Egzamin z Rachunku Prawdopodobieństwa, 8 lutego 2013r.

Wersja I

Instrukcja:

- Uważnie przeczytaj treści zadań. W szczególności zwróć uwagę jakie polecenia są do wykonania w danym zadaniu.
- Rozwiązanie każdego zadania należy pisać na **osobnej kartce**. Każda kartka musi być podpisana **czytelnie** i DRUKOWANYMI literami imieniem i nazwiskiem, numerem indeksu i opatrzona numerem wersji i zadania, np.: „Zad. 3. Wersja I".
- W rozwiązaniu zadania należy przedstawić wszystkie obliczenia i objaśnić kluczowe kroki rozumowania (w szczególności opisać rozważane w rozwiązaniu zdarzenia, itp.), przywołać (z nazwy) używane fakty i wzory, etc. Za rozwiązanie zawierające sam wynik końcowy nie będą przyznawane żadne punkty.
- Nie wolno korzystać z notatek, książek, tablic czy kalkulatorów.
- W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy, sprawdzian może zostać przerwany a praca anulowana.
- Czas pisania egzaminu: 150 minut

---

1. Pewien artysta współczesny tworzy instalacje w następujący sposób: wybiera losowo punkt (X, Y) z blachy $[0, 1] \times [0, 1]$, a następnie odcina lewy dolny róg blachy (obszar poniżej i na lewo od punktu (X, Y)) i wykorzystuje go jako podpórkę, zaś do pozostałej części blachy przykleja pióra. Jaka jest średnio powierzchnia obklejona piórami? (*4 pkt*) Wyznaczyć rozkład zmiennej $X + Y$ (*4 pkt*).

2. Dwuwymiarowa zmienna losowa (X, Y) ma rozkład z gęstością $g(x, y) = (x + y)1_{\{0 \leqslant x \leqslant 1\}}1_{\{0 \leqslant y \leqslant 1\}}$. Wyznaczyć rozkłady zmiennych X i Y (*4 pkt*). Obliczyć kowariancję zmiennych X i Y (*4 pkt*). Czy zmienne X i Y są niezależne? Odpowiedź uzasadnić (*2 pkt*).

3. Dwuwymiarowa zmienna losowa (X, Y) ma rozkład z gęstością $g(x, y) = \frac{e^{-y}}{y}1_{\{0<x<y\}}$. Obliczyć $\mathbb{E}(X \,|\, Y)$ (*4 pkt*), $\mathbb{E}(X^2 \sin(Y) \,|\, Y)$ (*4 pkt*), oraz $\mathbb{E}X$ (*2 pkt*).

4. Liczba głównych wygranych w Lotto (trafień szóstek) w pojedynczym losowaniu jest zmienną losową o rozkładzie Poissona z parametrem $\lambda = 1/4$ (czyli przyjmuje wartość $k \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ z prawdopodobieństwem $\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$). Przypuśćmy, że każdy z posiadaczy wygrywającego losu odbiera swoją nagrodę z prawdopodobieństwem 90%. Niech X oznacza liczbę głównych wygranych, jakie padną w najbliższym losowaniu, natomiast Y — liczbę głównych wygranych, które zostaną odebrane. Opisać rozkład warunkowy $Y|X = x$ (*2 pkt*). Obliczyć $\mathbb{E}(Y|X)$ (*3 pkt*) oraz $\mathbb{E}Y$ (*2 pkt*).

