawiał na kartę kredytową. Wypisać macierz przejścia dla łańcucha Markowa opisującego strategię tego doradcy (2 pkt). Wyznaczyć rozkład stacjonarny tego łańcucha (4 pkt). Jaki jest, w przybliżeniu, odsetek klientów, których doradca namawia na kredyt, jeśli od dawna stosuje tę strategię? (2 pkt)