Egzamin z teorii mnogości
3 lutego 2024 r.
Część teoretyczna

Zadanie 1. Sformułuj definicję liczby porządkowej.

Zadanie 2. Rozstrzygnij, czy istnieje zbiór dobrze uporządkowany $\langle A, \leqslant \rangle$, w którym dla pewnego elementu $a \in A$ zachodzą jednocześnie warunki:
- zbiór $\{x \in A : x < a\}$ jest nieskończony,
- typy porządkowe zbiorów A i $\{x \in A : x \geqslant a\}$ są równe.

Odpowiedź krótko uzasadnij.

Zadanie 3. Sformułuj lemat Kuratowskiego-Zorna.

Zadanie 4. Rozstrzygnij, czy zachodzi równość $\prod_{n<\omega} \aleph_n = \aleph_\omega$. Odpowiedź krótko uzasadnij.

Zadanie 5.
(a) Sformułuj definicję podzbioru stacjonarnego nieprzeliczalnej, regularnej liczby kardynalnej κ.
(b) Sformułuj lemat Fodora o funkcjach regresywnych.

Zadanie 6. Przy założeniu GCH najmniejsza liczba kardynalna κ taka, że $\kappa \to (\aleph_{2024})^2_2$ jest postaci $\aleph_n$. Podaj wartość n. Odpowiedź krótko uzasadnij, powołując się na odpowiednie twierdzenie.

Zadanie 7. Udowodnij, że jeśli $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$ są dowolnymi dwoma różnymi ultrafiltrami na zbiorze ω, to $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$ nie jest ultrafiltrem na zbiorze ω.

Zadanie 8. Podaj przykład zbioru przeliczalnego i rodziny prawie rozłącznej jego podzbiorów, która jest mocy $2^{\aleph_0}$.

Zadanie 9.
(a) Sformułuj definicję Δ-systemu.
(b) Udowodnij, że każda nieskończona rodzina zbiorów dwuelementowych zawiera nieskończony Δ-system.

Zadanie 10. Sformułuj lemat Königa o $\aleph_0$-drzewach i definicję $\aleph_1$-drzewa Aronszajna.

Egzamin z teorii mnogości

3 lutego 2024 r.

Część zadaniowa

Zadanie 1. Przy założeniu hipotezy continuum znajdź najmniejszą liczbę porządkową α, taką że

$$\aleph_\alpha > \left|[\aleph_{2024}]^{\aleph_0}\right|.$$

Zadanie 2.
Dla zbioru $A \subseteq \mathbb{N}$ definiujemy

$$\overline{d}(A) = \limsup_{n\to\infty} \frac{|A \cap \{0,1,\ldots,n-1\}|}{n}$$

oraz

$$\underline{d}(A) = \liminf_{n\to\infty} \frac{|A \cap \{0,1,\ldots,n-1\}|}{n}.$$

Udowodnij, że:

a) istnieje ultrafiltr $\mathcal{U}$ na $\mathbb{N}$, taki że dla każdego zbioru $A \in \mathcal{U}$ mamy $\overline{d}(A) > 0$,

b) jeśli $\mathcal{U}$ jest dowolnym ultrafiltrem na $\mathbb{N}$, to istnieje zbiór $A \in \mathcal{U}$, taki że $\underline{d}(A) = 0$.

Zadanie 3. Udowodnij, że dla dowolnej rodziny indeksowanej $(A_\alpha : \alpha < \kappa)$ podzbiorów nieprzeliczalnej regularnej liczby kardynalnej κ oraz każdej bijekcji $f : \kappa \underset{\text{na}}{\overset{1-1}{\longrightarrow}} \kappa$, zbiór

$$\mathop{\triangle}_{\alpha<\kappa} A_\alpha \triangle \mathop{\triangle}_{\alpha<\kappa} A_{f(\alpha)}$$

jest niestacjonarny w κ ($\triangle$ oznacza różnicę symetryczną zbiorów).

Zadanie 4. Niech $\mathcal{P}$ będzie nieprzeliczalnym zbiorem, którego elementami są funkcje postaci $f : D_f \to \mathbb{N}$, gdzie $D_f \in [\aleph_1]^{<\aleph_0}$.

Udowodnij, że istnieją funkcje $f, g \in \mathcal{P}$, $f \neq g$ takie, że zbiór $f \cup g$ jest funkcją.

Prosimy o napisanie rozwiązania każdego zadania na **oddzielnej**, **CZYTELNIE** podpisanej kartce.