5. Wykonujemy ciąg rzutów kostką do gry. Definiujemy:
   (a) zmienne losowe X_n następująco: $X_n = 1$, jeśli w n-tym rzucie wypadła szóstka, i $X_n = 0$ w przeciwnym przypadku. Zbadać zbieżność ciągu $\frac{X_1+\ldots+X_n}{6n}$ prawie na pewno i wyznaczyć granicę, jeśli istnieje. (*4 pkt*)
   (b) zmienne losowe Y_n następująco: $Y_n = 1$, jeśli w pierwszych n rzutach choć raz wypadła szóstka, oraz $Y_n = 0$ w przeciwnym przypadku. Zbadać zbieżność ciągu Y_n według prawdopodobieństwa i wyznaczyć granicę, jeśli istnieje. (*4 pkt*)

6. Przypuśćmy, że co trzeci klient kasy w pewnym banku przychodzi do oddziału wypłacić gotówkę, zaś pozostali dokonują wpłat. Wyznaczyć przybliżone prawdopodobieństwo, że spośród 162 (niezależnych) klientów odwiedzających bank pewnego dnia, co najwyżej 66 wypłaci gotówkę (*4 pkt*). Przypuśćmy teraz, że klient wypłacający pobiera z kasy średnio 4000 PLN, z odchyleniem standardowym 600PLN, zaś klient wpłacający zostawia w kasie średnio 2000 PLN, z odchyleniem standardowym 800 PLN. Wyznaczyć przybliżone prawdopodobieństwo, że po dniu, w którym przy kasie było 100 klientów wpłacających i 100 klientów wypłacających gotówkę, kasa została uszczuplona o co najmniej 197 tys PLN. (*5 pkt*).

7. Jacek i Placek grają w następującą grę: rzucają symetryczną monetą, aż wypadnie ciąg Orzeł-Reszka-Orzeł, kiedy to wygrywa Jacek, lub ciąg Reszka-Reszka-Orzeł, kiedy to wygrywa Placek. Jaka jest szansa, że najpóźniej po pierwszych pięciu rzutach Jacek wygra? (*3 pkt*) Jaka jest szansa wygranej Jacka w ogóle? (*5 pkt*)

$\Phi(1) \approx 0,841$, $\Phi(1,5) \approx 0,933$, $\Phi(2) \approx 0,977$, $\Phi(2,5) \approx 0,994$, $\Phi(3) \approx 0,9987$, $\Phi(4) \approx 0,99997$

Egzamin z Rachunku Prawdopodobieństwa, 8 lutego 2013r.

Wersja II

Instrukcja:

- Uważnie przeczytaj treści zadań. W szczególności zwróć uwagę jakie polecenia są do wykonania w danym zadaniu.
- Rozwiązanie każdego zadania należy pisać na **osobnej kartce**. Każda kartka musi być podpisana **czytelnie** i DRUKOWANYMI literami imieniem i nazwiskiem, numerem indeksu i opatrzona numerem wersji i zadania, np.: „Zad. 3. Wersja II".
- W rozwiązaniu zadania należy przedstawić wszystkie obliczenia i objaśnić kluczowe kroki rozumowania (w szczególności opisać rozważane w rozwiązaniu zdarzenia, itp.), przywołać (z nazwy) używane fakty i wzory, etc. Za rozwiązanie zawierające sam wynik końcowy nie będą przyznawane żadne punkty.
- Nie wolno korzystać z notatek, książek, tablic czy kalkulatorów.
- W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy, sprawdzian może zostać przerwany a praca anulowana.
- Czas pisania egzaminu: 150 minut

---

1. Pewien malarz tworzy obrazy w następujący sposób: wybiera losowo punkt (X, Y) z białego kwadratowego płótna $[0,1]\times[0,1]$, a następnie lewy dolny róg płótna (obszar poniżej i na lewo od punktu (X, Y)) maluje na zielono, zaś prawy górny róg płótna (obszar powyżej i na prawo od punktu (X, Y)) maluje na pomarańczowo. Jaką część płótna będzie średnio zajmował kolorowy obszar? (*4 pkt*) Wyznaczyć rozkład zmiennej $X + Y$ (*4 pkt*).

2. Dwuwymiarowa zmienna losowa (X, Y) ma rozkład z gęstością $g(x, y) = 3y\mathbb{1}_{\{0\leqslant x\leqslant y\leqslant 1\}}$. Wyznaczyć rozkłady zmiennych X i Y (*4 pkt*). Obliczyć kowariancję zmiennych X i Y (*4 pkt*). Czy zmienne X i Y są niezależne? Odpowiedź uzasadnić (*2 pkt*).

3. Dwuwymiarowa zmienna losowa (X, Y) ma rozkład z gęstością $g(x, y) = \frac{2}{(x+1)^4}\mathbb{1}_{\{x>0\}}\mathbb{1}_{\{0<y<x+1\}}$. Obliczyć $\mathbb{E}(Y \mid X)$ (*4 pkt*), $\mathbb{E}(Y^2\cos(X) \mid X)$ (*4 pkt*), oraz $\mathbb{E}Y$ (*2 pkt*).

4. W pewnym dużym mieście liczba wypadków drogowych, do jakich dochodzi w ciągu jednej doby, jest zmienną losową o rozkładzie Poissona z parametrem $\lambda = 6$ (czyli przyjmuje wartość $k \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ z prawdopodobieństwem $\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$). Według policyjnych statystyk, prawdopodobieństwo, że przyczyną wypadku było nieudzielenie pierwszeństwa przejazdu wynosi 30%. Niech X oznacza liczbę wypadków, do jakich dojdzie w ciągu kolejnej doby, natomiast Y — liczbę tych wypadków z kolejnej doby, których powodem będzie nieudzielenie pierwszeństwa przejazdu. Opisać rozkład warunkowy $Y|X = x$ (*2 pkt*). Obliczyć $\mathbb{E}(Y|X)$ (*3 pkt*) oraz $\mathbb{E}Y$ (*2 pkt*).

5. Wykonujemy ciąg rzutów symetryczną monetą. Definiujemy:
   (a) zmienne losowe X_n następująco: $X_n = 1$, jeśli w n-tym rzucie wypadł orzeł, i $X_n = 0$ w przeciwnym przypadku. Zbadać zbieżność ciągu $\frac{X_1+\ldots+X_n}{3n+2}$ prawie na pewno i wyznaczyć granicę, jeśli istnieje. (*4 pkt*)
   (b) zmienne losowe Y_n następująco: $Y_n = 1$, jeśli w pierwszych n rzutach wypadły same orły, oraz $Y_n = 0$ w przeciwnym przypadku. Zbadać zbieżność ciągu Y_n według prawdopodobieństwa i wyznaczyć granicę, jeśli istnieje. (*4 pkt*)

6. Przypuśćmy, że co drugi klient supermarketu stający przy kasie jest oszczędny, zaś co drugi rozrzutny. Wyznaczyć przybliżone prawdopodobieństwo, że spośród 100 (niezależnych) klientów stojących przy kasie, co najmniej 55 będzie oszczędnych (*4 pkt*). Przypuśćmy teraz, że podczas jednej wizyty klient oszczędny wydaje średnio 100PLN, przy odchyleniu standardowym 30PLN; zaś klient rozrzutny – średnio 300PLN, z odchyleniem standardowym równym 40PLN. Wyznaczyć przybliżone prawdopodobieństwo, że 200 klientów (w tym 100 oszczędnych i 100 rozrzutnych) obsłużonych przez pewną kasjerkę zostawi w kasie nie więcej niż 38 tys. PLN (*5 pkt*).

7. Jaś i Małgosia grają w następującą grę: rzucają symetryczną monetą, aż wypadnie ciąg Orzeł-Orzeł-Reszka, kiedy to wygrywa Jaś, lub ciąg Reszka-Reszka-Reszka, kiedy to wygrywa Małgosia. Jaka jest szansa, że najpóźniej po pierwszych pięciu rzutach Jaś wygra? (*3 pkt*) Jaka jest szansa wygranej Jasia w ogóle? (*5 pkt*)

$\Phi(1) \approx 0,841$, $\Phi(1,5) \approx 0,933$, $\Phi(2) \approx 0,977$, $\Phi(2,5) \approx 0,994$, $\Phi(3) \approx 0,9987$, $\Phi(4) \approx 0,99997$

Egzamin z Rachunku Prawdopodobieństwa, 8 lutego 2013r.

Wersja III

Instrukcja:

- Uważnie przeczytaj treści zadań. W szczególności zwróć uwagę jakie polecenia są do wykonania w danym zadaniu.
- Rozwiązanie każdego zadania należy pisać na **osobnej kartce**. Każda kartka musi być podpisana **czytelnie** i DRUKOWANYMI literami imieniem i nazwiskiem, numerem indeksu i opatrzona numerem wersji i zadania, np.: „Zad. 3. Wersja III".
- W rozwiązaniu zadania należy przedstawić wszystkie obliczenia i objaśnić kluczowe kroki rozumowania (w szczególności opisać rozważane w rozwiązaniu zdarzenia, itp.), przywołać (z nazwy) używane fakty i wzory, etc. Za rozwiązanie zawierające sam wynik końcowy nie będą przyznawane żadne punkty.
- Nie wolno korzystać z notatek, książek, tablic czy kalkulatorów.
- W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy, sprawdzian może zostać przerwany a praca anulowana.
- Czas pisania egzaminu: 150 minut

---

1. Pewien artysta współczesny tworzy instalacje w następujący sposób: wybiera losowo punkt (X, Y) z blachy $[0,1] \times [0,1]$, a następnie odcina prawy górny róg blachy (obszar powyżej i na prawo od punktu (X, Y)) i wykorzystuje go jako podpórkę, zaś do pozostałej części blachy przykleja pióra. Jaka jest średnio powierzchnia obklejona piórami? (*4 pkt*) Wyznaczyć rozkład zmiennej $Y - X$ (*4 pkt*).

2. Dwuwymiarowa zmienna losowa (X, Y) ma rozkład z gęstością $g(x, y) = (x - y + 1)\mathbb{1}_{\{0 \leqslant x \leqslant 1\}}\mathbb{1}_{\{0 \leqslant y \leqslant 1\}}$. Wyznaczyć rozkłady zmiennych X i Y (*4 pkt*). Obliczyć kowariancję zmiennych X i Y (*4 pkt*). Czy zmienne X i Y są niezależne? Odpowiedź uzasadnić (*2 pkt*).

3. Dwuwymiarowa zmienna losowa (X, Y) ma rozkład z gęstością $g(x, y) = \frac{e^{-x}}{x}\mathbb{1}_{\{0<y<x\}}$. Obliczyć $\mathbb{E}(Y \mid X)$ (*4 pkt*), $\mathbb{E}(Y^2 \cos(X) \mid X)$ (*4 pkt*), oraz $\mathbb{E}Y$ (*2 pkt*).

4. Liczba głównych wygranych w Lotto (trafień szóstek) w pojedynczym losowaniu jest zmienną losową o rozkładzie Poissona z parametrem $\lambda = 1/3$ (czyli przyjmuje wartość $k \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ z prawdopodobieństwem $\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$). Przypuśćmy, że każdy z posiadaczy wygrywającego losu odbiera swoją nagrodę z prawdopodobieństwem 80%. Niech Y oznacza liczbę głównych wygranych, jakie padną w najbliższym losowaniu, natomiast X — liczbę głównych wygranych, które zostaną odebrane. Opisać rozkład warunkowy $X|Y = y$ (*2 pkt*). Obliczyć $\mathbb{E}(X|Y)$ (*3 pkt*) oraz $\mathbb{E}X$ (*2 pkt*).

5. Wykonujemy ciąg rzutów kostką do gry. Definiujemy:
   (a) zmienne losowe X_n następująco: $X_n = 0$, jeśli w n-tym rzucie wypadła szóstka, i $X_n = 1$ w przeciwnym przypadku. Zbadać zbieżność ciągu $\frac{X_1+\ldots+X_n}{5n}$ prawie na pewno i wyznaczyć granicę, jeśli istnieje. (*4 pkt*)
   (b) zmienne losowe Y_n następująco: $Y_n = 0$, jeśli w pierwszych n rzutach choć raz wypadła szóstka, oraz $Y_n = 1$ w przeciwnym przypadku. Zbadać zbieżność ciągu Y_n według prawdopodobieństwa i wyznaczyć granicę, jeśli istnieje. (*4 pkt*)

6. Przypuśćmy, że co trzeci klient kasy w pewnym banku przychodzi do oddziału wypłacić gotówkę, zaś pozostali dokonują wpłat. Wyznaczyć przybliżone prawdopodobieństwo, że spośród 162 (niezależnych) klientów odwiedzających bank pewnego dnia, co najmniej 42 wypłaci gotówkę (*4 pkt*). Przypuśćmy teraz, że klient wypłacający pobiera z kasy średnio 4000 PLN, z odchyleniem standardowym 800PLN, zaś klient wpłacający zostawia w kasie średnio 2000 PLN, z odchyleniem standardowym 600 PLN. Wyznaczyć przybliżone prawdopodobieństwo, że po dniu, w którym przy kasie było 100 klientów wpłacających i 100 klientów wypłacających gotówkę, kasa została uszczuplona o co najwyżej 203 tys PLN. (*5 pkt*).

7. Jacek i Placek grają w następującą grę: rzucają symetryczną monetą, aż wypadnie ciąg Orzeł-Reszka-Orzeł, kiedy to wygrywa Jacek, lub ciąg Reszka-Reszka-Orzeł, kiedy to wygrywa Placek. Jaka jest szansa, że najpóźniej po pierwszych pięciu rzutach Placek wygra? (*3 pkt*) Jaka jest szansa wygranej Placka w ogóle? (*5 pkt*)

$\Phi(1) \approx 0,841$, $\Phi(1,5) \approx 0,933$, $\Phi(2) \approx 0,977$, $\Phi(2,5) \approx 0,994$, $\Phi(3) \approx 0,9987$, $\Phi(4) \approx 0,99997$

Egzamin z Rachunku Prawdopodobieństwa, 8 lutego 2013r.

Wersja IV

Instrukcja:

- Uważnie przeczytaj treści zadań. W szczególności zwróć uwagę jakie polecenia są do wykonania w danym zadaniu.
- Rozwiązanie każdego zadania należy pisać na **osobnej kartce**. Każda kartka musi być podpisana **czytelnie** i DRUKOWANYMI literami imieniem i nazwiskiem, numerem indeksu i opatrzona numerem wersji i zadania, np.: „Zad. 3. Wersja IV".
- W rozwiązaniu zadania należy przedstawić wszystkie obliczenia i objaśnić kluczowe kroki rozumowania (w szczególności opisać rozważane w rozwiązaniu zdarzenia, itp.), przywołać (z nazwy) używane fakty i wzory, etc. Za rozwiązanie zawierające sam wynik końcowy nie będą przyznawane żadne punkty.
- Nie wolno korzystać z notatek, książek, tablic czy kalkulatorów.
- W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy, sprawdzian może zostać przerwany a praca anulowana.
- Czas pisania egzaminu: 150 minut

---

1. Pewien malarz tworzy obrazy w następujący sposób: wybiera losowo punkt (X, Y) z białego kwadratowego płótna $[0,1]\times[0,1]$, a następnie lewy górny róg płótna (obszar powyżej i na lewo od punktu (X, Y)) maluje na zielono, zaś prawy dolny róg płótna (obszar powyżej i na prawo od punktu (X, Y)) maluje na pomarańczowo. Jaką część płótna będzie średnio zajmował kolorowy obszar? (*4 pkt*) Wyznaczyć rozkład zmiennej $X - Y$ (*4 pkt*).

2. Dwuwymiarowa zmienna losowa (X, Y) ma rozkład z gęstością $g(x, y) = 3x\mathbb{1}_{\{0\leqslant y\leqslant x\leqslant 1\}}$. Wyznaczyć rozkłady zmiennych X i Y (*4 pkt*). Obliczyć kowariancję zmiennych X i Y (*4 pkt*). Czy zmienne X i Y są niezależne? Odpowiedź uzasadnić (*2 pkt*).

3. Dwuwymiarowa zmienna losowa (X, Y) ma rozkład z gęstością $g(x, y) = \frac{2}{(y+1)^4}\mathbb{1}_{\{0<x<y+1\}}\mathbb{1}_{\{y>0\}}$. Obliczyć $\mathbb{E}(X\,|\,Y)$ (*4 pkt*), $\mathbb{E}(X^2\sin(Y)\,|\,Y)$ (*4 pkt*), oraz $\mathbb{E}X$ (*2 pkt*).

4. W pewnym dużym mieście liczba wypadków drogowych, do jakich dochodzi w ciągu jednej doby, jest zmienną losową o rozkładzie Poissona z parametrem $\lambda = 5$ (czyli przyjmuje wartość $k \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ z prawdopodobieństwem $\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$). Według policyjnych statystyk, prawdopodobieństwo, że przyczyną wypadku było nieudzielenie pierwszeństwa przejazdu wynosi 40%. Niech Y oznacza liczbę wypadków, do jakich dojdzie w ciągu kolejnej doby, natomiast X — liczbę tych wypadków z kolejnej doby, których powodem będzie nieudzielenie pierwszeństwa przejazdu. Opisać rozkład warunkowy $X|Y = y$ (*2 pkt*). Obliczyć $\mathbb{E}(X|Y)$ (*3 pkt*) oraz $\mathbb{E}X$ (*2 pkt*).

5. Wykonujemy ciąg rzutów symetryczną monetą. Definiujemy:
   (a) zmienne losowe X_n następująco: $X_n = 0$, jeśli w n-tym rzucie wypadł orzeł, i $X_n = 2$ w przeciwnym przypadku. Zbadać zbieżność ciągu $\frac{X_1+\ldots+X_n}{2n+1}$ prawie na pewno i wyznaczyć granicę, jeśli istnieje. (*4 pkt*)
   (b) zmienne losowe Y_n następująco: $Y_n = 0$, jeśli w pierwszych n rzutach wypadły same orły, oraz $Y_n = 1$ w przeciwnym przypadku. Zbadać zbieżność ciągu Y_n według prawdopodobieństwa i wyznaczyć granicę, jeśli istnieje. (*4 pkt*)

6. Przypuśćmy, że co drugi klient supermarketu stający przy kasie jest oszczędny, zaś co drugi rozrzutny. Wyznaczyć przybliżone prawdopodobieństwo, że spośród 100 (niezależnych) klientów stojących przy kasie, co najwyżej 45 będzie oszczędnych (*4 pkt*). Przypuśćmy teraz, że podczas jednej wizyty klient oszczędny wydaje średnio 100PLN, przy odchyleniu standardowym 40PLN; zaś klient rozrzutny – średnio 300PLN, z odchyleniem standardowym równym 30PLN. Wyznaczyć przybliżone prawdopodobieństwo, że 200 klientów (w tym 100 oszczędnych i 100 rozrzutnych) obsłużonych przez pewną kasjerkę zostawi w kasie co najmniej 42 tys. PLN (*5 pkt*).

7. Jaś i Małgosia grają w następującą grę: rzucają symetryczną monetą, aż wypadnie ciąg Reszka-Reszka-Orzeł, kiedy to wygrywa Jaś, lub ciąg Orzeł-Orzeł-Orzeł, kiedy to wygrywa Małgosia. Jaka jest szansa, że najpóźniej po pierwszych pięciu rzutach Małgosia wygra? (*3 pkt*) Jaka jest szansa wygranej Małgosi w ogóle? (*5 pkt*)

$\Phi(1) \approx 0,841$, $\Phi(1,5) \approx 0,933$, $\Phi(2) \approx 0,977$, $\Phi(2,5) \approx 0,994$, $\Phi(3) \approx 0,9987$, $\Phi(4) \approx 0,99997$